Untersuchungen über stetige, monotone Iterationsgruppen reeller Funktionen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen*)

Von HORST MICHEL (Halle/Saale)

1. Einleitung

Liegt der Wertebereich einer eindeutigen Abbildung α (z. B. der reellen oder komplexen Zahlen) in ihrem Definitionsbereich, so hat jedes Element der Folge

$$\alpha(x),\ \alpha(\alpha(x)),\ \alpha(\alpha(\alpha(x))),\ \ldots$$

einen wohlbestimmten Sinn, sofern x im Definitionsbereich von α liegt.

Schon im vorigen Jahrhundert fanden Probleme, die mit solchen iterierten Funktionen (oder kürzer „Iterierten") zusammenhängen, Beachtung und Interesse (E. SCHRÖDER [16]). Die einschlägige Literatur wuchs rasch an und so studierten z. B. P. FATOU und G. JULIA in umfangreichen Arbeiten ([7], [11]) das Verhalten der Iterierten komplexer Funktionen α in bezug auf ihre Fixpunkte. Ihre Ergebnisse sind von vielen anderen Autoren erweitert und ergänzt worden (z. B. von I. N. BAKER [2], H. TÖPFER [18]).

Für reelle Funktionen sind solche Untersuchungen in geringerem Umfang angestellt worden. Sie finden aber neuerdings mehr Interesse (man vgl. B. BARNA [3]).

Neben den ganzzahligen Iterierten wurden schon lange auch Iterierte von nichtganzzahliger Ordnung betrachtet. So hat man unter einer Iterierten etwa der Ordnung $\frac{1}{2}$ von α eine Funktion f zu verstehen, für welche $f(f(x)) = \alpha(x)$ gilt. Durch Benutzung gewisser Funktionalgleichungen (z. B. der Schröderschen und der Abelschen) gelang die Konstruktion von Iterierten beliebig-reeller und für komplexe α sogar von beliebig-komplexer Ordnung. Für letztere sei nur an die Arbeiten von N. G. DE BRUIJN [6], G. KOENIGS [13], G. SZEKERES [17] und H. TÖPFER [18] erinnert, während die beliebig-reelle Iteration von reellen Funktionen α z. B. von L. BERG [4], U. T. BÖDEWADT [5], N. G. DE BRUIJN [6], F. B. FULLER [21], H. KNESER [12], W. SCHÖBE [15], und M. WARD ([20], [21]) studiert wurde.

Besonderes Interesse findet in diesen Arbeiten über reelle Funktionen α die Konstruktion einer einparametrigen Schar von Iterierten (als Parameter dient die Ordnung der Iterierten). Da bekanntlich die Lösung dieser Aufgabe nicht eindeutig sein kann, stellen die Autoren geeignete Zusatzforderungen an die zu konstruie-

*) Dissertation 1961 an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (gekürzte Fassung). Referenten: Prof. Dr. L. Berg, Prof. Dr. O.–H. Keller.

rende Iteriertenschar (wenn auch meist nicht explizit). Für solche zusätzlichen Bedingungen ist insbesondere die Umgebung eines Fixpunktes von α geeignet. Es ist aber im allgemeinen Fall sehr schwierig, aus dem Verhalten einer Funktion α in der Umgebung eines Fixpunktes auf das Fixpunktverhalten ihrer Iterierten zu schließen. Daher beschränken sich die Autoren meistens auf solche Funktionen α, die dort ein hinreichend einfaches Verhalten zeigen.

Es scheint daher nützlich zu sein, einmal nicht von vornherein nur eine in bestimmter Weise ausgezeichnete, einparametrige Iteriertenschar konstruieren zu wollen, sondern eine möglichst genaue Übersicht über die Struktur aller einparametrigen Iteriertenscharen (in dieser Arbeit sind es Gruppen) zu gewinnen. Ein solcher Weg soll hier beschritten werden. Dabei wird von α im wesentlichen nur die Stetigkeit und strenge Monotonie gefordert.

In Abschnitt 2 wird allen Untersuchungen eine Gruppe S zugrundegelegt, in der die Verknüpfung durch die Zusammensetzung von Funktionen gegeben ist. Es wird der Begriff der Iterationsgruppe definiert und eine t-Ordnungsstruktur in S eingeführt, mit deren Hilfe stetige, monotone Iterationsgruppen definiert werden. Aus der Literatur bekannte Resultate sichern dann die Darstellbarkeit jeder solchen stetigen, monotonen Iterationsgruppe mittels einer erzeugenden Funktion (man vgl. für Spezialfälle J. HADAMARD [8], für den allgemeinen Fall M. WARD und F. B. FULLER [20], [21]).

In Abschnitt 3 werden Eigenschaften der Iterationsgruppen untersucht, insbesondere die Frage, durch welche und wieviele ihrer Elemente eine solche Gruppe eindeutig festgelegt werden kann.

In Abschnitt 4 werden vor allem notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gesucht, daß eine Funktion aus S Iterierte von α ist, während im Abschnitt 5 der Einfluß der Änderung von α auf die Iterationsgruppen von α untersucht wird. Das ist für den Vergleich mit Resultaten anderer Autoren wichtig.

In Abschnitt 6 werden schließlich Eindeutigkeitssätze für Iterationsgruppen angegeben, die zeigen, daß das Problem der Auswahl einer Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$ aus der Gesamtheit aller Iterationsgruppen $G(\alpha)$ auch dann noch sinnvoll bleibt, wenn man gewisse Bedingungen, die beim Beweis des Existenzsatzes von anderen Autoren benutzt werden, wegläßt. Jedoch beziehen sich diese Eindeutigkeitssätze nur auf spezielle Klassen von Funktionen α.

2. Allgemeine Eigenschaften von Iterationsgruppen

Wir führen eine Gruppe S ein, deren Elemente Funktionen sind. Dadurch können wir bei vielen der folgenden Untersuchungen die vorkommenden Funktionen argumentfrei schreiben.

Definition 2. 1. Es sei S die Menge aller auf $[0, \infty)$ definierten, stetigen und streng monoton wachsenden Funktionen f mit den Eigenschaften

$$f(0)=0,\ f(\infty)=\infty. \tag{1}$$

Zwei Elemente $f, g \in S$ mögen genau dann gleich heißen, wenn für alle $x \in [0, \infty)$

$$f(x)=g(x) \tag{2}$$

gilt.

In S sei eine Verknüpfung fg je zweier Elemente f, g erklärt durch

$$[fg](x)=f(g(x)) \text{ für alle } x\in[0,\infty). \tag{3}$$

Statt $[fg](x)$ werden wir im allgemeinen kürzer $fg(x)$ schreiben.

Mit dieser Verknüpfung als Multiplikation bildet S eine nichtkommutative Gruppe, deren Einselement e durch

$$e(x)=x \quad \text{für alle } x\in[0,\infty)$$

gegeben ist.

Gemäß dieser Definition wird man z. B. unter f^2 diejenige Funktion zu verstehen haben, die $x\in[0,\infty)$ auf $f(f(x))$ und nicht etwa auf $[f(x)]^2$ abbildet. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird f^2 immer im Sinne von (3) verstanden, während das Quadrat von Funktionswerten nie argumentfrei, also immer in der Form $[f(x)]^2$ geschrieben wird. Analog wird bei f^n, f^{-n} verfahren.

Die durch (3) definierte klammerfreie Schreibweise für die Zusammensetzung zweier Funktionen $f, g\in S$ wird später auch für Funktionen benutzt, die nicht in S liegen.

Definition 2. 2. Gilt für zwei Elemente $f, g\in S$ und für alle $x\in(0,\infty)$ die Beziehung $f(x)<g(x)$, so heiße $f<g$.

Die so in S definierte Ordnungsstruktur, die natürlich nicht je zwei Elemente $f, g\in S$ in eine Ordnungsbeziehung stellt, ist eine t-Ordnung mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &1)\ f\leqq f,\\ &2)\ (f\leqq g, g\leqq h)\to f\leqq h,\\ &3)\ (f\leqq g, g\leqq f)\to f=g, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei, wie üblich, $\leqq$ entweder $<$ im Sinne von 2. 2 oder $=$ im Sinne von (2) bedeuten soll.

Diese t-Ordnungsstruktur ist mit der Multiplikation in S verträglich, wie der folgende, leicht einzusehende Satz zeigt:

Satz 2. 3. *Sind $f, g, h\in S$ und gilt $f\leqq g$, so gilt auch $fh\leqq gh$ und $hf\leqq hg$.*

Es gilt aber auch

Satz 2. 4. *Sind $f, g, h\in S$ und gilt $f<g$, so gilt auch $fh< gh$ und $hf<hg$.*

Unter der (natürlichen) Iteration einer Funktion α versteht man (vorausgesetzt, daß er möglich ist) den Prozeß des wiederholten Zusammensetzens von α mit sich selbst, also die Bildung der Funktionen

$$\alpha(x),\ (\alpha(\alpha(x)),\ \alpha(\alpha(\alpha(x))),\ldots$$

Ist dabei $\alpha\in S$, so ist die Iteration von α möglich und man erhält die Funktionen

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots,\ \alpha^n,\ \ldots,$$

die sämtlich wieder in S liegen. α^n nennt man auch die n-te Iterierte oder die Iterierte der Ordnung n von α. Neben diesen natürlichen Iterierten kann man auch s-te von α abgeleitete Iterierte bilden, wobei s nicht natürlich zu sein braucht, sondern eine beliebigerelle Zahl ist.

Wir beschränken uns im folgenden überall — auch wenn es nicht ausdrücklich vermerkt wird — auf solche zu iterierende Funktionen α, die nicht nur in S liegen, sondern für welche auch $\alpha > e$ gilt. Dann gilt wegen Satz 2. 4 auch $\ldots < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < e < \alpha < \alpha^2 < \ldots$, und alle diese Potenzen von α besitzen nur die Fixpunkte 0 und ∞.

Definition 2. 5. Eine Gesamtheit von Funktionen $f^{[s]}$ aus S mit $s \in (-\infty, +\infty)$ heiße genau dann eine Iterationsgruppe $G(\alpha)$, wenn

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} &1)\ \text{für alle } s, t \in (-\infty, +\infty) \\ &\qquad f^{[s]} f^{[t]} = f^{[s+t]} \\ &2)\ f^{[1]} = \alpha \end{aligned}$$

gilt. Dabei heißt $f^{[s]}$ eine s-te Iterierte oder Iterierte der Ordnung s von α.

Zwischen den hier in Klammern gesetzten Parametern s und den Exponenten bei Gruppenelementen von S besteht der folgende Zusammenhang: Ist m eine beliebige ganze Zahl und $f^{[s]} \in G(\alpha)$, so gilt

$$\text{(6)} \qquad (f^{[s]})^m = f^{[sm]}.$$

Bei der ersten der Gleichungen (5) handelt es sich um die sogenannte Translationsgleichung (siehe [1a]).

Daß es solche Iterationsgruppen gibt, ist bekannt. Ist z. B. $q > 1$ eine reelle Zahl, so bilden die Funktionen

$$\text{(7)} \qquad f^{[s]}(x) = q^s x$$

eine Iterationsgruppe mit

$$\text{(8)} \qquad \alpha(x) = qx.$$

Neben diesem sehr einfachen Fall gibt es Untersuchungen über die Iteration von Funktionen α, wenn

$$\text{(9)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x} = q > 1$$

(man vgl. [4], [6], [17]), wenn

$$\text{(10)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x) - x}{x^u} = q > 0 \qquad (u > 1)$$

([4], [17]) und wenn

$$\text{(11)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x^u} = q > 0 \qquad (0 < u < 1)$$

gilt [17]. Dabei machen die einzelnen Autoren neben (9), (10), (11) noch weitere Einschränkungen und führen ihre Untersuchungen mitunter auch in anderen Definitionsbereichen durch, so daß diese Fälle erst durch geeignete Übertragung nach S entstehen. Es ist leicht zu sehen, daß (vgl. (33) – (36)) jede Funktion $\alpha \in S$ $(\alpha > e)$ nicht nur eine, sondern unendlich viele Iterationsgruppen $G(\alpha)$ im Sinne von 2. 5 besitzt. Soweit dem Verfasser bekannt ist, haben aber bisher Untersuchungen über solchen Gesamtheiten von Iterationsgruppen in der einschlägigen Literatur

kaum Beachtung gefunden. Vielmehr konzentrierte sich das Interesse der Autoren auf die Frage, wie man von vornherein durch geeignete Fixpunktbedingungen aus der Mannigfaltigkeit aller dieser Iterationsgruppen $G(\alpha)$ eine „besonders einfache" Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$, d. h. eine mit „schönen" Fixpunkteigenschaften herausfinden kann. Dabei ist von der Mannigfaltigkeit aller dieser Iterationsgruppen ausdrücklich nie die Rede. Es liegt in der Natur der Sache, daß man sich bei einer solchen Problemstellung zunächst auf Typen von zu iterierenden Funktionen beschränkte, deren Fixpunkteigenschaften hinreichend einfach sind. Dabei ist man — soweit dem Verfasser bekannt — nicht über die Fälle (9), (10), (11) hinausgekommen und mußte auch hier weitere einschneidende Voraussetzungen hinzunehmen. Aus diesen Gründen erscheint es interessant, die Gesamtheit der Iterationsgruppen $G(\alpha)$ zu vorgegebenem α ohne Zusatzvoraussetzungen zu studieren.

Für Funktionen des Typs (8) lassen sich leicht Iterierte explizit angeben, die nicht in der „trivialen", durch (7) gegebenen Iterationsgruppe liegen.

