

Erweiterung der verallgemeinerten Rheonomtransformation von Flächenelementen höherer Ordnung und R_κ -Extensoren.

(Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV.)

Herrn Otto Varga anlässlich seines 50. Geburtstages gewidmet.

Von AKITSUGU KAWAGUCHI (Sapporo).

Wie wohlbekannt, ist der Tangentenraum eines Riemannschen Raumes ein Vektorraum und die Komponenten v^i eines Vektors im Punkt (x_0) transformieren sich linear bei jeder Änderung $(x^i) \rightarrow (x^a)$ des Koordinatensystems in der Weise: $v^a = (\partial x^a / \partial x^i)_{x_0} v^i$. Die letzte Gleichung hat auch den Inhalt $dx^a = (\partial x^a / \partial x^i)_{x_0} dx^i$ oder $x'^a = (\partial x^a / \partial x^i)_{x_0} x'^i$ für zwei benachbarten Punkte (x_0) und $(x_0 + dx)$, daraus folgt sofort, daß die Geschwindigkeit dx^i/dt (t : Zeit) ein Vektor ist. Aber wir differenzieren noch einmal, dann erhalten wir

$$x''^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^i} x''^i + \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j} x'^i x'^j$$

am Punkt (x_0) . Deshalb können x''^i nicht mehr die Komponenten eines Vektors sein, wenn die Koeffizienten des letzten Gliedes nicht gleich Null sind. Im allgemeinen sollen diese Koeffizienten nicht verschwinden. Deswegen hatten wir die Christoffelschen Symbole oder die linearen Übertragungsparameter $\Gamma_{jk}^i(x)$ eingeführt, dann erhalten wir den Vektor $a^i = x''^i + \Gamma_{jk}^i x'^j x'^k$. Das ist sehr wichtig, daß die Beschleunigung nicht nur durch x''^i sondern auch durch x'^i bestimmt wird.

Andererseits ist die Metrik des Riemannschen Raumes durch $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ gegeben, woraus die Christoffelschen Symbolen bestimmt werden. Dagegen wird die Metrik des Finslerschen Raumes durch $ds = F(x, dx)$ definiert, wobei die Funktion F positiv homogen von Dimension 1 in dx^i ist. Noch allgemeiner dürfen wir die Metrik durch die Funktion $ds = F(x, x', x'', \dots, x^{(M)}) dt$ von $(M+1)N$ Argumenten definieren,¹⁾ wie die Affinlänge einer

¹⁾ Siehe A. KAWAGUCHI [1].

Kurve im affinen Raum von z. B. drei Dimensionen

$$ds = \left| \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{array} \right|^{\frac{1}{6}} dt$$

uns ein Beispiel gibt.

In diesem Falle können wir für einen Vektor nicht mehr über seine Größe sprechen, sondern nur für den Inbegriff von MN Werten wie $(x', x'', \dots, x^{(M)})$. Somit hat ein gewöhnlicher Vektor im solchen Raum keine Bedeutung mehr. Der Inbegriff von diesen MN Werten gibt Anlass zu einer Verallgemeinerung des Begriffes von Vektoren.

Nun wollen wir die Eigenschaft von MN Werten der Art wie $(x', x'', \dots, x^{(M)})$ untersuchen. $x^a = x^a(x^i)$ sei eine beliebige Transformation, dann ist

$$x'^a = A_j^a x'^j, \quad \text{wobei} \quad A_j^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^j}.$$

Nochmal differenzierend,

$$\begin{aligned} x''^a &= A_j^a x''^j + A_{jk}^a x'^j x'^k, \\ x'''^a &= A_j^a x'''^j + A_{jk}^a (3x''^j x'^k) + A_{jkl}^a x'^j x'^k x'^l, \\ &\dots \end{aligned}$$

In dieser Arbeit wollen wir die konkreten Ausdrücke dieser Transformation geben und auch ihre lineare Representation im noch allgemeineren Falle, daß das Element nicht ein Kurvenelement höherer Ordnung²⁾ sondern ein K -dimensionales Flächenelement höherer Ordnung³⁾ ist, und daß wir die verallgemeinerte Rheonomtransformation in Betracht ziehen, die als speziellen Fall die Skleronomtransformation enthält.

§ 1. Erweiterte Parametertransformationen.

1. Es sei X_N bzw. P_K eine N - bzw. K -dimensionale Mannigfaltigkeit, die auf ein System von N bzw. K reellen Punktskoordinaten x^i ($i = 1, 2, \dots, N$) bzw. u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, K$) bezogen ist, unter Voraussetzung $N > K$, dann wird jede K -dimensionale Fläche in X_N mittels N passend gewählter Funktionen $x^i = x^i(u^\alpha)$ gegeben, wobei wir K Veränderliche u^α als Parameter betrachten. Setzen wir die analytische Regularität der Funktionen $x^i(u^\alpha)$ in einem Bereich

²⁾ Siehe A. KAWAGUCHI [2], [4].

³⁾ Siehe A. KAWAGUCHI [3], [5], [6]; A. KAWAGUCHI und H. HOMBU [7]; T. SUGURI [8]; H. HOMBU und T. SUGURI [9]; TAKEO OHKUBO [10]; H. V. CRAIG [11]. Das Flächenelement höherer Ordnung ist im wesentlichen dasselbe wie der „jet“ von CH. EHRESMANN [12].

um den betreffenden Punkt u_0^a in P_K voraus, so bestimmen die Werte

$$x^i = x^i(u^a), \quad p_\alpha^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad p_{\alpha(2)}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2}}, \dots, p_{\alpha(M)}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^M x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \dots \partial u^{\alpha_M}}$$

ein K -dimensionales Flächenelement M -ter Ordnung in jedem Punkt in P_K .

Lassen wir jetzt die x^i nicht notwendig von u^a abhängig sein und betrachten wir $p_\alpha^i, p_{\alpha(2)}^i, \dots, p_{\alpha(M)}^i$ als neue Veränderlichen, so kommt eine Mannigfaltigkeit $M_{(N, M, K)}$ von $N \binom{K+M}{M} + K$ Dimensionen zustande, wenn wir jedem Elemente der Produktmannigfaltigkeit $X_N \times P_K$ jedes System von $N \binom{K+M}{M} - N$ Werten von $p_\alpha^i, p_{\alpha(2)}^i, \dots, p_{\alpha(M)}^i$ adjungieren. Die Mannigfaltigkeit $M_{(N, M, K)}$ besteht dann aus allen P -Expunkten. Unter einem P -Expunkt verstehen wir hierbei ein geometrisches Objekt, die durch ein System von $N \binom{K+M}{M} + K$ Werten von $(u^a, x^i, p_\alpha^i, \dots, p_{\alpha(M)}^i)$ definiert wird, und das Wertesystem heißt die Koordinaten des P -Expunktes. Ein P -Expunkt kann geometrisch als ein parametrisiertes K -dimensionales Flächenelement M -ter Ordnung illustriert werden.

Wie üblich, benützen wir die folgende Schreibweise⁴⁾

$$(1.1) \quad \begin{cases} F_{|\alpha(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{* \partial^r F}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \dots \partial u^{\alpha_r}}, & F_{|\alpha(0)} \stackrel{\text{def}}{=} F, \\ F;_{i}^{\alpha(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{\partial} F}{\partial p_{\alpha(r)}^i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varrho_1! \varrho_2! \dots \varrho_w!}{r!} \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha(r)}^i}, & F;_{i}^{\alpha(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x^i}, \end{cases}$$

wenn die Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ aus $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_w$ gleichen Indizes beziehungsweise bestehen, während $\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_w = r$ ist, dann bekommen wir

$$(1.2) \quad dF = \sum_{r=0}^M F;_{i}^{\alpha(r)} dp_{\alpha(r)}^i + \frac{\partial F}{\partial u^a} du^a \quad \text{und}$$

$$(1.3) \quad \frac{\bar{\partial} p_{\alpha(r)}^i}{\partial p_{\beta(r)}^j} = \delta_j^i \delta_{(\alpha_1}^{\beta_1} \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots \delta_{\alpha_r)}^{\beta_r} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_j^i \delta_{\alpha(r)}^{\beta(r)}.$$

2. Wir ziehen eine Transformation $u^\beta = u^\beta(u^a)$ mit nicht verschwindender Determinante in der Mannigfaltigkeit P_K in Betracht, wobei die Funktionen $u^\beta(u^a)$ M -mal differenzierbar sein sollen. Es sei f eine Funktion von

⁴⁾ Siehe [5], [6] und [7]. $* \partial F / \partial u^a$ bedeutet

$$\frac{\partial F}{\partial u^a} + \sum_{r=0}^M F;_{i}^{\alpha(r)} \cdot p_{\alpha(r)a}^i,$$

wenn F eine Funktion von $(u^a, x^i, p_\alpha^i, \dots, p_{\alpha(M)}^i)$ ist.

