

Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume

Von A. RAPCSÁK (Debrecen)

1. Gegeben sei ein affinzusammenhängender Bahnraum¹⁾ P_n und das Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -2 G^i(x, \dot{x})$$

der Bahnen.²⁾ In (1) soll $G^i(x, v)$ in v^i positiv homogen zweiten Grades sein.

Bekanntlich³⁾ ist eine Transformation G , welche einen Bahnraum $\bar{P}_n$ in einen Bahnraum P_n überführt, dann und nur dann bahntreu, falls

$$(2) \quad \bar{G}^i(x, v) = G^i(x, v) + p(x, v) v^i$$

gilt, wobei $p(x, v)$ eine in v^i positiv homogene skalare Funktion ersten Grades ist.

2. Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 1. *Damit sich ein affinzusammenhängender Bahnraum $\bar{P}_n$ auf einem Bahnraum P_n bahntreu abbilden lasse, ist das Erfüllstein der folgenden Identitäten notwendig und hinreichend:*

$$(3_1) \quad \bar{W}_{jkl}^i = W_{jkl}^i,$$

$$(3_2) \quad \begin{aligned} \bar{W}_{hjk|l}^i - W_{hjk|l}^i &= \frac{n-2}{n+1} W_{hjk}^r (\bar{G}_{ir}^i - G_{ir}^i) \\ &- \frac{1}{n+1} W_{hjs}^r v^s (\bar{G}_{mkr}^m - G_{mkr}^m) - \\ &- \frac{1}{n+1} W_{sjk}^r v^s (\bar{G}_{mhr}^m - G_{mhr}^m) - \\ &- \frac{1}{n+1} W_{hsk}^r v^s (\bar{G}_{mjr}^m - G_{mjr}^m) \end{aligned}$$

¹⁾ Es sei $n \geq 3$.

²⁾ Alle in dieser Arbeit auftretenden Funktionen seien in ihren Variablen zumindest dreimal stetig differenzierbar.

³⁾ S. Z. B. BERWALD [1].

$$(3_3) \quad \bar{D}_{hjk}^i = D_{hjk}^i$$

$$(3_4) \quad \bar{D}_{hjk}^i \mid i - D_{hjk}^i \mid i = \frac{n-1}{n+1} D_{hjk}^r (\bar{G}_{ir} - G_{ir}).$$

In den Identitäten (3) sind die Größen $\bar{T}_j^i$ Größen des Raumes $\bar{P}_n$,

$$G_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^i}{\partial v^j}, \quad G_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G_j^i}{\partial v^k}, \dots,$$

$$T_{j \mid k}^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial T_j^i}{\partial v^r} G_k^r - T_r^i G_{jk}^r + T_j^r G_{rk}^i,$$

$$\bar{T}_{j \mid k}^i = \frac{\partial \bar{T}_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{T}_j^i}{\partial v^r} \bar{G}_k^r - \bar{T}_r^i \bar{G}_{jk}^r + \bar{T}_j^r \bar{G}_{rk}^i,$$

$$(4) \quad \begin{aligned} W_{hjk}^i &= K_{hjk}^i + \frac{1}{n+1} \delta_h^i (K_{jk} - K_{kj}) + \\ &+ \frac{1}{n^2-1} \delta_j^i (n K_{hk} - K_{kh}) - \frac{1}{n^2-1} \delta_k^i (n K_{hj} + K_{jh}) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \frac{\partial (K_{jk} - K_{kj})}{\partial v^h} v^i + \frac{1}{n^2-1} \delta_j^i \frac{\partial K_{km}}{\partial v^h} v^m - \frac{1}{n^2-1} \delta_k^i \frac{\partial K_{jm}}{\partial v^h} v^m, \end{aligned}$$

$$(5) \quad D_{hjk}^i = \frac{\partial^3}{\partial v^h \partial v^j \partial v^k} \left(G^i - \frac{1}{n+1} G^r \right),$$