So ist z. B. zu $\alpha(x)=2x$ die Funktion

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{17\cdot 2^k}{12} \text{ für } x\in\left[2^k, \dfrac{7\cdot 2^k}{4}\right] \\ 6x-\dfrac{17\cdot 2^k}{2} \text{ für } x\in\left[\dfrac{7\cdot 2^k}{4}, 2^{k+1}\right] \end{cases} \tag{12}$$

eine Iterierte der Ordnung $\frac{1}{2}$ und die Funktion

$$h(x)=\begin{cases} x+\dfrac{2^k}{6} \text{ für } x\in\left[2^k, \dfrac{7\cdot 2^k}{6}\right] \\ 4x-\dfrac{10\cdot 2^k}{3} \text{ für } x\in\left[\dfrac{7\cdot 2^k}{6}, \dfrac{4\cdot 2^k}{3}\right] \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{4\cdot 2^k}{3} \text{ für } x\in\left[\dfrac{4\cdot 2^k}{3}, 2^{k+1}\right] \end{cases} \tag{13}$$

eine Iterierte der Ordnung $\dfrac{1}{3}$ denn es gilt $g^2=\alpha$ bzw. $h^3=\alpha$ (siehe Abb. 1). Daß zu jeder dieser Funktionen eine Gesamtheit $f^{[s]}$ mit $f^{[\frac{1}{2}]}=g$ bzw. $f^{[\frac{1}{3}]}=h$ existiert, die eine Iterationsgruppe $G(\alpha)$ bildet, ergibt sich aus Satz 3. 2.

Aus der Definition 2. 5 ergibt sich leicht eine Monotonieeigenschaft der Iterierten, die in einer Gruppe $G(\alpha)$ liegen. Sie geht aus den folgenden Sätzen hervor:

Hilfssatz 2. 6. *Aus $h^n>e$ folgt $h>e$, wenn n eine natürliche Zahl ist.*

Beweis. Sonst gibt es wenigstens ein $x_1\in(0,\infty)$, für welches $h(x_1)\leqq x_1$ gilt. Wäre dabei für alle $x\in(0,\infty)$ $h(x)<x$, so wäre nach 2. 2 $h<e$ und daher nach 2. 4 auch $h^n<e$, was unmöglich ist. Wäre für ein $x_1\in(0,\infty)$ $h(x_1)=x_1$, so wäre $h^n(x_1)=x_1$, was auch der Voraussetzung widerspricht.

Hilfssatz 2. 7. *Aus $h^n\geqq e$ folgt $h\geqq e$, wenn n eine natürliche Zahl ist.*

BEWEIS. Wäre $h \geqq e$ nicht richtig, so würden zwei Zahlen $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ existieren, die die Eigenschaften $h(x_1) \leqq x_1$ und $h(x_2) \neq x_2$ erfüllen. Wegen der strengen Monotonie von h folgen aber daraus die Relationen $h^n(x_1) \leqq x_1$ und $h^n(x_2) \neq x_2$. Also ist $h^n \geqq e$ unmöglich, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus diesen beiden Hilfssätzen ersieht man auch leicht, daß aus $h_n < e$ bzw. $h^n \leqq e$ die Relationen $h < e$ bzw. $h \leqq e$ folgen. Insbesondere ergibt sich daraus die

Folgerung 2. 8. *Aus $h^n = e$ folgt $h = e$, wenn n ganzzahlig ist.*

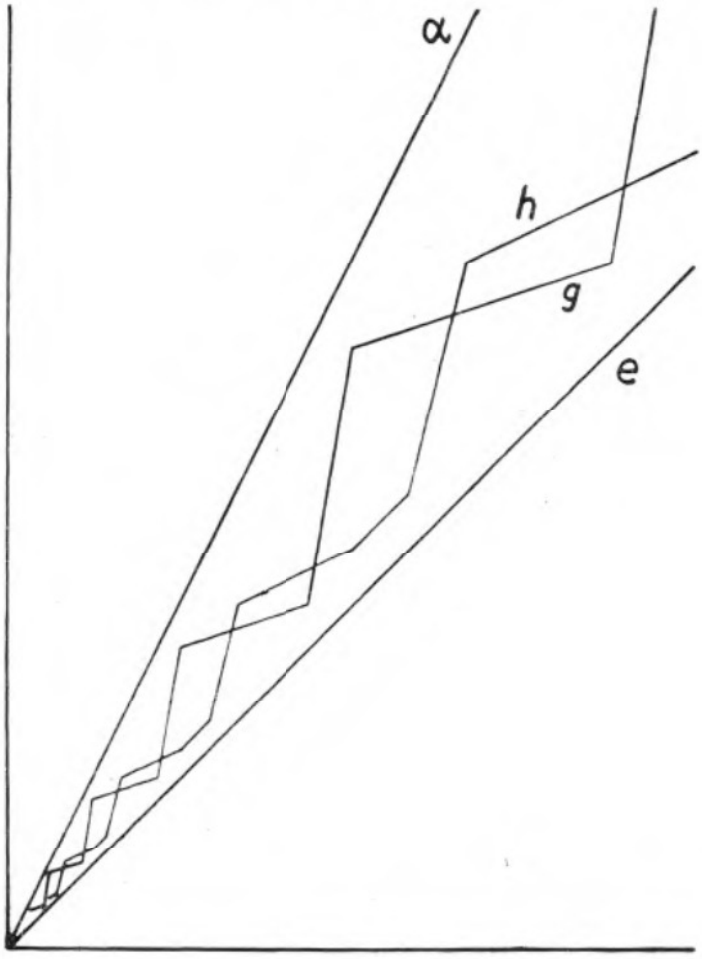

Abb. 1

Diese Folgerung steht in engem Zusammenhang mit dem Satz 3 in [19], man vergleiche auch die dort angegebene weitere Literatur.

Satz 2. 9. *Ist $G(\alpha)$ eine Iterationsgruppe von α und sind s und t beliebige rationale Zahlen mit $s < t$, so folgt für $f^{[s]}, f^{[t]} \in G(\alpha)$ stets $f^{[s]} < f^{[t]}$.*

BEWEIS. Aus $s = \frac{m}{n}$ und $t = \frac{p}{q}$ folgt wegen $mq < np$ die Beziehung $(f^{[s]})^{nq} = \alpha^{mq} < \alpha^{np} = (f^{[t]})^{nq}$,

woraus wegen der Vertauschbarkeit von $f^{[s]}$ und $f^{[t]}$ und Gleichung (6)

$$[f^{[t]}(f^{[s]})^{-1}]^{nq} = (f^{[t]})^{nq}(f^{[s]})^{-nq} > e$$

folgt. Daraus ergibt sich die Behauptung, wenn man Hilfssatz 2. 6 anwendet. Z. B. können die beiden Funktionen g und h in Abb. 1 nicht in einer Gruppe $G(\alpha)$ liegen.

Obwohl der eben bewiesene Satz keine Aussagen über die Iterierten irrationaler Ordnung macht, legt er doch die folgende Definition nahe:

Definition 2. 10. Eine Iterationsgruppe $G(\alpha)$ heiße (im Parameter) streng monoton wachsend, wenn aus $s<t$ stets $f^{[s]}<f^{[t]}$ folgt.

Da in dieser Arbeit durchweg $\alpha > e$ gelten soll, erübrigt sich die Definition monoton fallender Gruppen. Deshalb werden wir im folgenden von einer Gruppe $G(\alpha)$, die 2. 10 genügt, sagen, sie sei monoton.

Neben diesem Monotoniebegriff benutzen wir noch einen Stetigkeitsbegriff:

Definition 2. 11. Eine Iterationsgruppe $G(\alpha)$ heiße (im Parameter) stetig, wenn aus $s_n \to s$ stets

$$f^{[s_n]}(x) \to f^{[s]}(x)$$

für jedes feste $x \in [0, \infty)$ und $n \to \infty$ folgt.

Von der durch (7) festgelegten Gruppe ist leicht zu sehen, daß sie sowohl monoton als auch stetig ist. In der Arbeit [1b] wird sogar gezeigt, daß aus der Monotonie der Gruppe immer die Stetigkeit folgt und umgekehrt aus der Stetigkeit der Gruppe stets die Monotonie.

Daß es auch nichtmonotone (und also unstetige) Iterationsgruppen $G(\alpha)$ gibt, folgt leicht mit den Resultaten von HAMEL in [9]. Ist nämlich $\varphi(x)$ eine unstetige Lösung von

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \tag{14}$$

die außerdem der Bedingung

$$\varphi(1) = 1 \tag{15}$$

genügt, so erhält man zu einer vorgegebenen stetigen Iterationsgruppe $G_1(\alpha) = \{f^{[s]}\}$ eine unstetige Gruppe $G_2(\alpha) = \{g^{[s]}\}$, indem man setzt

$$g^{[s]} = f^{[\varphi(s)]}.$$

Man vergleiche hierzu auch [1a; S. 256].

Im folgenden wird nur noch von stetigen, monotonen Iterationsgruppen die Rede sein. Insbesondere wollen wir dabei eine Übersicht über die Gesamtheit aller stetigen, monotonen Iterationsgruppen $G(\alpha)$, die zu vorgegebenem α existieren, gewinnen. Dabei wird häufig von Funktionen $x+p$ und sx ($x \in (-\infty, +\infty)$; p, s beliebig reell) Gebrauch gemacht. Obwohl sie nicht in S liegen, werden für sie besondere Funktionszeichen benutzt, um sie argumentfrei schreiben zu können.

Definition 2. 12. Es sei e_p (p beliebig reell) diejenige Funktion, welche $x \in (-\infty, +\infty)$ auf $x+p$ abbildet:

$$e_p(x) = p + x. \tag{16}$$

Es sei d_s (s beliebig reell) diejenige Funktion, welche $x \in (-\infty, +\infty)$ auf sx abbildet:

$$d_s(x) = sx. \tag{17}$$

Diese Funktionen besitzen, wenn man zwischen ihnen eine Multiplikation genau so definiert wie in S (siehe (3)), folgende Eigenschaften:

$$e_0(x) = e(x) \quad \text{für} \quad x \in [0, \infty), \tag{18}$$

$$e_p e_q = e_{p+q}, \tag{19}$$

$$[e_p f](x) = f(x) + p \quad \text{mit} \quad f \in S, \tag{20}$$

$$[f e_p](x) = f(x+p) \quad \text{mit} \quad f \in S, \tag{21}$$

$$d_1(x) = e(x) \quad \text{für} \quad x \in [0, \infty), \tag{22}$$

$$d_s d_t = d_{st}, \tag{23}$$

$$[d_s f](x) = sf(x) \quad \text{für} \quad f \in S, \tag{24}$$

$$[f d_s](x) = f(sx) \quad \text{für} \quad f \in S, \tag{25}$$

$$d_s e_p = e_{sp} d_s. \tag{26}$$

Dabei ist e das Einselement der Gruppe S.

Definition 2.13. Eine auf $(-\infty, +\infty)$ erklärte, stetige und streng monoton wachsende Funktion λ, für welche

$$a) \quad \lambda e_1 = \alpha \lambda, \tag{27}$$

$$b) \quad \lambda(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{28}$$

gilt, heiße eine erzeugende Funktion für $\alpha \in S$.

Aus

$$\lim_{n \to \infty} \lambda(-n) = \lim_{n \to \infty} \alpha^{-n} \lambda(0) = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda(n) = \lim_{n \to \infty} \alpha^{n} \lambda(0) = \infty$$

ersieht man, daß $\lambda(-\infty) = 0$ und $\lambda(+\infty) = \infty$ gilt.

Bei (27) handelt es sich um die Umkehrung der Abelschen Funktionalgleichung. Setzt man nämlich $\lambda = \tau^{-1}$, so erhält man, wenn man beide Seiten der so aus (27) entstehenden Gleichung sowohl von rechts als auch von links mit τ multipliziert, die Gleichung

$$e_1 \tau = \tau \alpha$$

oder ausgeschrieben

$$\tau(x) + 1 = \tau(\alpha(x)), \tag{29}$$

also die Abelsche Funktionalgleichung. Eine Lösung λ von (27) ist also die Inverse einer Lösung der Abelschen Funktionalgleichung (29).

Daß es zu jeder Funktion $\alpha > e$ erzeugende Funktionen λ im Sinne von Def. 2.13 gibt, ist bekannt. Mit diesem Problemkreis beschäftigen sich die beiden Ar-

beiten [20], [21], man vgl. für das folgende auch [1a; S. 170 ff.]. Danach erhält man eine erzeugende Funktion λ für α, indem man auf [0, 1] eine stetige, streng monoton wachsende Funktion φ mit den Eigenschaften

$$\varphi(0)=1, \tag{30}$$

$$\varphi(1)=\alpha(1) \tag{31}$$

vorgibt und λ durch

$$\lambda(x)=\alpha^n\varphi(x-n) \quad \text{für} \quad x\in[n, n+1) \tag{32}$$

definiert. Allgemein kann gezeigt werden, daß jede erzeugende Funktion λ für α aus einer auf [0, 1] definierten Funktion φ(stetig, streng monoton wachsend) gewonnen werden kann, die die Eigenschaften

$$\varphi(0)=x_0>0 \tag{33}$$

$$\varphi(1)=\alpha(x_0) \tag{34}$$

$$\lambda(x)=\alpha^n\varphi(x-n) \quad \text{mit} \quad x\in[n, n+1) \tag{35}$$

erfüllt.

Mit λ ist auch λe_p eine erzeugende Funktion für α. Die mit Hilfe von λ konstruierbare Gesamtheit von Funktionen

$$f^{[s]}=\lambda e_s\lambda^{-1}, \quad s\in(-\infty, +\infty) \tag{36}$$

bildet eine stetige, monotone Iterationsgruppe $G(\alpha)$. Umgekehrt existiert zu jeder stetigen, monotonen Iterationsgruppe $G(\alpha)$ eine erzeugende Funktion λ derart,daß

$$f^{[s]}=\lambda e_s\lambda^{-1} \tag{37}$$

für alle $f^{[s]}\in G(\alpha)$ gilt. Eine solche Funktion λ ist mit

$$\lambda(x)=f^{[x]}(x_0), \quad x_0\in(0, \infty) \tag{38}$$

gegeben.