u^β , dann ist es wohlbekannt daß für die Parametertransformation $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$

$$(1.4) \quad f_{|\beta(r)} = \sum_{s=1}^r A_{\beta(r)}^{\alpha(s)} f_{|\alpha(s)}$$

gilt, wobei $A_{\beta(r)}^{\alpha(s)}$ Polynome der Ableitungen

$$U_\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta}, \quad U_{\beta(2)}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} U_{\beta_1 \beta_2}^\alpha, \dots, U_{\beta(r)}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} U_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}^\alpha, \dots$$

sind und

$$A_{\beta(r)}^{\alpha(s)} \equiv 0 \quad \text{für } s > r.$$

ist. Nach H. HOMBU und T. SUGURI⁵⁾ sind die folgenden Rekursionsformeln für $A_{\beta(r)}^{\alpha(s)}$ schon bekannt:

$$(1.5) \quad \begin{cases} A_{\beta(r)}^\alpha = U_{\beta(r)}^\alpha, \\ A_{\beta(r)}^{\alpha(s)} = A_{\beta(r-1)}^{\alpha(s-1)} U_{\beta_r}^{\alpha_s} + \frac{* \partial}{\partial u^{\beta_r}} A_{\beta(r-1)}^{\alpha(s)} \quad \text{für } 1 < s < r, \\ A_{\beta(r)}^{\alpha(r)} = U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots U_{\beta_r}^{\alpha_r}. \end{cases}$$

Die exakten Ausdrücke der Polynome $A_{\beta(r)}^{\alpha(s)}$ sind durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 1.1. Ist $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ eine Menge von t beliebigen positiven (alle nicht gleich Null) ganzen Zahlen, für welche die Beziehung $v_1 + v_2 + \dots + v_t = t + s$ bestehen soll, dann ist

$$(1.6) \quad A_{\beta(t+s)}^{\alpha(t)} = \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1! v_2! \dots v_t! w_1! w_2! \dots w_{s+1}!} U_{(\beta(v_1))}^{\alpha_1} U_{\beta(v_2)}^{\alpha_2} \dots U_{\beta(v_t)}^{\alpha_t}.$$

w_ϱ ist hierbei die Zahl derjenigen von den Werten $v_1, v_2, \dots, v_t$, welche gerade gleich dem Werte ϱ sind, und $\sum_{(v)}$ bedeutet Summierung über alle solche Wertesysteme $(v_1, v_2, \dots, v_t)$, für die die Beziehung $v_1 + v_2 + \dots + v_t = t + s$ besteht, und jede von den $v_1, v_2, \dots, v_t$ nicht gleich Null ist.

BEWEIS. Für $s=0$, müssen $v_1 = v_2 = \dots = v_t = 1$ und $w_1 = t$, $w_2 = w_3 = \dots = w_{s+1} = 0$ sein, somit ist (1.6) für $s=0$ richtig. (1.6) sei für irgend eine feste s richtig, dann bekommen wir nach (1.5)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} A_{\beta(t+s+1)}^{\alpha(t)} &= A_{\beta(t+s)}^{\alpha(t-1)} U_{\beta_{t+s+1}}^{\alpha_t} + \frac{* \partial}{\partial u^{\beta_{t+s+1}}} A_{\beta(t+s)}^{\alpha(t)} = \\ &= \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1! \dots v_{t-1}! w_1! \dots w_{s+2}!} U_{(\beta(v_1))}^{\alpha_1} U_{\beta(v_2)}^{\alpha_2} \dots U_{\beta(v_{t-1})}^{\alpha_{t-1}} U_{\beta_{t+s+1}}^{\alpha_t} + \\ &+ \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1! \dots v_t! w_1! \dots w_{s+1}!} \{ U_{(\beta(v_1+1))}^{\alpha_1} U_{\beta(v_2)}^{\alpha_2} \dots U_{\beta(v_t)}^{\alpha_t} + \dots \\ &\quad \dots + U_{(\beta(v_1))}^{\alpha_1} U_{\beta(v_2)}^{\alpha_2} \dots U_{\beta(v_{t-1})}^{\alpha_{t-1}} U_{\beta(v_t+1)}^{\alpha_t} \}. \end{aligned}$$

⁵⁾ Siehe [9], S. 68—70.

Setzen wir w_1 anstatt $w_1 + 1$ und $v_t = 1$, dann wird das erste Glied in der rechten Seite von (1.7) in die folgende Form umgeschrieben:

$$(1.8) \quad \sum_{(v)} \frac{(t+s)! w_1}{v_1! \dots v_t! w_1! \dots w_{s+2}!} U_{(\beta(v_1))}^{(\alpha_1)} \dots U_{\beta(v_t)}^{(\alpha_t)} \quad \text{für } w_1 \geq 1.$$

Das zweite Glied läßt sich folgendermaßen umformen:

$$(1.9) \quad (t+s)! \sum_{(v)} \left\{ \frac{(v_1+1)(w_{v_1+1}+1)(w_{v_1})^{-1}}{(v_1+1)! \dots v_t! w_1! \dots (w_{v_1}-1)!(w_{v_1+1}+1)! \dots w_{s+1}!} \cdot U_{(\beta(v_1+1))}^{(\alpha_1)} \dots U_{\beta(v_t)}^{(\alpha_t)} + \dots \right\}.$$

In den Klammern des letzten Ausdrucks ergibt sich w_{v_1} -mal dasselbe Glied wie das erste Glied und ihre Summe verwandelt sich in

$$\frac{v_1 w_{v_1}}{v_1! \dots v_t! w_1! \dots w_{s+1}! w_{s+2}!} U_{(\beta(v_1))}^{(\alpha_1)} \dots U_{\beta(v_t)}^{(\alpha_t)} \quad \text{für } v_1 \geq 2,$$

wenn wir v_1 bzw. w_{v_1} anstatt $v_1 + 1$ bzw. $w_{v_1+1} + 1$ und $w_{s+1} = 1$ setzen. Wiederholen wir dasselbe Verfahren für andere Glieder in den Klammern, dann sehen wir daß das zweite Glied (1.9) in die folgende Form geschrieben werden soll:

$$(1.10) \quad (t+s)! \sum_{(v)} \frac{v_1 w_{v_1} + v_2 w_{v_2} + \dots}{v_1! \dots v_t! w_1! \dots w_{s+2}!} U_{(\beta(v_1))}^{(\alpha_1)} \dots U_{\beta(v_t)}^{(\alpha_t)}$$

für alle voneinander verschiedenen $v_1, v_2, \dots \geq 2$. Wegen

$$v_1 w_{v_1} + v_2 w_{v_2} + \dots = 2w_2 + 3w_3 + \dots + (s+2)w_{s+2}$$

und

$$w_1 + 2w_2 + \dots + (s+2)w_{s+2} = t+s+1,$$

muss die rechte Seite von (1.7) wegen (1.8) und (1.10) durch die rechte Seite von (1.9) ausgedrückt werden, wobei $s+1$ anstatt s steht. Daraus erkennen wir die Richtigkeit der Behauptung des Satzes durch Induktion bezüglich s .

Zusatz. Wenn $\sum_{(v)}'$ Summierung über alle voneinander verschiedene solche Systeme von t geordneten positiven ganzen Zahlen $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ bedeutet, für die $v_1 + v_2 + \dots + v_t = t+s$ sein soll, dann ist

$$A_{\beta(t+s)}^{(\alpha(t))} = \sum_{(v)}' \frac{(t+s)!}{t! v_1! v_2! \dots v_t!} U_{(\beta(v_1))}^{(\alpha_1)} U_{\beta(v_2)}^{(\alpha_2)} \dots U_{\beta(v_t)}^{(\alpha_t)}.$$

Satz 1.2 (HOMBU—SUGURI). Setzt man $A_{\beta(r)}^{(\alpha(o))} = 0$ für $r \geq 1$, $A_{\beta(o)}^{(\alpha(o))} = 1$ und $A_{\beta(r)}^{(\alpha(s))} = 0$ für $r < 0$, dann besteht die Beziehung

$$(1.11) \quad \frac{\partial}{\partial U_{\beta'(t)}^{(\alpha')}} A_{\beta(r)}^{(\alpha(s))} = \binom{r}{t} \delta_{\alpha'}^{(\alpha_1)} A_{(\beta(r-t))}^{(\alpha(s-1))} \delta_{\beta(t)}^{(\beta'(t))}.$$

BEWEIS. Aus (1.6) erhalten wir durch Differenzierung nach $U_{\beta'(t)}^{\alpha'}$

$$\frac{\partial}{\partial U_{\beta'(t)}^{\alpha'}} A_{\beta(r)}^{\alpha(s)} = \binom{r}{t} \sum_{(v)} \frac{(r-t)!}{v_1! \dots v_{s-1}! w_1! \dots w_{t-1}! (w_t-1)! w_{t+1}! \dots w_{r-s-t+2}!} \cdot U_{\beta(r)}^{\alpha_1} \dots U_{\beta(v_{s-1})}^{\alpha_{s-1}} \delta_{\beta(t)}^{[\beta'(t)]} \delta_{\alpha'}^{\alpha_s} = \binom{r}{t} \delta_{\alpha'}^{\alpha_1} A_{\beta(r-t)}^{\alpha(s-1)} \delta_{\beta(t)}^{\beta'(t)}.$$

Zusatz. Es besteht immer

$$(1.12) \quad A_{\beta(r+1)}^{\alpha(s)} = \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{t} A_{\beta(r-t)}^{\alpha(s-1)} U_{\beta(t+1)}^{\alpha_s}.$$

(1.12) folgt aus

$$A_{\beta(r+1)}^{\alpha(s)} = A_{\beta(r)}^{\alpha(s-1)} U_{\beta_{r+1}}^{\alpha_s} + U_{\beta'(t)\beta_{r+1}}^{\alpha'} \frac{\partial A_{\beta(r)}^{\alpha(s)}}{\partial U_{\beta'(t)}^{\alpha'}}$$

und Satz 1.2.