$$(6) \quad K_{hjk}^i = \frac{\partial G_{hj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{hk}^i}{\partial x^j} - G_{hjr}^i G_k^r + G_{hkr}^i G_j^r + G_{kr}^i G_{hj}^r - G_{jr}^i G_{hk}^r.$$

$$(7) \quad K_{hj} = K_{h \mid jr}^r.$$

In (4) bedeutet W_{hjk}^i den verallgemeinerten Weylschen Tensor⁴⁾, in (5) D_{hjk}^i den Douglasschen Tensor⁴⁾, und in (6) K_{hjk}^i den Berwaldschen Krümmungstensor.⁵⁾

BEWEIS. Die Notwendigkeit der im Satz ausgesprochenen Bedingung ergibt sich auf Grund von (2) durch eine Rechnung, falls noch

$$\frac{\partial p}{\partial v^s} \stackrel{\text{def}}{=} p_j = \frac{1}{n+1} (\bar{G}_{rj}^r - G_{rj}^r)$$

gesetzt wird. Nehmen wir umgekehrt an, daß die Identitäten (3) erfüllt sind. Zwecks Vereinfachung des Beweisganges führen wir K. YANO⁶⁾ folgend ein

⁴⁾ S. J. DOUGLAS [2] (δ_j^i : das Kroneckersche Symbol).

⁵⁾ S. Z. B. L. BERWALD [1].

⁶⁾ S. Z. B. K. YANO [6], 194—199.

solches neues Koeffizientensystem für den Zusammenhang ein, aus dessen Transformationsformel das den Ausdruck

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial p_j}{\partial v^i}$$

enthaltendes Glied fehlt.

Es sei nämlich

$$(8) \quad G_{jk}^{*i} \stackrel{\text{def}}{=} G_{jk}^i - \frac{1}{n+1} G_{sjk}^s v^i.$$

Offenbar ist G_{jk}^{*i} eine positive homogene Funktion 0-ten Grades in v^i , deren Koordinatentransformationsformel mit der Transformationsformel von G_{jk}^i übereinstimmt, so dass man mit G_{jk}^{*i} den Krümmungstensor (6) (in Zeichen: K_{jkl}^{*i} , K_{hj}^{*i}) und die kovariante Ableitung (in Zeichen: T_{j*k}^i) bilden kann.

Aus (6) und (8) folgt:

$$(9) \quad K_{ijk}^{*h} = K_{ijk}^h + \frac{1}{n+1} (G_{sjk| i}^s - G_{sji| k}^s) v^h.$$

Auf Grund von (2) und von (8) können wir also unseren Satz folgendermaßen formulieren: $\bar{P}_n$ läßt sich dann und nur dann auf P_n abbilden, falls es einen kontravarianten Vektor $p_j = \frac{\partial P}{\partial v^j}$ gibt, für welchen

$$(10_1) \quad G_{jk}^{*i} = G_{jk}^i + p_j \delta_k^i + p_k \delta_j^i$$

gilt. Wir bestimmen zuerst die kovariante Ableitung bzw. diejenige hinsichtlich v^k von p_j .

Aus (10₁) erhalten wir:

$$(10_2) \quad \frac{\partial p_j}{\partial v^k} = \frac{1}{n+1} [\bar{G}_{sjk}^s - G_{sjk}^s].$$

Andererseits ergibt sich auf Grund von (9), (6) und (2):

$$(12) \quad \bar{K}_{ijk}^{*h} - K_{ijk}^{*h} = p_{j*k} \delta^h - p_{j*i} \delta_k^h + (p_{i*k} - p_{k*i}) \delta_j^h - \left(\frac{\partial G_{ij}^{*h}}{\partial v^k} - \frac{\partial G_{kj}^{*h}}{\partial v^i} \right) p_s v^s.$$