Ist $\mu^{-1}\lambda=e_p$, so sind die von λ bzw. μ erzeugten Gruppen $G_\lambda(\alpha)$ und $G_\mu(\alpha)$ identisch. Aber auch die Umkehrung ist richtig (man vgl. [1a, S. 35]):

Satz 2. 14. *Gilt für die Iterationsgruppen* $G_\lambda(\alpha)=\{\lambda e_s\lambda^{-1}\}$ *und* $G_\mu(\alpha)=\{\mu e_s\mu^{-1}\}$ *für alle* $s\in(-\infty, \infty)$ *die Gleichung*

$$\lambda e_s\lambda^{-1}=\mu e_s\mu^{-1}, \tag{39}$$

so gilt mit einem gewissen reellen p

$$\lambda=\mu e_p. \tag{40}$$

Beweis. Aus (39) folgt nämlich

$$\varrho e_s=e_s\varrho \tag{41}$$

mit $\mu^{-1}\lambda=\varrho$. Eine Funktion ϱ, die λ und μ in diese Beziehung bringt, muß also für alle x und s aus $(-\infty, +\infty)$ der Funktionalgleichung

$$\varrho(x+s)=\varrho(x)+s \tag{42}$$

genügen. Insbesondere muß, weil man speziell $s=-x$ setzen kann,

$$\varrho(x)=\varrho(0)+x \tag{43}$$

gelten. (43) ist also eine notwendige Bedingung für eine Lösung von (42). Umgekehrt befriedigt aber jede Funktion

$$\varrho(x)=x+p \tag{44}$$

der Form (43) die Gleichung (42). Die durch (44) gegebenen Lösungen $\varrho=e_p$ von (42) stellen also die Gesamtheit dieser Lösungen dar. Daher gilt $\mu^{-1}\lambda=\varrho=e_p$ oder

$$\lambda=\mu e_p,$$

was zu zeigen war.

Mit diesem Satz 2. 14 ist nun die umkehrbar eindeutige Zuordnung von Äquivalenzklassen erzeugender Funktionen einerseits und stetigen, monotonen Iterationsgruppen andererseits hergestellt, die für die weiteren Untersuchungen von Nutzen sein wird.

3. Struktureigenschaften der Iterationsgruppen

Nachdem wir mit (37) in Abschnitt 2 eine Darstellungsmöglichkeit für alle stetigen, monotonen Iterationsgruppen haben, wollen wir uns nun für Eigenschaften solcher Gruppen $G(\alpha)$ interessieren. Wegen der oben hergeleiteten Zuordnung zu den Äquivalenzklassen erzeugender Funktionen ist klar, daß die Mächtigkeit aller Iterationsgruppen $G(\alpha)$ zu festem α gleich der Mächtigkeit des Kontinuums ist (man vgl. z. B. [14], Kap. I, § 5, Satz 6).

Eine einfache Eigenschaft der Iterationsgruppen $G(\alpha)$ ist z. B. die, daß der Durchschnitt aller dieser Gruppen gerade aus den ganzzahligen Iterierten von α besteht, d. h. aus den Funktionen

$$\ldots,\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-1},\ e,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ldots \tag{45}$$

Interessanter ist die Frage, durch welche (möglichst einfachen) Bedingungen aus dem Kontinuum der Gruppen $G(\alpha)$ eine Gruppe eindeutig ausgewählt werden kann. Mit dieser Problemstellung wollen wir uns in diesem Abschnitt hauptsächlich beschäftigen. Bevor wir das tun, definieren wir noch den Begriff der Iteriertenklasse:

Definition 3. 1. Die Iteriertenklasse $F(s;\alpha)$ sei die Menge aller Funktionen

$$\lambda e_s \lambda^{-1}, \tag{46}$$

wobei λ die Menge aller erzeugenden Funktionen für α durchläuft und s fest ist.

Z. B. hat man unter $F(\frac{1}{7};\alpha)$ die Menge aller Iterierten der Ordnung $\frac{1}{7}$ von α zu verstehen.

Wir zeigen zunächst, daß eine endliche Anzahl vorgegebener Iterierter rationaler Ordnung von α die Gruppe $G(\alpha)$, in der sie liegen, nicht eindeutig festlegen.

Satz 3. 2. *Eine Funktion λ erzeugt genau dann eine solche Iterationsgruppe $G(\alpha)$, in der die Funktionen $f_i \in F\left(\frac{m_i}{n}; \alpha\right)$ $(1 \leqq i \leqq k;\ m_i, n$ ganz; $n>0;\ m_i \neq m_j$ für alle $i \neq j$ mit $1 \leqq i, j \leqq k;\ (m_1, m_2, \ldots, m_k, n)=1)$ liegen, wenn*

1. *für je zwei Funktionen f_i, f_j die Beziehung $f_i f_j = f_j f_i$ gilt,*
2. *λ der Funktionalgleichung*

$$\lambda e_{\frac{1}{n}} = g\lambda \tag{47}$$

genügt, wobei $g = \alpha^q f_1^{p_1} f_2^{p_2} \ldots f_k^{p_k}$ ist und $p_1, p_2, \ldots, p_k, q$ irgendwelche durch

$$\sum_{i=1}^{k} p_i m_i + qn = 1$$

bestimmte ganze Zahlen sind.

Aus diesem Satz ersieht man, daß zu n beliebigen (paarweise vertauschbaren) rationalen Iterierten von α immer eine Gruppe $G(\alpha)$ gefunden werden kann, in der sie alle liegen. Eine solche Gruppe $G(\alpha)$ ist nicht eindeutig bestimmt, denn die Gleichung (47) besitzt ebenso wie (27) unendlich viele Lösungen.

Beweis. Zunächst ist klar, daß wegen $f_i \in F\left(\frac{m_i}{n}; \alpha\right)$ alle f_i auch mit α vertauschbar sind. Weiter bringt die Forderung $(m_1, m_2, \ldots, m_k, n)=1$ keine Einschränkung der möglichen Fälle mit sich, denn man kann k Zahlen $\frac{m_i}{n}$ immer so darstellen, daß dieser größte gemeinsame Teiler gleich 1 ist. Daraus folgt, daß g nicht von der speziellen Wahl der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k, q$ abhängt. Ist nämlich $p_1', p_1', \ldots, p_k', q'$ ein weiteres $(k+1)$-Tupel von ganzen Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{k} p_i' m_i + q' n = 1,$$

so gilt für die Funktion $g' = \alpha^{q'} f_1^{p_1'} f_2^{p_2'} \ldots f_k^{p_k'}$ wegen der Vertauschbarkeitsforderung

$$\begin{aligned}
(g'g^{-1})^n &= (\alpha^{q'-q} f_1^{p_1'-p_1} f_2^{p_2'-p_2} \ldots f_k^{p_k'-p_k})^n \\
&= (\alpha^{q'-q})^n (f_1^{p_1'-p_1})^n (f_2^{p_2'-p_2})^n \ldots (f_k^{p_k'-p_k})^n = \\
&= \alpha^{(q'-q)n} (f_1^n)^{p_1'-p_1} (f_2^n)^{p_2'-p_2} \ldots (f_k^n)^{p_k'-p_k} = \\
&= \alpha^{(q'-q)n} (\alpha^{m_1})^{p_1'-p_1} (\alpha^{m_2})^{p_2'-p_2} \ldots (\alpha^{m_k})^{p_k'-p_k} = \\
&= \alpha^{(m_1 p_1' + m_2 p_2' + \ldots + m_k p_k' + nq') - (m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_k p_k + nq)} = e,
\end{aligned}$$

woraus mit 2. 8 sofort $g' = g$ folgt.

a) Es sei $f_i f_j = f_j f_i$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$ und $\lambda e_{\frac{1}{n}} = g\lambda$. Wegen (19) gilt $e_1 = (e_{\frac{1}{n}})^n$ und wegen $f_i^n = \alpha^{m_i}$ auch $f_i^{p_i n} = \alpha^{p_i m_i}$. Daher ist, wenn man die Vertauschbarkeit der f_i benutzt, nun leicht zu zeigen, daß λ eine erzeugende Funktion für α ist:

$$\lambda e_1 = \lambda (e_{\frac{1}{n}})^n = (\lambda e_{\frac{1}{n}} \lambda^{-1})^n \lambda = g^n \lambda = \alpha^{qn} f_1^{p_1 n} f_2^{p_2 n} \ldots f_k^{p_k n} \lambda = \alpha^{qn} \alpha^{m_1 p_1} \ldots \alpha^{m_k p_k} \lambda = \alpha\lambda.$$

Weiter ist leicht zu sehen, daß für alle i, j mit $1 \leqq i, j \leqq k$ die Relation $f_i \in F\left(\frac{m_i}{m_j}, f_j\right)$ gilt. Nach Satz 4. 5 ist nämlich für diese Bedingung notwendig und hinreichend, daß $f_i f_j = f_j f_i$ gilt (was hier erfüllt ist) und daß

$$f_i^{m_j} = f_j^{m_i}$$

gilt. Diese letzte Gleichung ist aber leicht zu beweisen. Es ist

$$\left(f_i^{m_j} f_j^{-m_i}\right)^n = f_i^{nm_j} f_j^{-nm_i} = \alpha^{m_i m_j - m_j m_i} = e,$$

woraus mit 2. 8 die gewünschte Beziehung $f_i^{m_j} = f_j^{m_i}$ folgt.

Nun kann man leicht zeigen, daß die f_j, wie es sein muß, in der von λ erzeugten Gruppe liegen:

$$f_i = (f_i)^{p_1 m_1 + \ldots + p_k m_k + qn} = f_i^{m_1 p_1} f_i^{m_2 p_2} \ldots f_k^{m_k p_k} \alpha^{m_i q} =$$

$$= f_1^{m_i p_1} f_2^{m_i p_2} \ldots f_k^{m_i p_k} \alpha^{m_i q} = g^{m_i} = g^{m_i} \lambda \lambda^{-1} =$$

$$= \lambda \left(e_{\frac{1}{n}}\right)^{m_i} \lambda^{-1} = \lambda e_{\frac{m_i}{n}} \lambda^{-1}.$$

Also liegt f_i in $G(\alpha) = \{\lambda e_s \lambda^{-1}\}$.

b) Es erzeuge λ eine Iterationsgruppe $G(\alpha)$, in der alle die $f_i (i = 1, \ldots, k)$ liegen. Dann ist $f_i f_j = f_j f_i$ trivialerweise erfüllt und die Funktionalgleichung $\lambda e_{\frac{1}{n}} = g\lambda$ ersieht man aus

$$g\lambda = \alpha^q f_1^{p_1} f_2^{p_2} \ldots f_k^{p_k} \lambda = \alpha^q \left(\lambda e_{\frac{m_1}{n}} \lambda^{-1}\right)^{p_1} \left(\lambda e_{\frac{m_2}{n}} \lambda^{-1}\right)^{p_2} \ldots \left(\lambda e_{\frac{m_k}{n}} \lambda^{-1}\right)^{p_k} \lambda =$$

$$= \alpha^q \lambda e_{\frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_k p_k}{n}} = \lambda e_q e_{\frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_k p_k}{n}} = \lambda e_{\frac{1}{n}},$$

wenn man (19) berücksichtigt. Das aber war zu zeigen.

Ist jedoch f eine irrationale Iterierte von α, so liegen die Verhältnisse ganz anders:

Satz 3. 3. *Ist s irrational und $f \in F(s; \alpha)$, so gibt es genau eine Iterationsgruppe $G(\alpha)$, in der f liegt.*

Beweis. Wegen der Zugehörigkeit von f zu $F(s; \alpha)$ gibt es wenigstens ein λ, so daß $f = \lambda e_s \lambda^{-1}$ gilt. Mit f und α liegen dann aber auch alle Produkte der Form $\alpha^n f^m$ in der von λ erzeugten Gruppe $G(\alpha)$ und es gilt

$$\alpha^n f^m = \lambda e_n \lambda^{-1} \lambda e_{ms} \lambda^{-1} = \lambda e_{n+sm} \lambda^{-1}.$$

Ist μ eine weitere erzeugende Funktion für α und gilt $f = \mu e_s \mu^{-1}$, so hat man auch

$$\alpha^n f^m = \mu e_{n+sm} \mu^{-1}.$$

Es gilt daher für beliebige ganze Zahlen n und m die Beziehung

$$\lambda e_{n+sm} \lambda^{-1} = \mu e_{n+sm} \mu^{-1} \tag{48}$$

oder

$$\varrho e_{n+sm} = e_{n+sm} \varrho, \tag{49}$$

was mit (48) gleichbedeutend ist, wenn man $\varrho = \mu^{-1}\lambda$ setzt. Befriedigt aber eine auf $(-\infty, +\infty)$ definierte, stetige Funktion ϱ alle Funktionalgleichungen (49), so genügt sie wegen der Stetigkeit von ϱ und e_{n+sm} (und weil die Zahlen $n+sm$ in der Menge aller reellen Zahlen dicht liegen) auch allen Funktionalgleichungen

$$\varrho(x+t) = \varrho(x) + t, \tag{50}$$

wobei in (50) t alle reellen Zahlen durchläuft.

Als Lösungen von (50) kommen aber, wie wir aus Satz 2. 14 wissen, nur die Funktionen $\varrho = e_p$ in Frage. Daher ist $\lambda = \mu e_p$ und μ erzeugt die gleiche Iterationsgruppe wie λ.

Will man eine Iterationsgruppe durch rationale Iterierte eindeutig festlegen, so muß man unendlich viele rationale Iterierte heranziehen:

Satz 3. 4. *Es sei eine beliebige Iterationsgruppe $G(\alpha)$ und eine unendliche Menge R rationaler Zahlen gegeben. Besitzt die Menge*

$$R^* = \{r+m : r \in R \text{ und } m \text{ ganzzahlig}\} \tag{51}$$

einen Häufungspunkt, so ist die Gruppe $G(\alpha)$ durch die Teilmenge

$$\{f^{[r]} \in G(\alpha) : r \in R\} \tag{52}$$

ihrer Iterierten eindeutig festgelegt.