Satz 1.3. Die Beziehung

$$(1.13) \quad \binom{s}{l} A_{\beta(r)}^{\alpha(l)\alpha'(s-l)} = \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r-l-t)}^{\alpha'(s-l)}$$

besteht für $r \geq s \geq l \geq 1$.

BEWEIS. Für $r=s$ und $r=s+1$, ist die Behauptung nach (1.5) offenbar richtig. Vorausgesetzt, daß (1.13) für irgendeinen festen Wert von r und l richtig ist, folgt wegen (1.5)

$$\begin{aligned} \binom{s}{l} A_{\beta(r+1)}^{\alpha(l)\alpha'(s-l)} &= \binom{s}{l} \{ A_{\beta(r)}^{\alpha(l-1)\alpha'(s-l)} A_{\beta_{r+1}}^{\alpha_l} + A_{\beta(r)/\beta_{r+1}}^{\alpha(l)\alpha'(s-l)} \} = \\ &= \left\{ \binom{s-1}{l-1} + \binom{s-1}{l} \right\} A_{\beta(r)}^{\alpha(l-1)\alpha'(s-l)} U_{\beta_{r+1}}^{\alpha_l} + \\ &+ \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} \{ A_{\beta(l+t)/\beta_{r+1}}^{\alpha(l)} A_{\beta(r-l-t)}^{\alpha'(s-l)} + A_{\beta(l+1)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r-l-t)/\beta_{r+1}}^{\alpha'(s-l)} \} = \\ &= \sum_{t=0}^{r-s+1} \left\{ \binom{r}{l-1+t} A_{\beta(l-1+t)}^{\alpha(l-1)} U_{\beta_{r+1}}^{\alpha_l} A_{\beta(r-l-t+1)}^{\alpha'(s-l)} + \binom{r}{l+t} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r-l-t)}^{\alpha'(s-l)} U_{\beta_{r+1}}^{\alpha_{s-l}} \right\} + \\ &+ \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{l+t-1} A_{\beta(l+t-1)/\beta_{r+1}}^{\alpha(l)} A_{\beta(r+1-l-t)}^{\alpha'(s-l)} + \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r-l-t)/\beta_{r+1}}^{\alpha'(s-l)} = \\ &= \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{l+t-1} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r+1-l-t)}^{\alpha'(s-l)} + \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{l+t} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r+1-l-t)}^{\alpha'(s-l)} = \\ &= \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r+1}{l+t} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r+1-l-t)}^{\alpha'(s-l)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung nach Induktion.

Durch Setzen von 1 bzw. $r+1$ an Stelle von l bzw. r in (1.13), erhalten wir den

Zusatz 1. Für $r+1 \geq s \geq 1$ besteht die Beziehung

$$(1.14) \quad A_{\beta(r+1)}^{\alpha(s)} = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^{r-s+1} \binom{r+1}{t+1} A_{\beta(r-t)}^{\alpha(s-1)} U_{\beta(t+1)}^{\alpha(s)}.$$

Vergleichung von (1.12) und (1.14) gibt uns

Zusatz 2. Wenn $r+1 \geq s \geq 1$ ist, so ergibt sich die Identität

$$(1.15) \quad \sum_{t=0}^{r-s+1} \left\{ \frac{1}{s} \binom{r+1}{t+1} - \binom{r}{t} \right\} A_{\beta(r-t)}^{\alpha(s-1)} U_{\beta(t+1)}^{\alpha(s)} \equiv 0.$$

3. Wir betrachten zwei nacheinander durchgeführten Parametertransformationen: $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$, $u^\gamma = u^\gamma(u^\beta)$, und $u^\gamma = u^\gamma(u^\beta(u^\alpha)) = u^\gamma(u^\alpha)$ sei ihre Produkttransformation. Dann ergibt sich die entsprechende Transformation von der Gestalt (1.4):

$$(1.16) \quad f_{\beta(r)} = \sum_{s=1}^r A_{\beta(r)}^{\alpha(s)} f_{\alpha(s)}, \quad f_{\gamma(t)} = \sum_{r=1}^t A_{\gamma(t)}^{\beta(r)} f_{\beta(r)}$$

und $f_{\gamma(t)} = \sum_{s=1}^t A_{\gamma(t)}^{\alpha(s)} f_{\alpha(s)}.$

Hiernach gilt die Beziehung

$$(1.17) \quad A_{\gamma(t)}^{\alpha(s)} = \sum_{r=s}^t A_{\gamma(t)}^{\beta(r)} A_{\beta(r)}^{\alpha(s)}.$$

Andererseits muß die Ableitung $U_{\gamma(t)}^\alpha$ bekanntlich durch die Ableitungen $U_{\gamma(t)}^\beta$, $U_{\beta(s)}^\alpha$ ausgedrückt werden können, d. h.

$$(1.18) \quad U_{\gamma(t)}^\alpha = \sum_{s=1}^r U_{\beta(s)}^\alpha A_{\gamma(t)}^{\beta(s)}.$$

Dabei bestehen die $A_{\gamma(t)}^{\beta(s)}$ aus den $U_{\gamma(t)}^\beta$, wie wir schon gesagt haben. Setzt man die rechte Seite von (1.18) an Stelle von $U_{\gamma(t)}^\alpha$ in der linken Seite von (1.17) ein, dann soll die Gleichung (1.17) identisch gelten. Da wir den $U_{\gamma(t)}^\beta$, $U_{\beta(r)}^\alpha$ beliebige Werte geben können, muß die Produkttransformation der ersten zwei Transformationen von (1.16) für beliebige bestimmte Werte von $p_{\gamma(t)}^\beta$, $p_{\beta(r)}^\alpha$ auch eine Transformation von der Gestalt (1.4) sein, deren Koeffizienten die Funktionswerte $A_{\gamma(t)}^{\alpha(s)}$ für die durch (1.6) gegebenen festen Werte $U_{\gamma(t)}^\alpha$ sind.

Im speziellen Fall $u^\gamma(u^\alpha) = \delta_\alpha^\gamma u^\alpha$ reduziert sich die Beziehung (1.17) zu

$$(1.19) \quad \delta_{\gamma(t)}^{\alpha(s)} = \sum_{r=s}^t A_{\gamma(t)}^{\beta(r)} A_{\beta(r)}^{\alpha(s)},$$

dies zeigt daß die ersten zwei Transformationen von (1.16) zueinander invers sind. Diese Tatsachen zusammenfassend erhält man den

Satz 1.4. Die Transformationen von der Gestalt (1.4) bilden eine H -gliedrige Gruppe G_H , wenn wir die Werte von u^α festhalten, und die diesen Werten entsprechenden Werte der $U_{\beta(r)}^\alpha$ über alle reellen Werte laufen, wobei $H = K \left\{ \binom{K+M}{M} - 1 \right\}$ ist.

Die Gruppe G_H nennen wir die erweiterte K -Parametergruppe, oder kürzlich P_K -Gruppe, am P -Punkt u^α , und die Transformation der Gruppe G_H die erweiterte K -Parametertransformation oder P_K -Transformation am P -Punkt u^α .

4. Ziehen wir $\binom{K+M}{M} - 1$ Funktionen $P_\alpha, P_{\alpha(2)}, \dots, P_{\alpha(M)}$ der Parametern u^α in Betracht, die sich bei jeder Parametertransformation genau so wie $f_{\alpha(s)}$ nach der Regel

$$(1.20) \quad P_{\beta(r)} = \sum_{s=1}^r A_{\beta(r)}^{\alpha(s)} P_{\alpha(s)}$$

verhalten, dann wollen wir den Inbegriff von diesen $\binom{K+M}{M} - 1$ Werten $P_{\alpha(r)}$ für irgendein Wertesystem von u^α einen kovarianten P_K -Vektor vom Grad M nennen. Unter einem kontravarianten P_K -Vektor vom Grad M verstehen wir dagegen den Inbegriff von $\binom{K+M}{M} - 1$ Werten $P^{\alpha(r)}$, die jede P_K -Transformation auf

$$(1.21) \quad P^{\beta(r)} = \sum_{s=1}^r A_{\alpha(s)}^{\beta(r)} P^{\alpha(s)}$$

überführt, wobei $A_{\alpha(s)}^{\beta(r)}$ die Koeffizienten der inversen Transformation von (1.21) sind, d. h. diejenigen, die durch die Beziehung

$$\sum_{r=1}^s A_{\beta(s)}^{\alpha(r)} A_{\alpha(r)}^{\beta'(t)} = \delta_{\beta(s)}^{\beta'(t)}$$

bestimmt werden sollen.

BEMERKUNG. Die in [3] erklärte Definition für einen kontra- bzw. kovarianten P -Vektor steht im Gegensatz zu dieser Definition, somit muß „kontra- bzw. kovariant“ in [3] als „ko- bzw. kontravariant“ gelesen werden.

Ein Beispiel des ko- bzw. kontravarianten P_K -Vektors ist das Flächenelement $p_{\alpha(r)}^i$ bzw. $F_{;i}^{\alpha(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, M$).

Vom Begriff des P_K -Vektors aus können wir die Theorie von P_K -Tensoren auf analoge Weise wie in der gewöhnlichen Tensoranalysis bekommen.