Indem wir die Indizes h und k kontrahieren, erhalten wir:

$$(13) \quad \bar{K}_{ij}^{*} - K_{ij}^{*} = n p_{j*i} + p_{i*j} + \frac{n-1}{n+1} G_{rij}^r p_s v^s.$$

Indem wir jetzt (13) durch n multiplizieren, die Indizes i und j vertauschen und sodann den erhaltenen Ausdruck zu (13) addieren, erhalten wir:

$$(10_3) \quad p_{i*j} = -\frac{1}{n^2-1} [(n \bar{K}_{ji}^{*} + \bar{K}_{ij}^{*}) - (n K_{ji}^{*} + K_{ij}^{*})] + \frac{1}{n+1} G_{sij}^s v^r p_r.$$

Die Gleichungssysteme (10₁), (10₂) und (10₃) bestimmen offenbar ein Thomas—Veblensches gemischtes System.⁷⁾ Zwecks Untersuchung der Integrierbarkeit des Systems bilden wir die Integrierbarkeitsbedingungen von (10₂) und (10₃). Dazu benutzen wir die Gleichungen (10₂) und (10₃) sowie die folgenden Vertauschungsformeln:

$$(13) \quad T_{l * n * m}^k - T_{l * m * n}^k = K_{nmr}^k T_l^r - K_{nml}^r T_r^k - K_{nms}^r v^s \frac{\partial T_l^k}{\partial v^r},$$

$$(14) \quad \frac{\partial T_{l * m}^k}{\partial v^n} - \frac{\partial T_l^k}{\partial v^n} * m = H_{nmr}^k T_l^r - H_{nml}^r T_r^k - H_{nms}^r v^s \frac{\partial T_l^k}{\partial v^r}$$

wobei

$$H_{jkl}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G_{kl}^{*i}}{\partial v^j}$$

gilt. Auf Grund der Gleichungen (10₂), (10₃), (13), (14), (4) und (5) erhalten wir:

$$(15_1) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{n^2-1} (n \bar{K}_{kj}^* + \bar{K}_{jk}^*)_{*l} + \frac{1}{n^2-1} (n K_{kj}^* + K_{jk}^*)_{*l} + \\ & + \frac{1}{n^2-1} (n \bar{K}_{hj}^* + \bar{K}_{jl}^*)_{*l} - \frac{1}{n^2-1} (n K_{lj}^* + K_{jl}^*)_{*k} + \\ & + \frac{1}{n+1} (\bar{K}_{slk}^{*r} v^s \bar{G}_{mrj}^m - K_{slk}^{*r} G_{mrj}^m) + \\ & + W_{klj}^r p_r = 0, \end{aligned}$$

$$(15_2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{n^2-1} \left(n \frac{\partial \bar{K}_{kj}^*}{\partial v^l} + \frac{\partial \bar{K}_{jk}^*}{\partial v^l} \right) + \frac{1}{n^2-1} \left(n \frac{\partial K_{kj}^*}{\partial v^l} + \frac{\partial K_{jk}^*}{\partial v^l} \right) - \\ & - \frac{1}{n+1} \bar{G}_{rlj * k}^{*r} + \frac{1}{n+1} G_{rlj * k}^{*r} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial \bar{G}_{ks}^{*r}}{\partial v^s} v^s \bar{G}_{mrj}^m - \\ & - \frac{1}{n+1} \frac{\partial G_{kj}^{*r}}{\partial v^l} v^s G_{mrj}^m + D_{kjl}^r p_r = 0. \end{aligned}$$

(In (15) und (16) bezeichnet $T_{j * k}^i$ die Kovariante Ableitung nach $\bar{G}_{jk}^{*i}$!)

Leiten wir jetzt (10₁) zuerst auf kovariante Weise und dann hinsichtlich v^i ab, und machen wir von (10₂) und (10₃) Gebrauch, so erhalten wir:

$$(16_1) \quad \bar{W}_{jkl}^i = W_{jkl}^i$$

$$(16_2) \quad \bar{D}_{jkl}^i = D_{jkl}^i.$$

⁷⁾ THOMAS—VEBLEN [4].