Beweis. Es sei λ die erzeugende Funktion für $G(\alpha)$. Wenn der Satz richtig ist, so muß für jede erzeugende Funktion μ, für welche

$$\lambda e_r \lambda^{-1} = \mu e_r \mu^{-1} \quad \text{für alle} \quad r \in R \tag{53}$$

gilt, auch $\lambda = \mu e_p$ gelten. Das wollen wir zeigen. Ist m beliebig ganzzahlig, so gilt wegen (53) und (27)

$$\lambda e_{r+m} \lambda^{-1} = \alpha^m \lambda e_r \lambda^{-1} = \alpha^m \mu e_r \mu^{-1} = \mu e_{r+m} \mu^{-1},$$

so daß sogar

$$\lambda e_\varrho \lambda^{-1} = \mu e_\varrho \mu^{-1} \quad \text{für alle} \quad \varrho \in R^* \tag{54}$$

und daher auch für $\varrho_1, \varrho_2 \in R^*$

$$\lambda e_{\varrho_1 - \varrho_2} \lambda^{-1} = \mu e_{\varrho_1 - \varrho_2} \mu^{-1} \tag{55}$$

gilt. Ist nun (a, b) ein beliebiges Intervall, so existiert sicher ein $\varrho \in (a, b)$ mit

$$\lambda e_\varrho \lambda^{-1} = \mu e_\varrho \mu^{-1}. \tag{56}$$

Es gibt nämlich (da R^* einen Häufungspunkt hat) sicher zwei Zahlen ϱ_1, ϱ_2 mit $|\varrho_1 - \varrho_2| < b - a$. Daher liegt wenigstens ein ganzzahliges Vielfaches $\varrho = m|\varrho_2 - \varrho_1|$ in (a, b) und es gilt

$$\lambda e_\varrho \lambda^{-1} = [\lambda e_{|\varrho_2 - \varrho_1|} \lambda^{-1}]^m = [\mu e_{|\varrho_2 - \varrho_1|} \mu^{-1}]^m = \mu e_\varrho \mu^{-1}.$$

Also liegen die reellen Zahlen ϱ, für welche (56) gilt, in der Menge der reellen Zahlen

dicht. Da man aber mit den Elementen einer dichtliegenden Menge jede reelle Zahl approximieren kann, gilt

$$\lambda e_s \lambda^{-1} = \mu e_s \mu^{-1} \tag{57}$$

für alle reellen s wegen der Stetigkeit von $G(\alpha)$. Aus (57) folgt nach Satz 2. 14. $\lambda = \mu e_p$. Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt wegen $R \subset R^*$, daß $G(\alpha)$ insbesondere dann eindeutig festgelegt ist, wenn R einen Häufungspunkt besitzt. Das ist aber nicht notwendig. Ist z. B.

$$R = \left\{ n + \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

so besitzt R keinen Häufungspunkt, wohl aber R^*, denn es gilt

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \subset R^*.$$

Abschließend vermerken wir noch eine Eigenschaft von Iterationsgruppen, von der später Gebrauch gemacht wird:

Satz 3. 5. *Jede Iterationsgruppe $G(\alpha)$ bildet eine schlichte Überdeckung des ersten Quadranten.*

(Es sei hier nochmals an die durchweg gemachte Voraussetzung erinnert, daß $\alpha > e$ gelten soll, ohne die dieser Satz falsch wäre!)

BEWEIS. Es sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt der x, y-Ebene mit $x_0, y_0 \in (0, \infty)$. Ist λ die zu $G(\alpha)$ gehörende erzeugende Funktion, so verläuft die $[\lambda^{-1}(y_0) - \lambda^{-1}(x_0)]$-te Iterierte durch (x_0, y_0), denn es gilt für

$$s = \lambda^{-1}(y_0) - \lambda^{-1}(x_0)$$

$$\lambda e_s \lambda^{-1}(x_0 \; = \lambda\left(\lambda^{-1}(x_0) + \lambda^{-1}(y_0) - \lambda^{-1}(x_0)\right) = y_0.$$

Daß die Überdeckung schlicht ist, folgt aus der Monotonie der Gruppe.

4. Struktureigenschaften der Iteriertenklassen

Nachdem im Abschnitt 3 Eigenschaften der Iterationsgruppen untersucht wurden, wollen wir und nun den Eigenschaften der durch 3. 1 definierten Iteriertenklassen $F(s; \alpha)$, deren jede also aus der Gesamtheit aller Iterierten einer festen Ordnung s von α besteht, zuwenden. Dabei soll uns zunächst die Ordnungsstruktur dieser Klassen im Sinne der in 2. 2 eingeführten t-Ordnung interessieren.

Satz 4. 1. *Liegt zwischen zwei reellen Zahlen s_1 und s_2 eine ganze Zahl k, gilt also $s_1 < k < s_2$, so gilt für je zwei Funktionen $f_1 \in F(s_1; \alpha)$, $f_2 \in F(s_2; \alpha)$*

$$f_1 < f_2. \tag{58}$$

Der Beweis dieses Satzes ist unmittelbar klar.

Lassen sich jedoch s_1 und s_2 durch keine ganze Zahl trennen, so gilt (58) nicht uneingeschränkt. Zwar kann man auch dann Elemente f_1, f_2 finden, für welche (58)

erfüllt ist (man wähle sie etwa aus der gleichen Gruppe $G(\alpha)$), jedoch gilt der folgende

Satz 4. 2. *Ist k eine ganze Zahl und sind s_1, s_2 zwei reelle Zahlen mit $k<s_1 \leqq \leqq s_2<k+1$, so existiert zu einem beliebig aus $F(s_1;\alpha)$ gewählten f_1 stets ein $f_2 \in F(s_2;\alpha)$, für welches*

$$f_1 < f_2 \tag{59}$$

nicht gilt.

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $k=0$. Es sei λ eine solche erzeugende Funktion für α, für die

$$f_1 = \lambda e_{s_1} \lambda^{-1}$$

gilt. Wir definieren eine Funktion μ durch die Bedingungen

$$\mu(0) = \lambda(0),$$

$$\mu(s_2) = \frac{\lambda(s_1)+\lambda(0)}{2}, \tag{60}$$

$$\mu(1) = \lambda(1)$$

und die Vereinbarung, daß μ auf den Intervallen $[0, s_2]$ und $[s_2, 1]$ linear ist. Damit ist μ auf $[0, 1]$ festgelegt. Für $x \in [l, l+1]$ (l ganzzahlig) gelte weiter

$$\mu(x) = \alpha^l \mu(x-l).$$

Die so auf $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktion μ ist eine erzeugende Funktion für α. Setzt man nun $f_2 = \mu e_{s_2} \mu^{-1}$, so wäre, wenn (59) gelten würde, insbesondere $f_1\lambda(0) < f_2\lambda(0)$. Es ist jedoch wegen (60) und $\lambda(0) < \lambda(s_1)$

$$f_1\lambda(0) = \lambda e_{s_1}\lambda^{-1}\lambda(0) = \lambda(s_1) > \mu(s_2) = \mu e_{s_2}\mu^{-1}\mu(0) = f_2\lambda(0).$$

Der Fall $k<s_1 \leqq s_2<k+1$ läßt sich leicht auf den soeben behandelten zurückführen, wie man aus

$$\alpha^k F(s;\alpha) = F(s+k;\alpha)$$

erkennt, wobei $F(s;\alpha)$, $F(s+k;\alpha)$ als Komplexe in S aufgefaßt werden. Die Abb. 1 in Abschnitt 1 veranschaulicht diesen Satz.

Der Satz 4. 2 läßt sich im Falle $s_1 = s_2$ erheblich verschärfen:

Satz 4. 3. *Sind $f_1, f_2 \in F(s_0;\alpha)$, so ist die Relation*

$$f_1 < f_2$$

unmöglich.

Zwei Iterierte aus der gleichen Iteriertenklasse stehen also niemals in einer Ordnungsbeziehung gemäß 2. 2, was geometrisch bedeutet, daß es in $(0, \infty)$ Punkte x^* gibt, für welche $f_1(x^*) = f_2(x^*)$ gilt.

BEWEIS. Angenommen, es wäre $f_1 < f_2$ möglich. Es seien λ, μ zwei erzeugende Funktionen für α, für welche

$$f_1 = \lambda e_{s_0} \lambda^{-1},\ f_2 = \mu e_{s_0} \mu^{-1}$$

gilt. Es sei weiter $x_1 \in (0, \infty)$ beliebig gewählt. Auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_1, \alpha(x_1)]$ seien nun zwei Funktionen f_3 und f_4 definiert durch

$$f_3(x) = \frac{2f_1(x) + f_2(x)}{3},\ f_4(x) = \frac{f_1(x) + 2f_2(x)}{3}. \tag{61}$$

Dann gilt dort $f_1(x) < f_3(x) < f_4(x) < f_2(x)$. Es sei nun s_1 definiert als

$$s_1 = \inf \{s: \exists x \in [x_1, \alpha(x_1)] \text{ mit } \lambda e_s \lambda^{-1}(x) = f_3(x)\}. \tag{62}$$

s_1 existiert, weil einmal nach Satz 3. 5 die Menge $\{s: \ldots\}$ in (62) nicht leer sein kann und weil s_0 eine untere Schranke für sie ist. Es gilt $s_0 < s_1$. Weiter sei s_2 definiert durch

$$s_2 = \sup \{s: \exists x \in [x_1, \alpha(x_1)] \text{ mit } \mu e_s \mu^{-1}(x) = f_4(x)\}. \tag{63}$$

Wie oben ist die Existenz auch von s_2 gesichert und es gilt $s_2 < s_0$. Sind nun r_1, r_2 zwei rationale Zahlen mit

$$s_2 < r_2 < s_0 < r_1 < s_1 \tag{64}$$

und setzt man

$$f_{11} = \lambda e_{r_1} \lambda^{-1},\ f_{22} = \lambda e_{r_2} \lambda^{-1}, \tag{65}$$

so ist wegen (62) und (63)

$$f_1(x) < f_{11}(x) < f_3(x) < f_4(x) < f_{22}(x) < f_2(x)$$

für $x \in [x_1, \alpha(x_1)]$. Da alle in der letzten Ungleichung vorkommenden Funktionen (mit Ausnahme von f_3 und f_4) mit α vertauschbar sind, gilt

$$f_1 < f_{11} < f_{22} < f_2, \tag{66}$$

also insbesondere $f_{11} < f_{22}$, was aber mit (64) und (65) unvereinbar ist. Setzt man nämlich

$$r_1 = \frac{m_1}{n_1},\ r_2 = \frac{m_2}{n_2}\ (n_1, n_2 > 0),$$

so folgt mit (66)

$$\alpha^{m_1 n_2} = f_{11}^{n_1 n_2} > f_{22}^{n_1 n_2} = \alpha^{m_2 n_1},$$

und daraus $m_1 n_2 < m_2 n_1$, also $r_1 < r_2$, was der Annahme (64) widerspricht. Unter der Annahme $f_1 < f_2$ konnten wir also zeigen, daß aus $r_2 < r_1$ die Ungleichung $r_1 < r_2$ folgt. Also war die Annahme falsch, was zu zeigen war.

In engem Zusammenhang hiermit steht die Eigenschaft jeder Iteriertenklasse $F(s; \alpha)$ mit $s \in (k, k+1)$, das Innere des „Sektors", der von α^k und α^{k+1} aus dem ersten Quadranten herausgeschnitten wird, zu überdecken (k ganzzahlig):

Satz 4. 4. *Ist* $x_1 \in (0, \infty)$ *und* $y_1 \in (\alpha^k(x_1), \alpha^{k+1}(x_1))$, *so existiert zu jedem* $s \in (k, k+1)$ *ein* $f \in F(s; \alpha)$ *mit*

$$f(x_1) = y_1. \tag{67}$$

BEWEIS. Wie in Satz 4. 2 kann man sich auf den Fall $k=0$ beschränken. Man hat dann eine erzeugende Funktion λ zu konstruieren, so daß $f = \lambda e_s \lambda^{-1}$ mit vorgegebenem $s \in (0, 1)$ die Behauptung (67) erfüllt. Wählt man λ so, daß

$$\lambda(0) = x_1, \ \lambda(s) = y_1$$

gilt, was wegen $0 < s < 1$ und $x_1 < y_1 < \alpha(x_1)$ ja möglich ist, so gilt

$$f(x_1) = \lambda e_s \lambda^{-1}(x_1) = \lambda e_s(0) = \lambda(s) = y_1,$$

was zu zeigen war.

Es wäre interessant, von einer Funktion $f \in S$ entscheiden zu können, ob sie in $F(s; \alpha)$ liegt, ohne die erzeugende Funktion λ zu kennen, vermöge deren f in der Form $f = \lambda e_s \lambda^{-1}$ dargestellt werden kann. Solchen Untersuchungen ist der Rest dieses Abschnitts gewidmet. Dabei nehmen wir zunächst an, daß s rational ist.

Satz 4. 5. *Eine Funktion* $f \in S$ *liegt genau dann in* $F\left(\frac{m}{n}; \alpha\right)$ (m, n *ganzzahlig,* $n > 0$), *wenn*

$$f^n = \alpha^m, \tag{68}$$

$$\alpha f = f \alpha \tag{69}$$

gilt.

BEWEIS.

1. Liegt f in $F\left(\frac{m}{n}; \alpha\right)$, so existiert ein λ mit $f = \lambda e_{\frac{m}{n}} \lambda^{-1}$ und wegen

$$f^n = \lambda e_m \lambda^{-1} = \alpha^m,$$

$$\alpha f = \lambda e_1 \lambda^{-1} \lambda e_{\frac{m}{n}} \lambda^{-1} = \lambda e_{\frac{m}{n}+1} \lambda^{-1} = \lambda e_{\frac{m}{n}} \lambda^{-1} \lambda e_1 \lambda^{-1} = f \alpha$$

sind die Bedingungen (68) und (69) erfüllt.