Ferner verstehen wir unter einer kontra- bzw. kovarianten P_K -Vektordichte vom Gewichte $\mathfrak{f}$ den Inbegriff von Werten von $T^{\alpha(r)}$ bzw. $T_{\alpha(r)}$, die sich unter einer Parametertransformation nach der Regel verhalten:

$$(1.22) \quad T^{\beta(s)} = U^t \sum_{r=1}^s A_{\alpha(r)}^{\beta(s)} T^{\alpha(r)} \quad \text{bzw.} \quad T_{\beta(s)} U^t \sum_{r=1}^s A_{\beta(s)}^{\alpha(r)} T_{\alpha(r)},$$

wobei U die Determinante $|U_{\alpha}^{\beta}|$ bezeichnet. Eine P_K -Skalardichte oder P_K -Tensordichte kann auf analoge Weise definiert werden wie in der gewöhnlichen Tensoranalysis.

5. Mittels der Beziehung (1.13) erhält man den

Satz 1.5. *Es sei $T^{\alpha(r)}$ bzw. $T_{\alpha(r)}$ eine kontra- bzw. kovariante P_K -Vektordichte vom Grad M und Gewicht $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}'$, dann ist*

$$(1.23) \quad D^{\alpha(t)}(T, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=t}^M \binom{r}{t} T^{\alpha(t)\alpha(r-t)} P_{\alpha(r-t)} \quad 1 \leq t \leq M-1$$

eine kontravariante P_K -Vektordichte vom Grad $M-1$ und Gewicht $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}'$.

BEWEIS. Unter einer Parametertransformation ersehen wir

$$\begin{aligned} D^{\beta(t)}(T, P) &= \sum_{r=t}^M \binom{r}{t} \sum_{s=1}^r A_{\alpha(s)}^{\beta(t)\beta(r-t)} T^{\alpha(s)} \sum_{u=1}^{r-t} A_{\beta(r-t)}^{\alpha'(u)} P_{\alpha'(u)} = \\ &= \sum_{r=t+1}^M \sum_{s=t}^r \sum_{v=0}^{s-r} \binom{s}{t+v} A_{(\alpha(t+v)}^{\beta(t)} A_{\alpha(s-t-v)}^{\beta(r-t)} \sum_{u=1}^{r-t} A_{\beta(r-t)}^{\alpha'(u)} T^{\alpha(s)} P_{\alpha'(u)} = \\ &= \sum_{s=t+1}^M \sum_{v=0}^{s-t-1} \sum_{u=1}^{t-1} \binom{s}{t+v} A_{(\alpha(t+v)}^{\beta(t)} \sum_{r=t-v}^{s-v} A_{\alpha(s-t-v)}^{\beta(r-t)} A_{\beta(r-t)}^{\alpha'(u)} T^{\alpha(s)} P_{\alpha'(u)} = \\ &= \sum_{s=t+1}^M \sum_{v=0}^{s-t-1} \binom{s}{t+v} A_{(\alpha(t+v)}^{\beta(t)} T^{\alpha(s)} P_{\alpha(s-t-v)} = \\ &= \sum_{v=0}^{M-t-1} A_{(\alpha(t+v)}^{\beta(t)} \left\{ \sum_{s=t+v+1}^M \binom{s}{t+v} T^{\alpha(t+v)\alpha(s-t-v)} P_{\alpha(s-t-v)} \right\} \quad \text{B. z. w. z.} \end{aligned}$$

Da die kontravariante P_K -Vektordichte $T^{\alpha(r)}$ in Satz 1.5 beliebig gewählt werden kann, lautet der

Satz 1.6. *$T^{\alpha(t)}$ sei eine kontravariante P_K -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{f}$, dann ist*

$$(1.24) \quad T^{\alpha(r), \alpha'(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{r+s}{r} T^{\alpha(r)\alpha'(s)}$$

eine kontravariante P_K -Tensordichte zweiter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{f}$, die vom Grad M' bzw. M'' in bezug auf die Indizes $\alpha(r)$ bzw. $\alpha'(s)$ ist, wobei die

ganzen Zahlen M' und M'' ausser der Beschränkung

$$1 \leq M' + M'' \leq M$$

beliebig gewählt werden können.

Zusatz. Wenn $T^{\alpha(r)}$ eine kontravariante P_K -Vektordichte vom Grad M und Gewicht $\mathfrak{f}$ ist, dann ist

$$D^{i, \alpha(t)}(T, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{M-t} \binom{t+s}{s} T^{\alpha(t)\alpha(s)} p_{\alpha(s)}^i$$

eine kontravariante P_K -Vektordichte vom Grad $M-1$ und Gewicht $\mathfrak{f}$.

(1.23) kann in die Gestalt

$$D^{\alpha(t)}(T, P) = \sum_{r=t+1}^M \binom{r}{t} T^{\alpha'(r)} P_{(\alpha'(r-t))} \delta_{\alpha'(t)}^{\alpha(t)}$$

geschrieben werden und $T^{\alpha(r)}$ darf eine beliebige Vektordichte sein, somit ergibt sich der

Satz 1.7. $P_{\alpha(r-t)}$ sei eine kovariante P_K -Vektordichte vom Grad M und Gewicht $\mathfrak{f}$, dann ist

$$(1.25) \quad P_{\alpha'(r)}^{\alpha(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{r}{t} P_{(\alpha'(r-t))} \delta_{\alpha'(t)}^{\alpha(t)}$$

eine gemischte P_K -Tensordichte zweiter Stufe vom Gewicht $\mathfrak{f}$, die vom Grad M' bzw. M'' in bezug auf den kontra- bzw. kovarianten Index $\alpha(t)$ bzw. $\alpha'(r)$ ist, wobei die ganzen Zahlen M' und M'' außer der Beschränkung

$$1 \leq M'' - M' \leq M$$

beliebig gewählt werden können.

Aus dem letzten Satz folgt ohne weiteres der

Satz 1.8. $P_{\alpha(t)}$ bzw. $Q_{\alpha(t)}$ sei je eine kovariante P_K -Vektordichte vom Grad M bzw. M' und Gewichte $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}'$, dann ist

$$(1.26) \quad D_{\alpha(r)}(P, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{M'} \binom{r}{s} P_{(\alpha(r-s))} Q_{\alpha(s)} \quad \text{für } M' < r \leq M + M'$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} P_{(\alpha(r-s))} Q_{\alpha(s)} \quad \text{für } 1 \leq r \leq M'$$

eine kovariante P_K -Vektordichte vom Grad $M + M'$ und Gewichte $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}'$.

Zusatz. Wenn $P_{\alpha(r)}$ eine kovariante P_K -Vektordichte vom Grad M und Gewichte $\mathfrak{f}$ ist, dann ist

$$D_{\alpha(t)}^i(P, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{t-1} \binom{t}{s} P_{(\alpha(t-1))} p_{\alpha(s)}^i$$

eine kovariante P_K -Vektordichte vom Grad $M+M'$ und Gewichte $\mathfrak{f}$, wobei M' das Grad des Flächenelementes $p_{\alpha(s)}^i$ bedeutet.

Die Sätze 1.5—8 können noch weiter verallgemeinert werden. Nämlich kann man aus einer kontra- bzw. kovarianten P_K -Vektordichte $T^{\alpha(r)}$ bzw. $P_{\alpha(r)}$ eine kontravariante bzw. gemischte P_K -Tensordichte L - bzw. $(L+1)$ -ter Stufe

$$T^{\alpha(r_1), \alpha(r_2), \dots, \alpha(r_L)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\Sigma r)!}{r_1! r_2! \dots r_L!} T^{\alpha(r_1) \alpha(r_2) \dots \alpha(r_L)}$$

bzw.

$$P_{\alpha(t)}^{\alpha'(r_1), \alpha'(r_2), \dots, \alpha'(r_L)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t!}{r_1! r_2! \dots r_L! (t - \Sigma r)!} P_{(\alpha(t - \Sigma r))} \delta_{\alpha(r_1)}^{\alpha'(r_1)} \delta_{\alpha(r_2)}^{\alpha'(r_2)} \dots \delta_{\alpha(r_L)}^{\alpha'(r_L)}$$

ableiten, wobei $\Sigma r = r_1 + r_2 + \dots + r_L$ und $t > \Sigma r$ ist, und auch eine kontra- bzw. kovariante P_K -Vektordichte

$$D^{\alpha(t)}(T, P, P, \dots, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r_1, \dots, r_L} T^{\alpha(t), \alpha(r_1), \dots, \alpha(r_L)} P_{\alpha(r_1)} P_{\alpha(r_2)} \dots P_{\alpha(r_L)}$$

bzw.

$$D_{\alpha(t)}(P, P, P, \dots, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r_1, \dots, r_L} P_{\alpha(t)}^{\alpha(r_1), \dots, \alpha(r_L)} P_{\alpha(r_1)} P_{\alpha(r_2)} \dots P_{\alpha(r_L)},$$

die von der Reihenfolge der beliebig vorgegebenen P_K -Vektordichten $P_{\alpha(r_1)}, P_{\alpha(r_2)}, \dots, P_{\alpha(r_L)}$ ganz unabhängig bestimmt ist.⁶⁾

Aber wir möchten hier nicht auf die Einzelheiten über diese Tatsachen weiter eingehen, sondern diese in einer anderer Arbeit vorstellen.

§ 2. Erweiterte Rheonomtransformationen.