(16₁) und (16₂) sind Folgen von (3₁) und (3₂). Wir zeigen noch, daß (15₁) und (15₂) Folgen von (3₁), (3₂), (3₃) und (3₄) sind.

Bekanntlich gilt für den Krümmungstensor (6) die folgende Bianchische Identität.⁸

$$(17) \quad K_{ijk|l}^h + K_{ilj|k}^h + K_{ikl|j}^h + K_{sjk}^m v^s G_{mil}^h + K_{slj}^m v^s G_{mik}^h + K_{skl}^m v^s G_{mij}^h = 0.$$

Durch kovariante Derivation von (4) erhalten wir auf Grund von (5), (9) und (8):

$$(18) \quad \frac{1}{n^2-1} (n K_{kj}^* - K_{jk}^*)_{*l} + \frac{1}{n^2-1} (n K_{lj}^* + K_{jl}^*)_{*k} + \\ + K_{slk}^{*r} v^s G_{mrj}^m = \frac{1}{n-2} [-W_{klj}^r v^s - W_{skm}^r v^s \cdot D_{ljr}^m + W_{slm}^r v^s D_{kjr}^m].$$

Durch kovariante Derivation von (5) ergibt sich wegen (8) und (9):

$$(19) \quad -\frac{1}{n^2-1} \left(n \frac{\partial K_{kj}^*}{\partial v^l} + \frac{\partial K_{jk}^*}{\partial v^l} \right) - \frac{1}{n+1} G_{rlj}^r v^s + \\ + \frac{1}{n+1} \frac{\partial G_{ks}^{*r}}{\partial v^l} v^s G_{mrj}^m = -\frac{1}{n-1} D_{klj}^r v^s.$$

Wie aus den Identitäten (18) und (19) ersichtlich, folgen (15₁) und (15₂) aus den Gleichungssystemen (3₁), (3₂), (3₃) und (3₄). Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Aus dem Satz 1. folgt der

Satz 2. Im Falle bahntreuer Abbildungen bilden die Größen W_{jkl}^i, D_{jkl}^i und ihre Ableitung nach v^i , sowie ihre mit den Größen

$$\Pi_{jk}^i = G_{jk}^i - \frac{1}{n+1} (G_{hk}^h \delta_j^i + G_{hj}^h \delta_k^i + G_{hjk}^h v^i)$$

gebildeten kovarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem.⁹⁾

⁸⁾ L. BERWALD [1].

⁹⁾ (3₂) und (3₄) können auch so geschrieben werden:

$$\bar{W}_{hjk}^r ; r = W_{hjk}^r ; r, \quad \bar{D}_{hjk}^r ; r = D_{hjk}^r ; r,$$

hier bedeutet $\bar{;}$ die kovariante Derivation nach $\bar{\Pi}_{jk}^i$, und $;$ diejenige nach Π_{jk}^i . Wie man leicht einsieht sind diese kovarianten Derivationen im allgemeinen keine Tensoren mehr.

Literatur

- [1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 753—781.
- 2] J. DOUGLAS, The general geometry of paths, *Ann. of Math.* **29** (1928), 143—168.
- [3] M. S. KNEBELMAN, Collineations and motions in generalized spaces, *Amer. J. Math.* **51** (1929), 527—564.
- [4] J. M. THOMAS and O. VEULEN, Projective invariants of affine geometry of paths, *Ann. of Math.* **27** (1926), 279—296.
- [5] K. YANO, Les espaces d'éléments linéaires a connexion projective normale et la géométrie projective générale des paths, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **24** (1942), 7—24.
- 6] K. YANO, The theory of Lie derivatives and its applications, *Amsterdam*, 1955.

(Eingegangen am 30. Dezember 1960.)