2. Gelten für f die Bedingungen (68) und (69), so unterscheiden wir zwei Fälle:

a) $(m, n) = 1$. Dann existieren zwei ganze Zahlen r und s mit $rm + sn = 1$. Wir bilden die Funktion $g = f^r \alpha^s$, für welche wegen der Vertauschbarkeit von f und α

$$g^n = (f^r \alpha^s)^n = f^{rn} \alpha^{sn} = \alpha^{mr+ns} = \alpha$$

gilt. Wegen $\alpha > e$ und Hilfssatz 2. 6 ist $g > e$. Es sei nun μ eine erzeugende Funktion für g. Es gilt also nach (27) $\mu e_1 = g\mu$. Dann ist $\lambda = \mu d_n$ (man vgl. Definition 2. 12) eine erzeugende Funktion für α, denn es gilt wegen (26) und (27)

$$\lambda e_1 = \mu d_n e_1 = \mu e_n d_n = g^n \mu d_n = g^n \lambda.$$

Da aber außerdem

$$g^m=(f^r\alpha^s)^m=f^{rm}\alpha^{sm}=f^{rm+sn}=f$$

gilt, so ist wegen $\lambda d_{\frac{1}{n}}=\mu$ und (26)

$$f=g^m=\mu e_m\mu^{-1}=\mu e_m d_n\lambda^{-1}=\mu d_n e_{\frac{m}{n}}\lambda^{-1}=\lambda e_{\frac{m}{n}}\lambda^{-1},$$

also $f\in F\left(\frac{m}{n};\alpha\right)$.

b) $(m, n)=t\neq 1$. Dann setzen wir $m=tm'$ und $n=tn'$, so daß $(m', n')=1$ und $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ gilt. Dann ist nicht nur — wie in (68) vorausgesetzt — $f^n=\alpha^m$, sondern auch $f^{n'}=\alpha^{m'}$. Wäre nämlich $f^{n'}\neq\alpha^{m'}$, so würde ein $h\neq e$ existieren mit $f^{n'}=h\alpha^{m'}$. h wäre weiter mit $\alpha^{m'}$ vertauschbar, denn

$$h\alpha^{m'}=f^{n'}=\alpha^{m'}f^{n'}\alpha^{-m'}=\alpha^{m'}.$$

Wegen $f^n=\alpha^m$ ist $\alpha^m=(h\alpha^{m'})^t=h^t\alpha^m$ und also $h^t=e$, woraus (mit Folgerung 2. 8) $h=e$ folgt. Also ist $f^{n'}=\alpha^{m'}$ und Fall b auf Fall a zurückgeführt.

Die Bedingung (69) in Satz 4. 5 kann nicht weggelassen werden, d. h., aus $f^n=\alpha^m$ folgt noch nicht $f\in F\left(\begin{matrix}m\\n\end{matrix};\alpha\right)$. Das sieht man aus dem folgenden Beispiel:

Für jede Funktion $f\in F(\frac{1}{3};\alpha^2)$ gilt wegen 4. 1 die Beziehung $x_1<f(x_1)<\alpha^2(x_1)$, wobei $x_1\in(0,\infty)$ gewählt wurde. Außerdem gilt aber $x_1<\alpha(x_1)<\alpha^2(x_1)$. Ersetzt man in Satz 4. 4 k durch 0 und α durch α^2, so besagt er, daß zu beliebig vorgegebenem $y_1\in(x_1,\alpha^2(x_1))$ ein $f\in F(\frac{1}{3};\alpha^2)$ existiert mit $f(x_1)=y_1$. Insbesondere ist das richtig, wenn man $y_1\in(\alpha(x_1),\alpha^2(x_1))$ wählt. Dann gilt also $\alpha(x_1)<f(x_1)<\alpha^2(x_1)$. Es ist also $f\prec\alpha$ nicht richtig und daher ist $f\notin F(\frac{2}{3};\alpha)$.

(69) ist aber in der einschlägigen Literatur nicht immer berücksichtigt worden. So muß in [10] zu der Formel (2) auf S. 414 (sie entspricht hier (68)) die Bedingung (69) hinzugefügt werden, wenn F (entspricht hier f) Iterierte der Ordnung $\frac{m}{n}$ von G sein soll (G entspricht hier α).

Ist jedoch $m=1$, so folgt (69) aus (68), denn es gilt dann $\alpha f=f^nf=ff^n=f\alpha$.

Folgerung 4. 6. *$F(s;\alpha)$ enthält dann und nur dann genau ein Element, wenn s ganzzahlig ist.*

Beweis. Ist s ganzzahlig, also (Satz 4. 5) $n=1$, so ist klar, daß in $F(m;\alpha)$ nur ein Element liegen kann, nämlich wegen (68) $f=\alpha^m$.

Ist s nicht ganzzahlig, so enthält $F(s;\alpha)$ nach Satz 4. 4 unendlich viele Elemente.

Die durch Satz 4. 5 angegebene Charakterisierung der Elemente von $F\left(\frac{m}{n};\alpha\right)$ läßt sich nicht auf die Iteriertenklassen $F(s;\alpha)$ mit irrationalem s übertragen, weil eine Beziehung (68) mit ganzen Zahlen m und n hier nicht möglich ist. Deshalb

soll im folgenden für irrationale Iterierte eine ganz andere Charakterisierung angegeben werden.

Eine reelle Zahl s ist bekanntlich genau dann irrational, wenn die Menge

$$M_s=\{p+sq\colon p, q \text{ ganzzahlig}\}$$

dicht in der Menge aller reellen Zahlen liegt. Dabei sind p und q durch $p+sq$ eindeutig bestimmt. Überträgt man nun in geeigneter Weise diese Dichteeigenschaft auf Iterierte, so lassen sich hierdurch die Iterierten irrationaler Ordnung charakterisieren.

Ist β eine Iterierte der irrationalen Ordnung s von α, so betrachten wir die Menge

$$M_\beta=\{\alpha^p\beta^q\colon p,q, \text{ ganzzahlig}\}.$$

Dann ist $\alpha^p\beta^q\in F(p+sq;\alpha)$. Als Untergruppe einer Iterationsgruppe $G(\alpha)$, die das Innere des ersten Quadranten schlicht überdeckt, hat M_β die Eigenschaft:

E1: Zu jedem Paar (x_0, y_0) reeller Zahlen mit $x_0, y_0\in(0, \infty)$ existiert höchstens ein Paar ganzer Zahlen (p, q), so daß

$$\alpha^p\beta^q(x_0)=y_0 \tag{70}$$

gilt.

Aus der Stetigkeit der Gruppe folgt die Eigenschaft:

E2: Zu jedem Tripel (x_0, y_0, ε) reeller Zahlen mit $x_0, y_0, \varepsilon\in(0, \infty)$ existiert wenigstens ein Paar ganzer Zahlen (p, q), so daß

$$y_0-\varepsilon<\alpha^p\beta^q(x_0)<y_0+\varepsilon \tag{71}$$

gilt.

Schließlich folgt aus (5) die Vertauschbarkeit von α und β als

E3: Die Funktion β ist mit α vertauschbar, es gilt also

$$\alpha\beta=\beta\alpha. \tag{72}$$

Die Bedingungen $E1$ bis $E3$ sind notwendige Bedingungen dafür, daß β eine irrationale Iterierte von α ist. Wir wollen nun schrittweise zeigen, daß sie auch hinreichend sind. Wenn wir dabei außerdem noch $\beta>e$ voraussetzen, so ist das keine wesentliche Einschränkung, denn mit $\beta<e$ ist $\beta^{-1}>e$ (von α ist nach wie vor $\alpha>e$ vorausgesetzt).

Satz 4. 7. *Besitzen zwei Funktionen α und β die Eigenschaft $E1$ und ist $\beta>e$, so existiert zu jedem natürlichen l eine natürliche Zahl $\mu(l, \beta)$, so daß*

$$\alpha^{\mu(l,\beta)-1}<\beta^l<\alpha^{\mu(l,\beta)} \tag{73}$$

gilt.

Beweis. Wäre das nicht der Fall, so würde für wenigstens ein $x_0\in(0, \infty)$ $\beta^l(x_0)=$ $=\alpha^k(x_0)$ gelten. Das widerspricht aber $E1$, denn mit $(p_1, q_1)=(k, 0)$ und $(p_2, q_2)=$ $=(0, l)$ hat man schon zwei Paare ganzer Zahlen, für die (70) gilt. Es existiert also ein ganzzahliges $\mu(l, \beta)$ mit $\alpha^{\mu(l,\beta)-1}<\beta^l<\alpha^{\mu(l,\beta)}$. Wegen $\beta^l>e$ muß daher $\alpha^{\mu(l,\beta)}>e$ sein. d. h. die ganzen Zahlen $\mu(l, \beta)$ sind natürliche Zahlen, was zu zeigen war.

Satz 4. 8. *Gelten für die Funktionen α und β die Voraussetzungen von Satz 4. 7, so existiert eine positive reelle Zahl s der Gestalt*

$$s=\lim_{l\to\infty}\frac{\mu(l,\beta)}{l}. \tag{74}$$

BEWEIS. Sind l_1 und l_2 zwei natürliche Zahlen, so folgen aus den Ungleichungen

$$\alpha^{\mu(l_1,\beta)-1}<\beta^{l_1}<\alpha^{\mu(l_1,\beta)},$$

$$\alpha^{\mu(l_2,\beta)-1}<\beta^{l_2}<\alpha^{\mu(l_2,\beta)}$$

durch Potenzierung mit l_2 bzw. l_1 die Ungleichungen

$$\alpha^{l_2[\mu(l_1,\beta)-1]}<\beta^{l_1l_2}<\alpha^{l_2\mu(l_1,\beta)},$$

$$\alpha^{l_1[\mu(l_2,\beta)-1]}<\beta^{l_1l_2}<\alpha^{l_1\mu(l_2,\beta)}.$$

Verknüpft man diese Ungleichungen kreuzweise, so erhält man

$$l_2[\mu(l_1,\beta)-1]<l_1\mu(l_2,\beta),$$

$$l_1[\mu(l_2,\beta)-1]<l_2\mu(l_1,\beta).$$

Daraus aber folgt

$$-\frac{1}{l_2}<\frac{\mu(l_1,\beta)}{l_1}-\frac{\mu(l_2,\beta)}{l_2}<\frac{1}{l_1}. \tag{74*}$$

Wählt man darin $l_1, l_2>L$, so ist

$$\left|\frac{\mu(l_1,\beta)}{l_1}-\frac{\mu(l_2,\beta)}{l_2}\right|<\frac{1}{L},$$

woraus (74) folgt.

Hilfssatz 4. 9. *Gilt für die Funktionen α und β E3 und ist $e<\beta$, so existiert eine natürliche Zahl k mit*

$$\beta<\alpha^k. \tag{75}$$

BEWEIS. Es sei $x_1\in(0,\infty)$ beliebig gewählt. Wegen $\alpha>e$ gilt $\lim_{l\to\infty}\alpha^l(x_1)=\infty$ und es existiert eine natürliche Zahl k mit

$$\alpha^k(x_1)>\beta\alpha(x_1).$$

Ein so gewähltes k erfüllt die Behauptung (75) des Satzes. Ist nämlich $x\in[x_1,\alpha(x_1)]$, so gilt

$$\alpha^k(x)\geqq\alpha^k(x_1)>\beta\alpha(x_1)\geqq\beta(x).$$

Ist $x\in[\alpha^m(x_1),\alpha^{m+1}(x_1)]$ (m ganzzahlig), so ist $\alpha^{-m}(x)\in[x_1,\alpha(x_1)]$ und daher mit $E3$

$$\alpha^k(x)=\alpha^m\alpha^k\alpha^{-m}(x)>\alpha^m\beta\alpha^{-m}(x)=\beta(x),$$

was zu zeigen war.

Satz 4. 10. *Die durch* (74) *definierte Zahl* s *ist irrational.*

BEWEIS. Angenommen, es wäre $s=\frac{m}{n}$ rational $(m, n>0)$. Nach Vorausstzung über β gilt daher insbesondere

$$\alpha^{\mu(n,\beta)-1}<\beta^n<\alpha^{\mu(n,\beta)}. \tag{76}$$

Wäre nun $\mu(n, \beta)\leqq m$, so wäre $\beta^n<\alpha^m$ und daher $e<\alpha^m\beta^{-n}$. Nach Satz 4. 9 folgt daraus (wenn man ihn auf die Funktionen $\alpha^m\beta^{-n}$ und α anwendet)

$$\beta^{kn}<\alpha^{km-1}.$$

Ist nun l eine beliebige natürliche Zahl, so gilt $\beta^{lkn}<\alpha^{l(km-1)}$ und $\alpha^{\mu(lkn,\beta)-1}<\beta^{lkn}$, woraus

$$\frac{\mu(lkn, \beta)}{lkn}<s-\frac{1}{kn}+\frac{1}{lkn}$$

folgt, was

$$s=\lim_{l\to\infty}\frac{\mu(lkn, \beta)}{lkn}\leqq s-\frac{1}{kn}<s$$

zur Folge hat. Das ist unmöglich. Also war die Annahme $\mu(n, \beta)\leqq m$ falsch. Wäre jedoch $\mu(n, \beta)>m$, so wäre $\alpha^m<\beta^n$ und nach Satz 4. 9 würde für ein gewisses natürliches k

$$\alpha^{km+1}<\beta^{kn}$$

gelten. Für jedes natürliche l gilt dann wegen

$$\alpha^{l(km+1)}<\beta^{lkn} \quad \text{und} \quad \beta^{lkn}<\alpha^{\mu(lkn,\beta)}$$

die Ungleichung

$$l(km+1)<\mu(lkn, \beta),$$

woraus

$$s=\lim_{l\to 0}\frac{\mu(lkn, \beta)}{lkn}\geqq s+\frac{1}{kn}>s$$

folgen würde, was auch unmöglich ist. Also war die Annahme $s=\frac{m}{n}$ falsch.