6. Außer der Parametertransformation $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$ in P_K , ziehen wir eine Koordinatentransformation $x^\alpha = x^\alpha(x^i, u^\alpha)$ in der Mannigfaltigkeit X_N in Betracht, die vom Punkt u^α in P_K abhängig sein mag. Weiter setzen wir voraus, daß die Determinante $|\partial x^\alpha / \partial x^i|$ im betreffenden Bereich von Null verschieden ist. Dann kommt eine Transformation der Form

$$(2.1) \quad x^\alpha = x^\alpha(x^i, u^\alpha), \quad u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$$

in der Produktmannigfaltigkeit $X_N \times P_K$ vor. Diese Transformation heißt eine K -fach verallgemeinerte Rheonomtransformation oder kurz R_K -Transformation aus dem Grunde daß, wenn $K=1$ ist und die einzige Veränderliche u als Zeitsveränderliche aufgefaßt wird, so ist $x^\alpha = x^\alpha(x^i, t)$ nichts anderes als eine Rheonomtransformation.

⁶⁾ Vergleichen mit den Sätzen 19—24 in [4].

Eine R_K -Transformation gibt Anlaß zu der folgenden erweiterten Transformation für ein Flächenelement M -ter Ordnung auf einer K -dimensionalen Fläche $x^i = x^i(u^\alpha)$:

$$(2.2) \quad \begin{cases} u^\beta = u^\beta(u^\alpha), & x^i = x^i(x^j, u^\alpha), & p_\beta^\alpha = \{X_i^\alpha p_\alpha^i + X_\alpha^\alpha\} U_\beta^\alpha, \dots, \\ p_{\beta(M)}^\alpha = p_{\alpha(M)}^i X_i^\alpha U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots U_{\beta_M}^{\alpha_M} + R_{\beta(M)}^\alpha(u^\alpha, x^i, p_\alpha^i, \dots, p_{\alpha(M-1)}^i), \end{cases}$$

wobei

$$X_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}, \quad X_\alpha^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\alpha}, \quad U_\beta^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta}$$

sind, und die Funktionen $R_{\beta(M)}^\alpha$ Polynome von $p_\alpha^i, p_{\alpha(2)}^i, \dots, p_{\alpha(M-1)}^i$ und von $U_\beta^\alpha, U_{\beta(2)}^\alpha, \dots, U_{\beta(M)}^\alpha$ sind. Die Transformation (2.2) nennen wir die erweiterte R_K -Transformation, die einen P_K -Expunkt $(u^\alpha, x^i, p_\alpha^i, \dots, p_{\alpha(M)}^i)$ zu einem P_K -Expunkt $(u^\beta, x^\alpha, p_\beta^\alpha, \dots, p_{\beta(M)}^\alpha)$ überträgt, wenn $u^\alpha, x^i, p_\alpha^i, \dots, p_{\alpha(M)}^i$ voneinander unabhängig sind, d. h. ein beliebiges Element in der Mannigfaltigkeit $M_{(N, M, K)}$ wählbar ist.

7. Vor allem sollen wir die Form der Funktionen $R_{\alpha(M)}^\alpha$ eingehend diskutieren. Als Vorbereitung dafür setzen wir $p_{\alpha(r)}^i$ anstatt von $U_{\beta(r)}^\alpha$ in (1.6), dann ergibt sich der Ausdruck

$$(2.3) \quad P_{\alpha(t+s)}^{i(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(c)} \frac{(t+s)!}{r_1! r_2! \dots r_t! w_1! w_2! \dots w_{s+1}!} p_{\alpha(r_1)}^{i_1} p_{\alpha(r_2)}^{i_2} \dots p_{\alpha(r_s)}^{i_s},$$

welcher nur von den $p_{\alpha(r)}^i$ besteht. Da diese $p_{\alpha(r)}^{i(t)}$ von derselben Gestalt wie die $A_{\beta(r)}^{\alpha(t)}$ sind, müssen sie bekanntlich dieselbe Eigenschaften wie die $A_{\beta(r)}^{\alpha(t)}$ haben. Daraus können wir die folgenden Sätze leicht entnehmen.

Satz 2.1. Die $P_{\alpha(r)}^{i(t)}$ erfüllen die Beziehungen

$$(2.4) \quad \begin{cases} P_{\alpha(r)}^i = p_{\alpha(r)}^i, & P_{\alpha(r)}^{i(s)} = P_{\alpha(r-1)}^{i(s-1)} p_{\alpha(r)}^{i_s} + \frac{\partial}{\partial u^{\alpha_r}} P_{\alpha(r-1)}^{i(s)}, \quad \text{für } 1 < s < r \\ P_{\alpha(r)}^{i(r)} = p_{\alpha_1}^{i_1} p_{\alpha_2}^{i_2} \dots p_{\alpha_r}^{i_r}. \end{cases}$$

Satz 2.2. Es gilt die Beziehung

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial p_{\alpha'(t)}^j} P_{\alpha(r)}^{i(s)} = \binom{r}{t} \delta_j^{(i_1)} P_{\alpha(r-t)}^{i(s-1)} \delta_{\alpha'(t)}^{\alpha_r(i)},$$

wobei $P_{\alpha(r)}^{i(0)} = 0$ für $r \geq 1$, $P_{\alpha(0)}^{i(0)} = 1$ und $P_{\alpha(r)}^{i(s)} = 0$ für $r < 0$.

Zusatz. Die $P_{\alpha(r+1)}^{i(s)}$ kann in die folgende Gestalt umgeschrieben werden:

$$(2.6) \quad P_{\alpha(r+1)}^{i(s)} = \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{t} P_{\alpha(r-t)}^{i(s-1)} p_{\alpha(t+1)}^{i_s}.$$

Satz 2.3. Für eine ganze Zahl l ergibt sich die Beziehung

$$(2.7) \quad \binom{s}{l} P_{\alpha(r)}^{i(s)} = \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} P_{\alpha(l+t)}^{i(l)} P_{\alpha(r-l-t)}^{i(s-l)}, \quad r \geq s \geq l \geq 1.$$

Zusatz 1. Für $r+1 \geq s \geq 1$ besteht die Beziehung

$$(2.8) \quad P_{\alpha(r+1)}^{i(s)} = \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r+1}{t+1} P_{\alpha(r+t)}^{i(s-1)} P_{\alpha(t+1)}^{i_s}.$$

Zusatz 2. Wenn $r+1 \geq s \geq 1$ ist, so ergibt sich die Identität

$$(2.9) \quad \sum_{t=0}^{r-s+1} \left\{ \frac{1}{s} \binom{r+1}{t+1} - \binom{r}{t} \right\} P_{\alpha(r-t)}^{i(s-1)} P_{\alpha(t+1)}^{i_s} \equiv 0.$$

8. Denken wir uns eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $f(x^i, u^\alpha)$ der x^i und der u^α , und führen wir die folgende Bezeichnung für ihre Ableitungen ein:

$$(2.10) \quad f_{, i(t)\alpha(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{t+s} f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_t} \partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \dots \partial u^{\alpha_s}},$$

dann folgt

Satz 2.4. $f(x^i, u^\alpha)$ sei eine hinreichend oft differenzierbare Funktion der x^i und der u^α , dann ergibt sich

$$(2.11) \quad f_{\alpha(r)} = \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{s} f_{, i(t)\alpha(s)} P_{\alpha(r-s)}^{i(t)}.$$

BEWEIS. Wir wollen den Satz durch Induktion bezüglich r beweisen. (2.11) ist offenbar richtig für $r=1$, wie wir leicht ersehen können. Unter der Voraussetzung daß (2.11) für eine feste ganze Zahl r richtig ist, bekommen wir aus (2.11) durch nochmalige Differenzierung nach α_{r+1}

$$\begin{aligned} f_{\alpha(r+1)} = & \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{s} \{ f_{, i(t)\alpha(s)} P_{\alpha(r-s)}^{i(t)} p_{\alpha_{r+1}}^{i_{t+1}} + f_{, i(t)\alpha(s)} P_{\alpha(r-s)}^{i(t)} \alpha_{r+1} + \\ & + f_{, i(t)\alpha(s+1)} P_{\alpha(r-s)}^{i(t)} \}. \end{aligned}$$

Setzen wir $t-1$ an Stelle von t in dem ersten Glied und $s-1$ an Stelle von s in dem dritten in den geschweiften Klammern, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.6)

$$\begin{aligned} f_{\alpha(r+1)} = & \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{s} f_{, i(t)\alpha(s)} P_{\alpha(r-s+1)}^{i(t)} + \sum_{s=1}^{r+1} \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{s-1} f_{, i(t)\alpha(s)} P_{\alpha(r-s+1)}^{i(t)} = \\ = & \sum_{s=0}^{r+1} \sum_{t=0}^{r+1-s} \binom{r+1}{s} f_{, i(t)\alpha(s)} P_{\alpha(r-s+1)}^{i(t)}. \quad \text{B. z. w. z.} \end{aligned}$$

Durch eine Parametertransformation $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$ erhalten wir wegen (1.4) und Satz 2.4

$$(2.12) \quad f_{\beta(s)} = \sum_{u=1}^r \sum_{s=0}^u \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} f_{i(t)(\alpha(s))} P_{\alpha(r-s)}^{i(t)} A_{\beta(r)}^{\alpha(s)}.$$

Setzen wir die Funktionen $x^a(x^i, u^\alpha)$ an Stelle von f , so folgt daraus unmittelbar die gesuchte Gestalt der transformierten $p_{\beta(r)}^a$:

Satz 2.5. *Unter einer R_K -Transformation verändert sich ein Flächenelement M -ter Ordnung auf einer K -dimensionalen Fläche nach der Regel:*

$$(2.13) \quad p_{\beta(r)}^a = \sum_{u=1}^r \sum_{s=0}^u \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} X_{i(t)(\alpha(s))}^a P_{\alpha(u-s)}^{i(t)} A_{\beta(r)}^{\alpha(s)},$$

wobei

$$X_{i(t)(\alpha(s))}^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{t+s} x^a}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_t} \partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_s}}$$

ist.