Liegt, wie in Satz 4. 7 festgestellt, jede natürliche Potenz von β zwischen zwei aufeinanderfolgenden Potenzen von α, so liegt umgekehrt jede natürliche Potenz von α zwischen zwei aufeinanderfolgenden Potenzen von β:

$$\beta^{\mu(l,\alpha)-1}<\alpha^l<\beta^{\mu(l,\alpha)}, \tag{77}$$

und man kann ebenso wie in Satz 4. 8 zeigen, daß

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\mu(l, \alpha)}{l} \tag{78}$$

existiert. Der folgende Satz bringt (78) in Verbindung mit (74).

Satz 4. 11. *Es ist*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(k,\alpha)}{k}=\frac{1}{\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{\mu(l,\beta)}{l}}=\frac{1}{s}. \tag{79}$$

BEWEIS. Aus (73) folgt die Existenz einer Folge $\{n_\nu\}$ mit

$$\beta^{n_\nu}<\alpha^{\mu(n_\nu,\beta)}<\beta^{n_\nu+1} \tag{80}$$

und $\lim\limits_{\nu\to\infty} n_\nu=\infty$. Setzt man nun

$$l_\nu=\mu(n_\nu,\beta), \tag{81}$$

so gilt auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} l_\nu=\infty$ und

$$\beta^{\mu(l_\nu,\alpha)-1}<\alpha^{l_\nu}<\beta^{\mu(l_\nu,\alpha)}. \tag{82}$$

Mit (81) folgt aus (80) und (82) die Beziehung

$$\mu(l_\nu,\alpha)=n_\nu+1, \tag{83}$$

aus der man, da die Existenz von (78) gewiß ist, mit

$$\frac{\mu(l_\nu,\alpha)}{l_\nu}=\frac{n_\nu+1}{\mu(n_\nu,\beta)}=\frac{1}{\dfrac{\mu(n_\nu,\beta)}{n_\nu}}+\frac{1}{\mu(n_\nu,\beta)}$$

die Behauptung erhält.

Satz 4. 12. *Genügen α und β den Voraussetzungen E1 und E3 und ist $\beta>e$, so folgt aus $p+sq<p'+sq'$ stets*

$$\alpha^p\beta^q<\alpha^{p'}\beta^{q'}. \tag{84}$$

Dabei hat s die durch Satz 4. 8 bestimmte Bedeutung.

BEWEIS. Zunächst ist klar, daß $\alpha^p\beta^q$ und $\alpha^{p'}\beta^{q'}$ stets in einer Ordnungsrelation gemäß 1. 2 stehen (wegen *E*1).

1. $q=q'$: Dann ist wegen $p<p'$ natürlich $\alpha^p\beta^q<\alpha^{p'}\beta^{q'}$.
2. $q<q'$: Wäre die Behauptung falsch, so wäre

$$\beta^{q'-q}\leqq\alpha^{p-p'},$$

woraus nach Satz 4. 7 sogar

$$\beta^{q'-q}<\alpha^{p-p'}$$

folgt. Andererseits ist jedoch $\beta^{q'-q}<\alpha^{\mu(q'-q,\beta)}$, weshalb $\mu(q'-q,\beta)\leqq p-p'$ gilt. Durch Division mit $q'-q$ und den Grenzübergang $l_1\to\infty$ in (74*) folgt daraus

$$s<\frac{\mu(q'-q,\beta)}{q'-q}\leqq\frac{p-p'}{q'-q}, \tag{85}$$

also $p+sq>p'+sq'$, entgegen der Voraussetzung.

3. $q>q'$: Lediglich für diesen Fall haben wir in Satz 4. 11 eine Beziehung zwischen den Größen $\mu(l, \beta)$ und den Größen $\mu(k, \alpha)$ hergestellt. Wäre nämlich hier die Behauptung falsch, so wäre

$$\alpha^{p'-p} < \beta^{q-q'}.$$

Wegen

$$\alpha^{p'-p} < \beta^{\mu(p'-p,\alpha)}$$

ergibt sich daraus $\mu(p'-p, \alpha) \leqq q-q'$. Mit Satz 4. 11 folgt aber aus $p+sq<p'+sq'$ und $q>q'$ die Ungleichung $p'-p>0$ und daher ist, wenn man wieder (74*) heranzieht,

$$\frac{1}{s} < \frac{\mu(p'-p, \alpha)}{p'-p} \leqq \frac{q-q'}{p'-p}, \tag{86}$$

also wieder $p+sq>p'+sq'$, entgegen der Voraussetzung. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir definieren nun auf der Menge M_s eine Funktion λ durch

$$\lambda(p+sq)=\alpha^p\beta^q(x_0)$$

mit $x_0 \in (0, \infty)$. Nach Satz 4. 12 ist diese Funktion auf M_s streng monoton wachsend. Durch die Definition

$$\lambda(x)=\inf\{\lambda(p+sq): p+sq \geqq x\}$$

läßt sich λ auf die Menge aller reellen Zahlen fortsetzen und ist auch hier — wie man sich leicht überzeugt — streng monoton wachsend.

Satz 4. 13. *Gelten die Voraussetzungen E*1, *E*2 *und E*3, *so ist die Funktion* λ *auf* $(-\infty, +\infty)$ *stetig.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$\lambda(x)=\inf\{\lambda(p+sq): p+sq \geqq x\}=\sup\{\lambda(p+sq): p+sq \leqq x\}$$

gilt. Es ist

$$\sup\{\lambda(p+sq): p+sq \leqq x\} \leqq \inf\{\lambda(p+sq): p+sq \geqq x\}.$$

Würde in dieser Beziehung für ein festes x das $<$-Zeichen möglich sein, so wäre

$$\inf\{\lambda(p+sq): p+sq \geqq x\}-\sup\{\lambda(p+sq): p+sq \leqq x\}=d>0.$$

Also wäre das Intervall $(\lambda(x)-d, \lambda(x))$ frei von Werten $\alpha^p\beta^q(x_0)$. Daraus folgt aber, daß $E2$ mit $y_0=\lambda(x)-\frac{d}{2}$ und $\varepsilon=\frac{d}{2}$ nicht erfüllt ist, was nicht sein darf. Also ist $d=0$, was zu zeigen war.

Satz 4. 14. *Die Funktion* λ *ist eine erzeugende Funktion für* α.

Beweis. Man hat zu zeigen, daß die Funktionalgleichung (27) durch die hier konstruierte positive Funktion λ befriedigt wird. Das ist aber leicht möglich. Wegen

der Stetigkeit von α ist nämlich

$$\begin{aligned}\lambda(x+1) &= \inf\{\lambda(p+sq): p+sq \geqq x+1\} = \\ &= \inf\{\alpha\lambda(p+sq-1): p+sq-1 \geqq x\} = \\ &= \alpha\big(\inf\{\lambda(p+sq-1): p+sq-1 \geqq x\}\big) = \\ &= \alpha\big(\inf\{\lambda(p+sq): p+sq \geqq x\}\big) = \alpha\lambda(x).\end{aligned}$$

Satz 4. 15. *Die Funktion β ist Iterierte der Ordnung s von α und liegt in der durch λ erzeugten Iterationsgruppe $G(\alpha)$.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß $\lambda e_s = \beta\lambda$ gilt. Das ergibt sich aber ganz ähnlich wie im Beweis des Satzes 4. 14 die Gleichung $\lambda e_1 = \alpha\lambda$:

$$\begin{aligned}\lambda(x+s) &= \inf\{\beta\lambda\big(p+s(q-1)\big): p+s(q-1) \geqq x\} = \\ &= \beta\big(\inf\{\lambda\big(p+s(q-1)\big): p+s(q-1) \geqq x\}\big) = \beta\lambda(x).\end{aligned}$$

Damit haben wir das gewünschte Resultat erhalten: Mit Hilfe der Sätze 4. 7 bis 4. 15 haben wir schrittweise gezeigt, daß eine Funktion $\beta \in S$, die den Bedingungen $E1$, $E2$, $E3$ genügt, eine irrationale Iterierte von α ist. Mit $E1$, $E2$, $E3$ hat man daher ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen für diesen Sachverhalt. Diese Beziehungen entsprechen den Gleichungen (68) und (69) für den rationalen Fall.

5. Iteration von Funktionen, die auf Teilintervallen von $[0, \infty)$ gleich sind

In Abschnitt 6 benötigen wir den Zusammenhang zwischen den hier betrachteten, durch 2. 5 definierten Iterationsgruppen und den Iterierten, wie sie von anderen Autoren, z. B. in [4], [6], [17] betrachtet wurden. Der Unterschied liegt darin, daß wir die zu iterierenden Funktionen auf dem Intervall $[0, \infty)$ betrachtet haben, während die anderen Autoren stets nur ein endliches Definitionsintervall heranziehen (das entspräche in unserer Terminologie einem Intervall $[0, a]$ mit endlichem a). Daher entsteht die Frage, ob die hier vorgenommene Ausdehnung des Definitionsbereichs wesentlichen Einfluß auf die Resultate der Untersuchungen hat. An einem Beispiel möge das verdeutlicht werden: Es sei $\alpha > e$ vorgegeben und es werde eine gewisse Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$ betrachtet. Ändert man lediglich für große Werte der Variablen die Funktion α zu einer Funktion β ab, so ist es wichtig zu wissen, ob es eine Gruppe $G_0(\beta)$ gibt, deren Elemente durch „gewisse Abänderungen" für lediglich große Werte aus den Elementen von $G_0(\alpha)$ hervorgehen.

Solchen Untersuchungen ist dieser Abschnitt gewidmet.

Satz 5. 1. *Es gelte für die Funktionen α und β*

$$\alpha(x) = \beta(x) \tag{87}$$

für $x \in [a, b]$ mit $0 < a < b < \infty$. Ist λ eine erzeugende Funktion für α, so existiert eine erzeugende Funktion μ für β derart, daß

$$\lambda(x) = \mu(x) \tag{88}$$

für $x \in [\lambda^{-1}(a), \lambda^{-1}(b)+1]$ gilt.

BEWEIS. Nach Voraussetzung gilt $\alpha(x)=\beta(x)$ für $x\in[a, b]$. Wie man leicht überlegt, folgt daraus

$$\alpha^n(x)=\beta^n(x) \quad \text{für} \quad x\in[a, \alpha^{-n+1}(b)], \tag{89}$$

sofern nur $a\leqq\alpha^{-n+1}(b)$ gilt. Wir konstruieren nun eine erzeugende Funktion μ für β durch die Bedingungen

$$\mu(x)=\begin{cases}\lambda(x) & \text{für} \quad x\in[c, c+1],\\ \beta^n\lambda(x-n) & \text{für} \quad x\in[c+n, c+n+1],\end{cases} \tag{90}$$

wobei noch $c=\lambda^{-1}(a)$ gesetzt wurde. Die durch (90) konstruierte Funktion μ ist erzeugende Funktion für β, denn es gilt

$$\mu(x+1)=\beta^{n+1}\lambda(x+1-n-1)=\beta\beta^n\lambda(x-n)=\beta\mu(x),$$

wenn $x\in[c+n, c+n+1]$ gewählt wurde. Da λ erzeugende Funktion für α ist, so existiert die Zahl $d=\lambda^{-1}(b)$, weil λ^{-1} auf $(0, \infty)$ definiert ist. Wegen der strengen Monotonie von λ^{-1} gilt darüber hinaus $c<d$. Es sei nun $x\in[c, d+1]$. Dann existiert ein nichtnegatives ganzzahliges n mit den Eigenschaften $x\in[c+n, c+n+1]$ und $c+n<d+1$. Es ist also

$$x-n\in[c-n, d+1-n]\cap[c, c+1]=[c, \min\,(c+1; d+1-n)].$$

Die Ungleichung $c+n<d+1$ gewährleistet aber, daß dabei $c<\min\,(c+1, d+1-n)$ gilt. Daraus folgt

$$\lambda(x-n)\in[a, \min\,(\alpha(a), \alpha^{1-n}(b))]\subset[a, \alpha^{1-n}(b)],$$

so daß unter Benutzung von (89) wirklich

$$\mu(x)=\beta^n\lambda(x-n)=\alpha^n\lambda(x-n)=\lambda(x)$$

für alle $x\in[c, d+1]$ gilt, was zu zeigen war.

Folgerung 5. 2. *Gelten für α und β die Voraussetzungen des vorigen Satzes, so gilt*

$$\lambda e_s\lambda^{-1}(x)=\mu e_s\mu^{-1}(x),$$

falls

entweder 1) $s\in(0, \lambda^{-1}(b)-\lambda^{-1}(a)+1]$ *und* $x\in[a, \lambda e_{1-s}\lambda^{-1}(b)]$

oder 2) $s=0$ *und* $x\in[0, \infty)$

oder 3) $s\in[\lambda^{-1}(a)-\lambda^{-1}(b)-1, 0)$ *und* $x\in[\lambda e_{-s}\lambda^{-1}(a), \lambda e_1\lambda^{-1}(b)]$

gilt.