Satz 2.5 ist sehr wichtig, denn durch diesen Satz wird die Transformationsweise eines Flächenelementes M -ter Ordnung unter einer R_K -Transformation vollständig dargestellt und alle Ergebnisse über R_K -Transformationen können aus dem Satz abgeleitet werden, wie man im Folgenden sehen kann.

Unter Berücksichtigung von (1.13), erhalten wir aus Satz 2.5 ohne weiteres den

Zusatz 1. (2.13) kann in der folgenden Gestalt dargestellt werden:

$$p_{\beta(r)}^a = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} X_{i(t), (\beta(s))}^a P_{\beta(r-s)}^{i(t)},$$

wobei

$$X_{i(t), (\beta(s))}^a = \sum_{u=1}^s X_{i(t)(\alpha(u))}^a A_{\beta(s)}^{\alpha(u)}, \quad P_{\beta(r-s)}^{i(t)} = \sum_{u=s+1}^r P_{\alpha(u-s)}^{i(t)} A_{\beta(r-s)}^{\alpha(u-s)}$$

ist.

Zusatz 2. Eine verallgemeinerte Skleronomtransformation: $x^a = x^a(x^i)$, $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$ trägt $p_{\alpha(r)}^i$ in $p_{\beta(r)}^a$ folgendermaßen über:

$$(2.13)_{\text{bis}} \quad p_{\beta(r)}^a = \sum_{u=1}^r \sum_{t=1}^u X_{i(t)}^a P_{\alpha(u)}^{i(t)} A_{\beta(r)}^{\alpha(u)}.$$

Mit Hilfe von (2.5) geht aus Satz 2.5 folgender Satz hervor:

Satz 2.6. Für eine R_K -Transformation besteht für $r \geq v \geq 1$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial p_{\alpha'(r)}^{j'}} &= \sum_{v=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} \sum_{u=v}^r \left\{ \sum_{s=0}^{u-v} \sum_{t=1}^{u-s} \binom{u-v}{s} X_{j, i(t-1)(\alpha(s))}^a P_{\alpha(u-v-s)}^{i(t-1)} \right\} A_{(\beta(r-v-w))}^{\alpha(u-v)} A_{\beta(r+w)}^{\alpha'(r)} = \\ &= \sum_{v=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X_{j, (\beta(r-v-w))}^a A_{\beta(r+w)}^{\alpha'(r)}, \end{aligned}$$

falls wir

$$\sum_{u=0}^r X_{j, \alpha(u-v)}^\alpha A_{\beta(r-v-u)}^{\alpha(u-v)} = X_{j, \beta(r-v-u)}^\alpha$$

setzen.

BEWEIS. Differenzieren wir (2.13) nach $p_{\alpha'(v)}^j$ so folgt wegen (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\beta(r)}^\alpha}{\partial p_{\alpha'(v)}^j} &= \sum_{u=1}^r \sum_{s=0}^u \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} X_{j, i(t)\alpha(s)}^\alpha \binom{u-s}{t} P_{\alpha(u-s-v)}^{i(t-1)} \delta_{|j|}^{i(t)} \delta_{\alpha(v)}^{\alpha'(v)} A_{\beta(r)}^{\alpha(u)} = \\ &= \sum_{u=r}^r \sum_{s=0}^{u-v} \sum_{t=1}^{u-s} \binom{u}{s} \binom{u-v}{s} X_{j, i(t-1)\alpha(s)}^\alpha P_{\alpha(u-s-v)}^{i(t-1)} A_{\beta(r)}^{\alpha(u-v)\alpha'(v)}, \end{aligned}$$

benützen wir (1.13) und vertauschen wir dann den Summationszeichen in geeigneter Weise, so folgt

$$= \sum_{u=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} \sum_{u=v}^r \sum_{s=0}^{u-v} \sum_{t=1}^{u-s} \binom{u-v}{s} X_{j, i(t-1)\alpha(s)}^\alpha P_{\alpha(u-v-s)}^{i(t-1)} A_{\beta(v+w)}^{\alpha'(v)} A_{\beta(r-v-u)}^{\alpha(u-v)},$$

daraus folgt (2.14) wegen (2.11).

Zusatz 1. (SUGURI.⁷⁾) Wenn die Parameter unverändert bleiben, so ist

$$(2.14)_1 \quad \frac{\partial p_{\alpha(r)}^\alpha}{\partial p_{\alpha'(v)}^j} = \binom{r}{v} X_{j, i(v)\alpha(r-v)}^\alpha \delta_{\alpha(v)}^{\alpha'(v)} \quad \text{für } r \geq v.$$

Denn es ist $A_{\alpha(v+w)}^{\alpha'(v)} = 0$ für $w \geq 1$ und $A_{\alpha(v)}^{\alpha'(v)} = \delta_{\alpha(v)}^{\alpha'(v)}$.

Zusatz 2. Unter eine Skleronomtransformation ist

$$\begin{aligned} (2.14)_2 \quad \frac{\partial p_{\beta(r)}^\alpha}{\partial p_{\alpha'(v)}^j} &= \sum_{u=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} A_{\beta(v+w)}^{\alpha'(v)} \sum_{u=0}^r A_{\beta(r-v-u)}^{\alpha(u-v)} \left\{ \sum_{t=1}^u X_{j, i(t-1)}^\alpha P_{\alpha(u-v)}^{i(t-1)} \right\} = \\ &= \sum_{u=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X_{j, \beta(r-v-u)}^\alpha A_{\beta(v+w)}^{\alpha'(v)}, \end{aligned}$$

falls wir

$$X_{j, \beta(r-v-u)}^\alpha = \sum_{u=0}^r X_{j, \alpha(u-v)}^\alpha A_{\beta(r-v-u)}^{\alpha(u-v)}$$

setzen.

Zusatz 3.⁸⁾ Für eine Skleronomtransformation besteht

$$(2.14)_3 \quad \frac{\partial p_{\alpha(r)}^\alpha}{\partial p_{\alpha'(v)}^j} = \binom{r}{v} X_{j, \alpha(r-v)}^\alpha \delta_{\alpha(v)}^{\alpha'(v)},$$

wenn die Parameter erhalten bleiben.

⁷⁾ SUGURI [8].

⁸⁾ OHKUBO [10], KAWAGUCHI [6].

Zusatz 4.⁹⁾ Wenn man nur die Parameter verändert, dann ist

$$(2.14)_4 \quad \frac{\partial p_{\beta(r)}^i}{\partial p_{\alpha(r)}^j} = \delta_j^i A_{\beta(r)}^{\alpha(r)}.$$

Satz 2.7. Eine R_K -Transformation oder Skleronomtransformation gibt Anlaß zu

$$(2.15) \quad \frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial p_{\alpha(r)}^j} = \binom{v}{l}^{-1} \sum_{t=0}^{r-l} \binom{r}{l+t} \frac{\partial p_{\beta(r-l-t)}^a}{\partial p_{\alpha(r-l)}^j} A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)},$$

für $r \geq v \geq l \geq 1$, wobei l eine beliebig bestimmte ganze Zahl ist, für welche $v \geq l \geq 1$.

BEWEIS. Satz 2.6 zeigt uns

$$\frac{\partial p_{\beta(r-l)}^a}{\partial p_{\alpha(r-l)}^j} = \sum_{u=0}^{r-l-t} \binom{r-l-t}{v-l+u} X_{j(\beta(r-l-t-u))}^a A_{\beta(v-l+u)}^{\alpha(l)},$$

daher soll die rechte Seite dem folgenden Ausdruck gleich sein:

$$\begin{aligned} & \binom{v}{l}^{-1} \sum_{t=0}^{r-l} \binom{r}{l+t} \sum_{u=0}^{r-l-t} \binom{r-l-t}{v-l+u} X_{j(\beta(r-l-t-u))}^a A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(v-l+u)}^{\alpha(r-l)} = \\ &= \binom{v}{l}^{-1} \sum_{t=0}^{r-l} \binom{r}{l+t} \sum_{w=t}^{r-v} \binom{r-l-t}{r-v-w} X_{j(\beta(r-v-w))}^a A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(v-l-t+w)}^{\alpha(r-l)} = \\ &= \binom{v}{l}^{-1} \sum_{w=0}^{r-v} \sum_{t=0}^w \binom{r}{v+w} \binom{v+w}{l+t} X_{j(\beta(r-v-w))}^a A_{\beta(l+t)}^{\alpha(l)} A_{\beta(r-l-t+w)}^{\alpha(r-l)} = \\ &= \sum_{w=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X_{j(\beta(r-v-w))}^a A_{\beta(v+w)}^{\alpha(r)} = \frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial p_{\alpha(r)}^j}, \end{aligned}$$

was aus (1.13) und Satz 2.5 folgt,

Zusatz (SUGURI)¹⁰⁾. Wenn die Parameter unverändert bleiben, ergibt sich für eine R_K -Transformation oder Skleronomtransformation

$$(2.15)_{\text{bis}} \quad \frac{\partial p_{\alpha(r)}^a}{\partial p_{\alpha'(s)}^j} = \frac{r! (s-l)!}{s! (r-l)!} \delta_{\alpha'(l)}^{\alpha(l)} \frac{\partial p_{\alpha(r-l)}^a}{\partial p_{\alpha'(s-l)}^j}.$$

Satz 2.8. Es besteht

$$\frac{\partial p_{\beta(r+1)}^a}{\partial p_{\alpha(r)}^j} = \frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial p_{\alpha(r-1)}^j} U_{\beta_{r+1}}^{\alpha_r} + \left(\frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial p_{\alpha(r)}^j} \right)_{/\beta_{r+1}}.$$

⁹⁾ KAWAGUCHI [6], HOMBU—SUGURI [9].