BEWEIS. Da Fall 2 trivial ist, kann man sich auf die Fälle 1 und 3 beschränken.
1. Aus $x\in[a, \lambda e_{1-s}\lambda^{-1}(b)]$ folgen zunächst die Beziehungen

$$\lambda^{-1}(x)\in[\lambda^{-1}(a), e_{1-s}\lambda^{-1}(b)], \tag{91}$$

$$\mu^{-1}(x)\in[\mu^{-1}(a), \mu^{-1}\lambda e_{1-s}\lambda^{-1}(b)]. \tag{92}$$

Setzt man in (88) $x=\lambda^{-1}(a)$, so sieht man, daß

$$\mu^{-1}(a)=\lambda^{-1}(a) \tag{93}$$

gilt. Weiter ist

$$e_{1-s}\lambda^{-1}(b)=\lambda^{-1}(b)+1-s\geqq\lambda^{-1}(a)$$

und wegen $s>0$

$$e_{1-s}\lambda^{-1}(b)=\lambda^{-1}(b)+1-s<\lambda^{-1}(b)+1.$$

Also ist $e_{1-s}\lambda^{-1}(b)$ ein möglicher Argumentwert für (88) und es ist demzufolge

$$\mu^{-1}\lambda e_{1-s}\lambda^{-1}(b)=e_{1-s}\lambda^{-1}(b). \tag{94}$$

Aus (93) und (94) ist ersichtlich, daß (91) und (92) auch in der Form

$$\lambda^{-1}(x),\ \mu^{-1}(x)\in[\lambda^{-1}(a),\ e_{1-s}\lambda^{-1}(b)] \tag{95}$$

geschrieben werden kann. Aus (95) folgt nun aber

$$e_s\lambda^{-1}(x),\ e_s\mu^{-1}(x)\in[e_s\lambda^{-1}(a),\ e_1\lambda^{-1}(b)]\subset[\lambda^{-1}(a),\ \lambda^{-1}(b)+1],$$

weshalb nach (88)

$$\lambda e_s\lambda^{-1}(x)=\mu e_s\mu^{-1}(x)$$

gilt.

3. Aus $x\in[\lambda e_{-s}\lambda^{-1}(a),\ \lambda e_1\lambda^{-1}(b)]$ folgt

$$\lambda^{-1}(x)\in[e_{-s}\lambda^{-1}(a),\ e_1\lambda^{-1}(b)], \tag{96}$$

$$\mu^{-1}(x)\in[\mu^{-1}\lambda e_{-s}\lambda^{-1}(a),\ \mu^{-1}\lambda e_1\lambda^{-1}(b)]. \tag{97}$$

Da aber nach Voraussetzung über s

$$\lambda^{-1}(a)\leqq\lambda^{-1}(a)-s\leqq\lambda^{-1}(b)+1$$

gilt, so ist statt (96) und (97)

$$\lambda^{-1}(x),\ \mu^{-1}(x)\in[e_{-s}\lambda^{-1}(a),\ e_1\lambda^{-1}(b)]. \tag{98}$$

Durch Multiplikation mit e_s folgt aus (98) aber

$$e_s\lambda^{-1}(x),\ e_s\mu^{-1}(x)\in[\lambda^{-1}(a),\ e_{1+s}\lambda^{-1}(b)]\subset[\lambda^{-1}(a),\ e_1\lambda^{-1}(b)],$$

woraus mit (88) wieder

$$\lambda e_s\lambda^{-1}(x)=\mu e_s\mu^{-1}(x)$$

geschlossen werden kann. Damit ist die Folgerung bewiesen.

Aus den in 5. 2 angegebenen Intervallen liest man nun leicht ab, daß das Gebiet der x, y-Ebene, in welchem

$$\lambda e_s\lambda^{-1}(x)=\mu e_s\mu^{-1}(x)$$

gilt, ein Quadrat enthält, dessen Diagonale die Endpunkte $P_1=(a, a)$, $P_2=(\lambda e_1\lambda^{-1}(b),\ \lambda e_1\lambda^{-1}(b))$ besitzt (siehe Abb. 2a).

Satz 5. 3. *Es gelte für die Funktionen α und β*

$$\alpha(x)=\beta(x) \tag{99}$$

für $x\in[0, b]$ mit $0<b<\infty$. Ist λ eine erzeugende Funktion für α, so existiert eine erzeugende Funktion μ für β derart, daß

$$\lambda(x)=\mu(x) \tag{100}$$

für $x\in(-\infty, \lambda^{-1}(b)+1)$ gilt.

BEWEIS. Man betrachte die Zahlenfolge $\{\alpha^{-k}(b)\}$ mit $k=1, 2, 3, \ldots$, für die

$$\lim_{k\to\infty}\alpha^{-k}(b)=0$$

gilt. Ist nun λ eine erzeugende Funktion für α, so folgt aus $\alpha(x)=\beta(x)$ für $x\in[\alpha^{-k}(b), b]$ nach Satz 5. 1 die Existenz einer erzeugenden Funktion μ_k für β mit

$$\mu_k(\alpha)=\lambda(x)$$

für $x\in[\lambda^{-1}\alpha^{-k}(b), \lambda^{-1}(b)+1]=[\lambda^{-1}(b)-k, \lambda^{-1}(b)+1]$.

Setzt man nun

$$\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\mu_k(x),$$

so gilt

$$\mu(x)=\lambda(x) \quad \text{für} \quad x\in(-\infty, \lambda^{-1}(b)+1)$$

und da insbesondere

$$\mu_k(x)=\lambda(x) \quad \text{für} \quad x\in(\lambda^{-1}(b), \lambda^{-1}(b)+1)$$

gilt, so ist für alle $k=0, 1, 2, \ldots$

$$\mu(x)=\mu_0(x) \quad \text{für} \quad x\in[\lambda^{-1}(b)+1, \infty),$$

so daß die Existenz von μ und die Zugehörigkeit dieser Funktion zu den β erzeugenden Funktionen auch für dieses Intervall gesichert ist.

Folgerung 5. 4. *Gelten für α und β die Voraussetzungen von Satz 5. 3, so gilt*

$$\lambda e_s\lambda^{-1}(x)=\mu e_s\mu^{-1}(x),$$

wenn

entweder 1) $s\in(0, \infty)$ *und* $x\in[0, \lambda e_{1-s}\lambda^{-1}(b)]$

oder 2) $s=0$ *und* $x\in[0, \infty)$

oder 3) $s\in(-\infty, 0)$ *und* $x\in[0, \lambda e_1\lambda^{-1}(b)]$

gilt.

Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der von 5. 2 und möge daher unterbleiben. Das Gebiet der x, y-Ebene, in welchem

$$\lambda e_s\lambda^{-1}(x)=\mu e_s\mu^{-1}(x)$$

gilt, enthält wieder ein Quadrat, dessen eine Diagonale die Endpunkte

$$P_1=(0, 0),\ P_2=(\lambda e_1\lambda^{-1}(b), \lambda e_1\lambda^{-1}(b))$$

besitzt (siehe Abb. 2b). Man sieht, daß die Übereinstimmungsgebiete, die sich hier ergeben, eine sehr einfache Struktur haben. Es bleibe dahingestellt, ob diese Quadrate auch maximale Übereinstimmungsgebiete sind oder nicht.

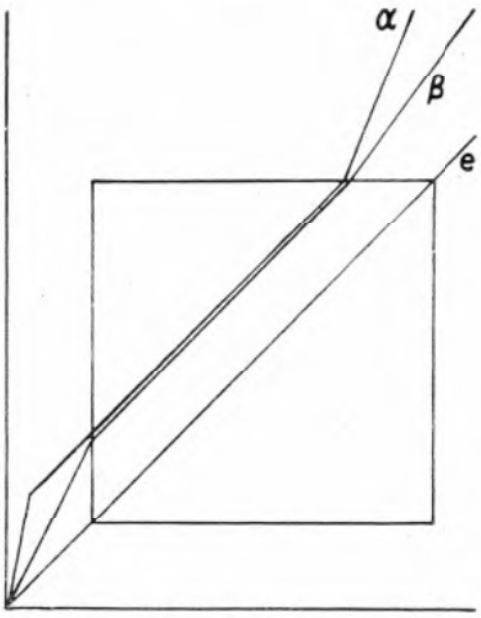

Abb. 2a

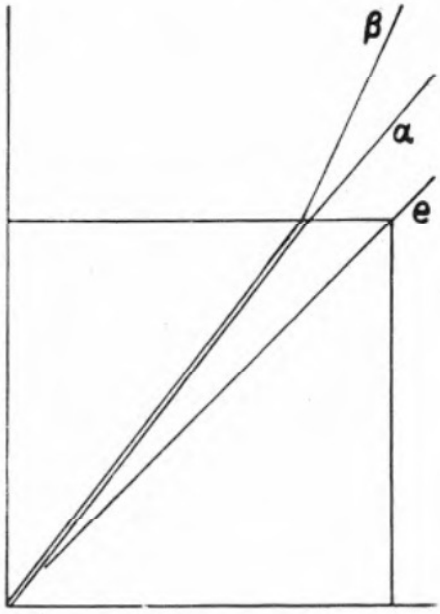

Abb. 2b

Die Sätze 5.1 und 5.3 sowie die Folgerungen 5.2 und 5.4 beziehen sich auf solche Funktionen β, für die $\beta > e$ gilt. Es ist aber unwesentlich, daß β auf $(0, \infty)$ keine Fixpunkte besitzt.

Gilt nämlich $\beta(c) = c$ mit $b < c < \infty$, so kann man die durch (90) definierte und auch in 5.3 benutzte Funktion $\mu(x)$ beibehalten. Man hat nur zu beachten, daß $G_0(\beta)$ eine auf $[0, c]$ und nicht auf $[0, \infty)$ definierte Iterationsgruppe ist. Alle Beweise dieses Abschnitts bleiben wörtlich die gleichen.

Damit werden die Resultate des Abschnitts 6 auch mit den Arbeiten derjenigen Autoren vergleichbar, die nicht nur ein endliches Grundintervall, sondern für die Grundfunktion (hier β) einen zweiten, endlichen Fixpunkt (hier c) zulassen.

Daß der Fixpunkt $x = 0$ linker Randpunkt des Definitionsgebiets der Funktionen $\alpha, \beta \in S$ ist, ist für den Vergleich mit den Arbeiten auch der Autoren unwesentlich, die den Fixpunkt als rechten Randpunkt des Definitionsintervalls wählen (z. B. in [4]).

Versteht man nämlich unter $S^*(a)$ analog zu 2.1 die Menge aller auf $(-\infty, 0]$ definierten, stetigen und streng monoton wachsenden Funktionen f^* mit den Eigenschaften

$$f^*(-\infty) = -\infty, f^*(a) = a,$$

so bildet diese Menge $S^*(a)$ mit der Verknüpfung (2) eine Gruppe.

Nun ist aber mit

$$(x, y) \to (-x+a, -y+a)$$

eine $1-1$-Abbildung von $[0, \infty)\times[0, \infty)$ auf $(-\infty, a]\times(-\infty, a]$ gegeben, wenn $(x, y)\in[0, \infty)\times[0, \infty)$ gilt. Dieser Abbildung entspricht wegen

$$(x, f(x)) \to (-x+a, -f(x)+a)$$

eine Isomorphie von S auf $S^*(a)$, die durch

$$f^*(x) = -f(a-x)+a$$

bewirkt wird. Durch sie lassen sich alle Sätze dieser Arbeit, insbesondere die Sätze und Folgerungen 5. 1 bis 5. 4 nach $S^*(a)$ übertragen.

Berücksichtigt man weiter, daß obige Abbildung (sie läßt sich aus zwei Spiegelungen und einer Translation zusammensetzen) Quadrate in kongruente Quadrate überführt, so ist damit klar, daß in $S^*(a)$ analoge Übereinstimmungsgebiete wie in S vorliegen.

Die Wahl des Definitionsgebietes $(-\infty, a]$ statt $[0, \infty)$ bringt also keinen wesentlichen Unterschied mit sich.

6. Auswahl von Iterationsgruppen

In diesem Abschnitt wollen wir auf eine Fragestellung zurückkommen, von der in der Literatur im Zusammenhang mit der kontinuierlichen Iteration fast ausschließlich die Rede ist.

Für Funktionen α, die den Bedingungen (9), (10) bzw. (11) genügen, lassen sich (man vgl. z. B. [4], [17]) eindeutig bestimmte Iterationsgruppen $G_0(\alpha)$ konstruieren, wenn man im Fixpunkt $x=0$ bestimmte Limeseigenschaften (nämlich (102), (106) bzw. (108)) für jedes Element $f_0^{[s]}\in G_0(\alpha)$ fordert. Um jedoch die Existenz von $G_0(\alpha)$ mit diesen Limeseigenschaften zu zeigen, sah man sich genötigt, weitere einschränkende Voraussetzungen (z. B. Differenzierbarkeitsbedingungen für α) hinzuzunehmen, so daß nur für einen Teil der Fälle (9), (10) bzw. (11) die Existenz von $G_0(\alpha)$ sicher ist.

Im folgenden wollen wir nun zeigen, daß die Hinzunahme einschränkender Bedingungen über α unwesentlich für die Auswahl einer eindeutig bestimmten Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$ ist.

Damit gewinnen wir zwar keine Existenz-, jedoch Eindeutigkeitssätze.

Wegen Folgerung 5. 4 sind die Fixpunkteigenschaften der hier konstruierten Iterationsgruppen identisch mit denen anderer Autoren.

Satz 6. 1. *Ist $\alpha > e$ und gilt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = q > 1, \tag{101}$$

so existiert höchstens eine Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$, so daß für jede Funktion $f^{[s]}\in G_0(\alpha)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{[s]}(x)}{x} = q^s \tag{102}$$

gilt.

BEWEIS. Angenommen, es existiert außer $G_0(\alpha)$ (deren Elemente wieder mit $f_0^{[s]}$ bezeichnet werden) noch eine davon verschiedene Iterationsgruppe $G_1(\alpha)$, so daß jede Funktion $f_1^{[s]}$ der Gleichung (102) genügt, dann existiert eine reelle Zahl $s\in(0,1)$ und zwei Funktionen $f_0^{[s]}\in G_0(\alpha)$, $f_1^{[s]}\in G_1(\alpha)$ mit

$$f_0^{[s]}\neq f_1^{[s]}.$$

Es existiert daher ein Punkt x_1 mit der Eigenschaft $f_0^{[s]}(x_1)\neq f_1^{[s]}(x_1)$. Wir nehmen an, daß

$$f_0^{[s]}(x_1)<f_1^{[s]}(x_1) \tag{103}$$

gilt (den anderen Fall kann man analog behandeln).

Da $G_0(\alpha)$ das Innere des ersten Quadranten schlicht überdeckt, existiert eine reelle Zahl s_1 mit $s<s_1$ und eine Funktion $f_0^{[s_1]}$ derart, daß

$$f_1^{[s]}(x_1)=f_0^{[s_1]}(x_1) \tag{104}$$

gilt. Betrachtet man nun die Nullfolge $\{\alpha^{-k}(x_1)\}$, wobei $k=0,1,2,\ldots$ ist, so gilt wegen (104)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1^{[s]}(x)}{x}=\lim_{k\to\infty}\frac{f_1^{[s]}\alpha^{-k}(x_1)}{\alpha^{-k}(x_1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha^{-k}f_1^{[s]}(x_1)}{\alpha^{-k}(x_1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha^{-k}f_0^{[s_1]}(x_1)}{\alpha^{-k}(x_1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{f_0^{[s_1]}\alpha^{-k}(x_1)}{\alpha^{-k}(x_1)}=q^{s_1}.$$

Daher kann wenigstens für $f_1^{[s]}$ die Relation (102) nicht gelten, was zu zeigen war.

Satz 6. 2. *Ist $\alpha>e$, und gilt für ein reelles $u>1$*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-x}{x^u}=q>0, \tag{105}$$

so existiert höchstens eine Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$, so daß für jede Funktion $f^{[s]}\in G_0(\alpha)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{[s]}(x)-x}{x^u}=sq \tag{106}$$

gilt.

BEWEIS. Zunächst verläuft der Beweis hier ganz analog demjenigen von Satz 6. 1. Daß es auch hier unmöglich ist, daß neben $G_0(\alpha)$ noch eine weitere Iterationsgruppe $G_1(\alpha)$ existiert, so daß jede Funktion der Behauptung (106) genügt, ergibt sich, wenn man die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 6. 1 verwendet, aus

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1^{[s]}(x)-x}{x^u}=\lim_{k\to\infty}\frac{f_1^{[s]}\alpha^{-k}(x_1)-\alpha^{-k}(x_1)}{[\alpha^{-k}(x_1)]^u}=\lim_{k\to\infty}\frac{f_0^{[s_1]}\alpha^{-k}(x_1)-\alpha^{-k}(x_1)}{[\alpha^{-k}(x_1)]^u}=s_1q.$$

Satz 6. 3. *Ist $\alpha>e$ und gilt für ein reelles $u\in(0,1)$*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^u}=q>0, \tag{107}$$

so existiert höchstens eine Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$, so daß für jede Funktion $f^{[s]}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{[s]}(x)}{x^{u^s}}=q^{\frac{u^s-1}{u-1}} \tag{108}$$

gilt.

BEWEIS. Im Unterschied zu den beiden vorangehenden Sätzen tritt hier der Iterationsparameter s auch im Nenner unter dem Limeszeichen auf, deshalb gilt mit den gleichen Bezeichnungen wie in Satz 6. 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1^{[s]}(x)}{x^u}=\lim_{k\to\infty}\frac{f_1^{[s]}\alpha^{-k}(x_1)}{[\alpha^{-k}(x_1)]^{u^s}}=\lim_{k\to 0}\frac{f_0^{[s_1]}\alpha^{-k}(x_1)}{[\alpha^{-k}(x_1)]^{u^s}}\geqq\lim_{k\to\infty}\frac{f_0^{[s_1]}\alpha^{-k}(x_1)}{[\alpha^{-k}(x_1)]^{u^{s_1}}}=q^{\frac{u^{s_1}-1}{u-1}}.$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß wegen $s<s_1$ und $u^{s_1}<u^s$ die Ungleichung

$$\frac{1}{[\alpha^{-k}(x_1)]^{u^s}}>\frac{1}{[\alpha^{-k}(x_1)]^{u^{s_1}}}$$

wenigstens für hinreichend große k erfüllt ist, denn für solche ist $\alpha^{-k}(x_1)$ kleiner als 1. Berücksichtigt man nun noch, daß die Funktion

$$\frac{u^s-1}{u-1}$$

für alle s streng monoton wachsend ist, so ist damit alles gezeigt.

Die Bedingungen (102), (106) bzw. (108) sind also geeignet, aus der Gesamtheit der Iterationsgruppen $G(\alpha)$ eine Gruppe $G_0(\alpha)$ eindeutig auszuwählen.

Insbesondere ist für eine Funktion α, die (101) genügt, $f^{[s]}\in G_0(\alpha)$ durch (102) charakterisiert, während die Iterierten aller anderen Gruppen (102) nicht erfüllen. Das letztere legt die Frage nahe, ob sich nicht eine „schwächere", vielleicht „mittelnde" Limeseigenschaft finden läßt, so daß wenigstens diese für die Iterierten aller Gruppen $G(\alpha)$ erfüllt ist.

Für den Fall (101) sei eine solche Fixpunkteigenschaft im folgenden Satz vermerkt.

Satz 6. 4. *Ist $\alpha>e$ und gilt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=q>1, \tag{109}$$

so gilt für jedes beliebige $f\in F(s;\alpha)$ bei beliebig reellem s

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}&=q^s \quad \textit{für} \quad s>0,\\ \lim_{n\to\infty}\left(f^{n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}&=q^s \quad \textit{für} \quad s<0.\end{aligned} \tag{110}$$

ANMERKUNG. Man beachte in Formel (110) die am Anfang von Abschnitt 2 getroffenen Vereinbarungen: Der Exponent bei f bewirkt Potenzierung im Sinne der in S eingeführten Gruppenmultiplikation (3), während der äußere Exponent im gewöhnlichen Sinne zu verstehen ist.

BEWEIS. Wir beschränken uns zunächst auf positive s. Die Behauptung lautet dann also

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=q^s. \tag{111}$$

Ist $s=l$ natürlich, so ist $f=\alpha^l$. Wegen (109) gilt aber

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^l(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^l(x)}{\alpha^{l-1}(x)}\cdot\frac{\alpha^{l-1}(x)}{\alpha^{l-2}(x)}\cdots\frac{\alpha(x)}{x}=q^l$$

und mit

$$\lim_{n\to 0}\alpha^{-ln}(x)=0$$

ergibt sich daraus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{l-ln}(x)}{\alpha^{-ln}(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^l\left(\alpha^{-ln}(x)\right)}{\alpha^{-ln}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^l(x)}{x}=q^l. \tag{112}$$

Die Folge $\left\{\dfrac{\alpha^{l-ln}(x)}{\alpha^{-ln}(x)}\right\}$ in (112) besteht aus den Gliedern

$$\frac{x}{\alpha^{-l}(x)},\ \frac{\alpha^{-l}(x)}{\alpha^{-2l}(x)},\ \frac{\alpha^{-2l}(x)}{\alpha^{-3l}(x)},\ \cdots$$

und mit ihr strebt natürlich auch die Folge ihrer geometrischen Mittel gegen q^l:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{\alpha^{-l}(x)}\,\frac{\alpha^{-l}(x)}{\alpha^{-2l}(x)}\cdots\frac{\alpha^{-(n-1)l}(x)}{\alpha^{-nl}(x)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{\alpha^{-nl}(x)}\right)^{\frac{1}{n}}=q^l.$$

Daher ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha^{-nl}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{\alpha^{-nl}(x)}\right)^{\frac{1}{n}}=q^l.$$

Das aber war im Falle $s=l$ (man vgl. (111)) zu zeigen. Ist $s=\dfrac{1}{k}$ mit natürlichem k, so ist $f^k=\alpha$. Zu jeder natürlichen Zahl n existiert ein nichtnegatives p_n, so daß n in $[p_nk, (p_n+1)k)$ enthalten ist. Es gilt daher wegen

$$-(p_n+1)k<-n\leqq -p_nk$$

die Ungleichung

$$\alpha^{-p_n-1}(x)<f^{-n}(x)\leqq\alpha^{-p_n}(x)\quad\text{mit}\quad x\in(0,\infty),$$

woraus sich

$$\left(\alpha^{-p_n}(x)\right)^{-\frac{1}{(p_n+1)k}}<\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}<\left(\alpha^{-p_n-1}(x)\right)^{-\frac{1}{p_nk}}$$

für jedes natürliche n ergibt. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\infty$ ist aber sowohl

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha^{-p_n}(x)\right)^{-\frac{1}{(p_n+1)k}}=q^{\frac{1}{k}}$$

als auch

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha^{-p_n-1}(x)\right)^{-\frac{1}{p_n k}}=q^{\frac{1}{k}},$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=q^{\frac{1}{k}},$$

also (111) für den Fall $s=\frac{1}{k}$ folgt.

Ist $s=\frac{l}{k}$ (l, k natürliche Zahlen), so ist $f^k=\alpha^l$ und es existiert eine Funktion $g\in F\left(\frac{1}{k};\alpha\right)$ mit $g^l=f$. Für sie gilt nach dem vorigen Fall

$$\lim_{n\to\infty}\left(g^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=q^{\frac{1}{k}},$$

deshalb ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(g^{-ln}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(g^{-ln}(x)\right)^{-\frac{1}{ln}}\right)^l=q^{\frac{l}{k}},$$

was hier zu zeigen war.

Ist weiter s irrational, so existieren zu je zwei rationalen Zahlen r_1 und r_2 mit $r_1<s<r_2$ zwei Funktionen $f_1\in F(r_1;\alpha)$ und $f_2\in F(r_2;\alpha)$, so daß

$$f_1<f<f_2$$

gilt. Man wähle, um dies zu erreichen, z. B. f_1, f_2 aus der Iterationsgruppe $G(\alpha)$, in der auch f liegt. Dann gilt

$$\left(f_1^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}<\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}<\left(f_2^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

und durch Grenzübergang folgt daraus

$$q^{r_1}\leqq\liminf_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}\leqq\limsup_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}\leqq q^{r_2}.$$

Da man aber r_2-r_1 beliebig klein machen kann, gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{-n}(x)\right)^{-\frac{1}{n}}=q^s$$

auch für irrationale s.

Damit ist der Satz für alle positiven s geeigt. Ist nun $s<0$, so hat man gemäß (110)

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^n(x)\right)^{\frac{1}{n}}=q^s$$

zu zeigen. Diesen Fall führt man leicht auf den vorigen zurück, weil $g=f^{-1}\in F(-s;\alpha)$ mit $-s>0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^n(x)\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\left(g^{-n}(x)\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(g^{-n}(x)\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{q^{-s}}=q^s.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wir wollen es unterlassen, auch für solche Funktionen α, für welche (105) bzw. (107) gilt, einen zu 6. 4 analogen Satz auszusprechen.

Alle Sätze dieses Abschnitts zeigen, daß die hier interessierenden Fixpunkteigenschaften der Iterationsgruppen $G(\alpha)$ an geeignete, einfache Fixpunkteigenschaften von α gebunden sind. Daher ist es fraglich, ob das Problem der eindeutigen Auswahl einer Iterationsgruppe $G_0(\alpha)$ aus der Gesamtheit aller $G(\alpha)$ auch immer dann sinnvoll ist, wenn das Fixpunktverhalten von α sich nicht den Fällen (102), (106) oder (108) unterordnet.

Literatur

[1a] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Berlin*, 1961.

[1b] J. Aczél, L. Kalmár et J. G. Mikusinski, Sur l'équation de translation, *Studia Math.* **12** (1951), 112—116.

[2] I. N. Baker, Zusammensetzungen ganzer Funktionen, *Math. Z.* **69** (1958), 121—163.

[3] B. Barna, Über die Interation reeller Funktionen I., *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 16—40.

[4] L. Berg, Iterationen von beliebiger Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **40** (1960), 215—229.

[5] U. T. Bödewadt, Zur Iteration reeller Funktionen, *Math. Z.* **49** (1943/44), 497—516.

[6] N. G. de Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis, *Groningen*, 1958.

[7] P. Fatou, Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France* **47** (1919), 167—271; **48** (1920), 33—94, 208—314.

[8] J. Hadamard, Two works on iteration and related questions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (2), (1944), 67—75.

[9] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.* **60** (1905), 459—462.

[10] J. Heinhold, Zur Lösung gewisser Funktionalgleichungen, *Arch. Math.* **5** (1954), 414—422

[11] G. Julia, Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles, *J. Math. Pures Appl. Ser. 8*, **1** (1918), 47—245.

[12] H. Kneser, Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\Phi(\Phi(x))=e^x$ und verwandte Funktionalgleichungen, *J. Reine Angew. Math.* **187** (1950), 56—67.

[13] G. Koenigs, Recherches sur les integrales de certaines équations fonctionelles, *Ann. Sci. École norm. Sup.* **3** (1884), Supp. 3—41.

[14] I. P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Berlin*, 1960.

[15] W. Schöbe, Gebrochen-iterierte Exponentialfunktion im Reellen, *Z. angew. Math. Mech.* **38** (1958), 190—194.

[16] E. Schröder, Über iterierte Funktionen, *Math. Ann.* **3** (1871), 296—322.

[17] G. Szekeres, Regular iteration of real and complex functions, *Acta Math.* **100** (1958), 203—258.

[18] H. Töpfer, Komplexe Iterationsindizes ganzer und rationaler Funktionen, *Math. Ann.* **121** (1949), 191—222.

[19] E. Vincze, Über die Charakterisierung der assoziativen Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 241—253.

[20] M. Ward, Note on the iteration of functions of one variable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** (1934), 688—690.

[21] M. Ward and F. B. Fuller, The continuous iteration of real functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936) 393—396.

(Eingegangen am 9. Oktober 1961.)