¹⁰⁾ SUGURI [8], KAWAGUCHI [6].

BEWEIS. Wegen des Satzes 2.6 kann die rechte Seite in die folgende Form umgeschrieben werden:

$$\sum_{u=0}^{r-v+1} \binom{r}{v+w} X_{j/(\beta(r-v-u))}^a A_{\beta(r-1+u)}^{(\alpha(r-1))} U_{\beta_{r+1}}^{\alpha(r)} + \\ + \sum_{u=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X_{j/(\beta(r-v-u))}^a A_{\beta(r+u)}^{\alpha(r)} + \sum_{u=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X_{j/(\beta(r-v-u+1))}^a A_{\beta(r+u)}^{\alpha(r)},$$

setzen wir $w-1$ an Stelle von w im zweiten Glied und fassen wir dasselbe mit dem ersten Glied zusammen, so folgt

$$= \sum_{u=0}^{r-v+1} \binom{r}{v+w-1} X_{j/(\beta(r+1-u))}^a \{A_{\beta(r-1+u)}^{(\alpha(r-1))} A_{\beta_{r+1}}^{\alpha(r)} + A_{\beta(r+u-1)}^{\alpha(r)}\} + \\ + \sum_{u=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X_{j/(\beta(r+1-u))}^a A_{\beta(r+u)}^{\alpha(r)} = \\ = \sum_{u=0}^{r+1-v} \binom{r}{v+w} X_{j/(\beta(r+1-u))}^a A_{\beta(r+u)}^{\alpha(r)} = \frac{\partial p_{\beta(r+1)}^a}{\partial p_{\alpha(r)}^j},$$

wobei (1.5) und die Identität $\binom{r}{v+w-1} + \binom{r}{v+w} = \binom{r+1}{v+w}$ angewendet worden sind.

Satz 2.5 liefert uns ohne weiteres

$$\frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial x^j} = \sum_{u=1}^r \sum_{s=0}^u \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} X_{j/i(t)(\alpha(s))}^a P_{\alpha(u-s)}^{i(t)} A_{\beta(r)}^{\alpha(u)} = \\ = \sum_{u=1}^r X_{j/\alpha(u)}^a A_{\beta(r)}^{\alpha(u)} = X_{j/\beta(r)}^a,$$

denn die x^j sind nur in den $X_{j/i(t)(\alpha(s))}^a$ enthalten. Weiter können wir durch Induktion leicht bewiesen, daß $X_{j/\beta(r)\beta'(s)}^a = X_{j/\beta(r)\beta'(s)}^a$ ist. Damit erhalten wir den

Satz 2.9. *Es besteht die Beziehung*

$$(2.16) \quad \frac{\partial p_{\beta(r)\beta'(s)}^a}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial x^j} \right)_{|\beta'(s)} = X_{j/\beta(r)\beta'(s)}^a.$$

Zusatz. $(\partial p_{\beta(r)}^a / \partial x^j)_{|\beta'(s)}$ ist in Bezug auf die beiden Indizes $\beta(r)$ und $\beta'(s)$ symmetrisch.

Satz 2.10. *Eine R_K -Transformation gibt uns*

$$(2.17) \quad \frac{\partial p_{\beta(r)\beta'(s)}^a}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial u^\alpha} \right)_{|\beta'(s)} - \sum_{t=1}^s \binom{s}{t} U_{\alpha/(\beta'(t))}^{\beta'} p_{|\beta'(r)\beta'(s-t)}^a,$$

$$(2.18) \quad \frac{\partial p_{\beta(r)}^a}{\partial u^\alpha} = X_{\alpha/\beta(s)}^a - \sum_{t=1}^s \binom{s}{t} U_{\alpha/(\beta(t))}^{\beta'} p_{|\beta'(r)\beta'(s-t)}^a,$$

wobei

$$U_{\alpha|\beta(t)}^{\beta'} = \sum_{r=1}^t U_{\alpha|\alpha'(r)}^{\beta'} A_{\beta(t)}^{\alpha'(r)}$$

ist.

BEWEIS. Aus (2.13) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\beta(s)}^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}} &= \sum_{u=1}^s \sum_{v=0}^u \sum_{t=0}^{u-v} \binom{u}{v} X_{\alpha, i(t)(\alpha'(v))}^{\alpha} P_{\alpha'(u-v)}^{i(t)} A_{\beta(s)}^{\alpha'(u)} + \\ &+ \sum_{u=1}^s \sum_{v=0}^u \sum_{t=0}^{u-v} \binom{u}{v} X_{i(t)(\alpha'(v))}^{\alpha} P_{\alpha'(u-v)}^{i(t)} A_{\beta(s), \beta'}^{\alpha'(u)} U_{\alpha}^{\beta'}. \end{aligned}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist gleich $X_{\alpha|\beta(s)}^{\alpha}$, was man wegen (2.12) leicht einsehen kann, und das zweite Glied geht wegen (2.12) in $\sum_{u=1}^s X_{\alpha|\alpha'(u)}^{\alpha} A_{\beta(s), \beta'}^{\alpha'(u)} U_{\alpha}^{\beta'}$ über. Andererseits erhält man unter Berücksichtigung von (1.12)

$$A_{\beta(s), \beta'}^{\alpha'(u)} = \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s}{t} A_{(\beta(s-t))}^{(\alpha'(u-1))} U_{\beta(t), \beta'}^{\alpha'_u}$$

und, differenzieren wir t -mal $U_{\beta}^{\alpha} U_{\alpha'}^{\beta} = \delta_{\alpha'}^{\alpha}$ nach u^{β} , so folgt

$$0 = U_{\beta'|\beta(t)}^{\alpha} U_{\alpha'}^{\beta'} + \sum_{r=1}^t \binom{t}{r} U_{\beta'|\beta(t-r)}^{\alpha} U_{|\alpha'|/\beta(r)}^{\beta}.$$

Deshalb ist das zweite Glied gleich

$$\begin{aligned} &\sum_{u=1}^s X_{\alpha|\alpha'(u)}^{\alpha} \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s}{t} A_{(\beta(s-t))}^{(\alpha'(u-1))} U_{\beta(t), \beta'}^{\alpha'_u} U_{\alpha}^{\beta'} = \\ &= - \sum_{u=1}^s X_{\alpha|\alpha'(u)}^{\alpha} \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s}{t} A_{(\beta(s-t))}^{(\alpha'(u-1))} \sum_{r=1}^t \binom{t}{r} U_{|\beta'|\beta(t-r)}^{\alpha'_u} U_{|\alpha'|/\beta(r)}^{\beta'} = \\ &= - \sum_{u=1}^s X_{\alpha|\alpha'(u)}^{\alpha} \sum_{r=1}^{s-u+1} \binom{s}{r} \left\{ \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s-r}{t-r} A_{\beta(s-t)}^{(\alpha'(u-1))} U_{|\beta'|\beta(t-r)}^{\alpha'_u} \right\} U_{|\alpha'|/\beta(r)}^{\beta'}, \end{aligned}$$

benützen wir (1.12), so folgt

$$\begin{aligned} &= - \sum_{u=1}^s X_{\alpha|\alpha'(u)}^{\alpha} \sum_{r=1}^{s-u+1} \binom{s}{r} A_{\beta'|\beta(s-r)}^{\alpha'_u} U_{|\alpha'|/\beta(r)}^{\beta'} = \\ &= - \sum_{r=1}^s \binom{s}{r} X_{\beta'|\beta(s-r)}^{\alpha} U_{|\alpha'|/\beta(r)}^{\beta}. \end{aligned}$$

D. h. (2.18) ist jetzt bewiesen worden. (2.17) kann auch in analoger Weise wie (2.18), bewiesen werden, aber man soll dabei $p_{\beta(r)}^{\alpha}$ anstatt X^{α} nehmen.

9. In analoger Weise wie für einen gewöhnlichen Extensor¹¹⁾, verstehen wir unter einem R_K -Extensor einen Tensor in bezug auf jede der beiden linearen Transformationen

$$(2.19) \quad V_{\beta(r)}^{\alpha} = \sum_{t=0}^r \frac{\partial p_{\beta(r)}^{\alpha}}{\partial p_{\alpha(t)}^j} V_{\alpha(t)}^j, \quad P_{\beta(r)} = \sum_{t=1}^r A_{\beta(r)}^{\alpha(t)} P_{\alpha(t)},$$

die aus der erweiterten R_K -Transformation (2.2) hergeleitet werden. Zum Beispiel, wir nennen die Größen $V_{\alpha(t)\alpha'(s)}^i$ ($t=0, 1, \dots, G$; $s=0, 1, \dots, G'$) die Bestimmungszahlen eines R_K -Extensors zweiter Stufe vom Gewichte f und P_K -Gewichte f' , der in Bezug auf die Indizes $\alpha(t)$ bzw. $\alpha'(s)$ exkontravariant vom Grad G bzw. P_K -kovariant vom Grad G' ist, wenn bei der erweiterten R_K -Transformation die Größen sich nach der Regel transformieren:

$$V_{\beta(r)\beta'(s)}^{\alpha} = A^{-k} U^{-k'} \sum_{t=0}^r \sum_{u=1}^s \frac{\partial p_{\beta(r)}^{\alpha}}{\partial p_{\alpha(t)}^j} A_{\beta'(s)}^{\alpha'(u)} V_{\alpha(t)\alpha'(u)}^j,$$

während A bzw. P die Determinante $|\partial x^{\alpha}/\partial x^j|$ bzw. $|\partial u^{\beta}/\partial u^{\alpha}|$ bedeutet. Wegen (2.2) kommt die Beziehung

$$dp_{\beta(r)}^{\alpha} = \sum_{t=0}^r \frac{\partial p_{\beta(r)}^{\alpha}}{\partial p_{\alpha(t)}^i} dp_{\alpha(t)}^i + \frac{\partial p_{\beta(r)}^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha}$$

vor, die entlang einer das Element $p_{\alpha(t)}^i$ berührenden K -dimensionalen Fläche in

$$p_{\beta(r)\beta'}^{\alpha} du^{\beta'} = \sum_{t=0}^r \frac{\partial p_{\beta(r)}^{\alpha}}{\partial p_{\alpha(t)}^i} p_{\alpha(t)\alpha'}^i du^{\alpha'} + \frac{\partial p_{\beta(r)}^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha}$$

übergeht. Somit sind die Größen

$$\mathcal{P} p_{\alpha(t)}^i = dp_{\alpha(t)}^i - p_{\alpha(t)\alpha'}^i du^{\alpha'}, \quad t=0, 1, \dots, M$$

die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors erster Stufe vom Grad M . Wenn man das Koordinatensystem festhält und nur die Parameter u^{α} transformiert, dann zeigt der Zusatz 3 von Satz 2.6, daß die Größen $\mathcal{P} p_{\alpha(t)}^i$ Bestimmungszahlen eines kovarianten P_K -Vektors vom Grad M sind. Ein Beispiel von exkovarianten R_K -Extensoren ist $F_{;i}^{\alpha(r)}$, während F ein Skalar ist.

Der Zusatz von Satz 2.6 zeigt uns ohne weiteres den

Satz 2.11. *Ein R_K -Extensor ist auch ein gewöhnlicher Extensor von derselben Art in Bezug auf eine Skleronomtransformation und gleichzeitig P_K -Tensor in Bezug auf eine Parametertransformation.*

¹¹⁾ CRAIG [11], SUGURI [8], KAWAGUCHI [2], [6].

10. Berücksichtigt man Satz 2.6, so kann man in analoger Weise wie im Falle der gewöhnlichen Extensoren leicht den folgende Satz erkennen:

Satz 2.12. Die Funktionen V^i von den Parametern u^α seien die Bestimmungszahlen eines kontravarianten starken Vektors in Bezug auf die R_K -Transformation (2.1), dann sind $V_{|\alpha(v)}^i$ ($i=0, 1, \dots, G$) die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten R_K -Extensors erster Stufe vom Grad G .

BEWEIS. Aus der Transformationsregel $V^\alpha = X_i^\alpha V^i$ folgt durch t -malige sukzessive Differentiationen nach u^α wegen des Satzes 2.6

$$\begin{aligned} V_{|\beta(t)}^\alpha &= \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} X_{i|\beta(t-s)}^\alpha V_{|\beta(s)}^i = \\ &= \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} X_{i|\beta(t-s)}^\alpha \sum_{r=1}^s A_{\beta(s)}^{\alpha(r)} V_{\alpha(r)}^i = \frac{\partial P_{\beta(t)}^\alpha}{\partial p_{\alpha(r)}^i} V_{\alpha(r)}^i, \end{aligned}$$

wobei $A_{\beta(s)}^{\alpha(0)} = 0$ für $s > 0$ und $A_{\beta(0)}^{\alpha(0)} = 1$ ist.

In analoger Weise erkennen wir

Satz 2.13. Wenn $W_i^{\alpha(t)}$ eine exkovariante R_K -Extensordichte erste Stufe vom Grad M ist, dann ist $\binom{r}{t} W_i^{\alpha(r-t)\alpha(t)}$ ($0 \leq t \leq r \leq M$) eine R_K -Extensordichte zweiter Stufe, die in Bezug auf ${}^{\alpha(r-t)}_i$ exkovariant und auf $\alpha(t)$ P_K -kontravariant ist.

In dieser Weise können wir die Theorie der R_K -Extensoren weiter entwickeln, genau so wie diejenige der gewöhnlichen Extensoren.

11. Wie wir gleich erkennen, ist (2.13) nicht linear in $p_{\alpha(r)}^i$, d. h. keine lineare Transformation des P_K -Expunktes. Aber wir können ihre Representation in linearen Transformationen auffinden. In der Tat, mittels Induktion in Bezug auf v können wir nach (2.13) den folgenden Hauptsatz beweisen:

Satz 2.14. (Hauptsatz) Bei einer R_K -Transformation verändert sich ein Flächenelement M -ter Ordnung auf einer K -dimensionalen Fläche nach der Regel

$$(2.20) \quad P_{\beta(r)}^{\alpha(v)} = \sum_{u=1}^r \sum_{s=0}^u \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} X_{i|\alpha(s)}^{\alpha(v)} P_{\alpha(u-s)}^{i(t)} A_{\beta(r)}^{\alpha(u)},$$

wobei

$$\begin{aligned} X_{i|\alpha(s)}^{\alpha(v)} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(v)} \sum_{(v')} \left[\begin{matrix} r \\ t, v \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} r \\ s, v' \end{matrix} \right] X_{i|\alpha(v_1)}^{\alpha(v'_1)} X_{i|\alpha(v_2)}^{\alpha(v'_2)} \dots X_{i|\alpha(v_r)}^{\alpha(v'_r)}, \\ \left[\begin{matrix} r \\ t, v \end{matrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{t!}{v_1! v_2! \dots v_r! w_1! \dots w_{t-r+1}!}, \end{aligned}$$

$v_1 + v_2 + \dots + v_r = t, \quad v'_1 + v'_2 + \dots + v'_r = s, \quad v_k + v'_k \geq 1 \quad (k=1, 2, \dots, r)$ ist.

Zusatz. Eine verallgemeinerte Skleronomtransformation trägt $P_{\alpha^{(v)}}^{i(t)}$ in $P_{\beta^{(v)}}^{u(v)}$ folgendermaßen über:

$$P_{\beta^{(v)}}^{u(v)} = \sum_{u=1}^r \sum_{t=1}^n X_{\beta^{(v)}, i(t)}^{u(v)} P_{\alpha^{(u)}}^{i(t)} A_{\beta^{(v)}}^{u(v)}.$$

Satz 2.14 besitzt wesentlich denselben Inhalt wie Satz 2.5, spielt aber eine sehr wichtige Rolle und ist sehr nützlich, denn, wie die Transformationsregel (2.20) zeigt, verändern sich die Werte $P_{\alpha^{(s)}}^{i(t)}$ linear bei jeder R_K -Transformation. Somit können wir die Theorie in einer Mannigfaltigkeit von P_K -Expunkten¹²⁾ mit Hilfe dieses Satzes begründen, in analoger Weise wie in einer linear zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, wenn wir $P_{\alpha^{(s)}}^{i(t)}$ anstatt $p_{\alpha^{(s)}}^i$ als die vergrößerten Bestimmungszahlen eines P_K -Expunktes nehmen. (2.20) ist nichts anderes als die Representation der Transformation (2.13) in linearen Transformationen.

Literatur.

- [1] A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, *Rend. Cir. Mat. Palermo* **56** (1932), 246—276.
- [2] A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **9** (1940), 1—152.
- [3] A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung II. Über die n -dimensionalen metrischen Räume mit vom m -dimensionalen Flächenelement abhängigem Zusammenhang, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **9** (1940) 153—188.
- [4] A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung III. Erweiterte Parametertransformationen und P -Tensoren, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **10** (1941), 77—156.
- [5] A. KAWAGUCHI, Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, *Mh. Math. Phys.* **43** (1933), 289—297.
- [6] A. KAWAGUCHI, Eine Verallgemeinerung von Extensoren, *Mh. Math. Phys.* **48** (1939), 329—339.
- [7] A. KAWAGUCHI und H. HOMBU, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **6** (1936), 21—62.
- [8] T. SUGURI, The geometry of K -spreads of higher order, *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. Ser. A.* **1** (1941), 143—166.
- [9] H. HOMBU and T. SUGURI, A treatment of geometric quantities in the manifold of surface-elements, *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. Ser. A* **2** (1941), 67—90.
- [10] TAKEO OHKUBO, Über die Extensorrechnung in den verallgemeinerten Räumen von Flächenelementen höherer Ordnung, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **11** (1946), 1—37.
- [11] H. V. CRAIG, On multiple parameter Jacobian extensors, *Tensor, New. Ser.* **2** (1952), 27—35.
- [12] CH. EHRESMANN, Les prolongements d'une variété différentiable, *C. R. Acad. Sci. Paris* **233** (1951), 598—600, 777—779, 1081—1083.

(Eingegangen am 2. Februar 1959.)

¹²⁾ Diese Theorie wird in anderen Arbeiten des Verfassers irgendwo publiziert werden.