

Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume

Von A. RAPCSÁK (Debrecen)

1. Als projektiv-ebene bezeichnete L. BERWALD diejenigen Bahnräume P_n , in welchen die Bahnen Geraden sind.¹⁾

Die Bahnen haben bei beliebigem Parameter die Gleichung

$$(1) \quad \dot{x}^i(\ddot{x}^j + 2G^j(x, \dot{x})) - \dot{x}^j(\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x})) = 0,$$

wobei $G^i(x, v)$ in v^i positiv homogen zweiter Ordnung ist.

In projektiv-ebenen Räumen haben die Bahnen die Gleichung

$$(2) \quad \dot{x}^i \ddot{x}^j - \dot{x}^j \ddot{x}^i = 0.$$

HILBERT hat das Problem der Bestimmung aller solchen Funktionen aufgeworfen²⁾, für welche die Schar der Extremalen aus Geraden besteht. Die vorliegende Arbeit ist der Lösung dieses Problems gewidmet.³⁾

2. Wie dies aus (2) ohne weiteres ersichtlich ist, läßt sich in projektiv-ebenen Räumen ein solches Koordinatensystem einführen, in welchem

$$(3) \quad G^i(x, v) = p(x, v) v^i$$

gilt, wobei die Funktion $p(x, v)$ positiv homogen ersten Grades in v^i ist.

Das aufgeworfene Problem läßt sich also auch so formulieren: zu bestimmen sind die Grundfunktionen derjenigen metrischen Räume, die sich auf projektiv-ebene Räume bahntreu abbilden lassen.

Bekanntlich⁴⁾ ist ein P_n dann und nur dann metrisierbar⁵⁾, falls es in P_n einen solchen Vektor $\lambda_i(x, v)$, homogen 0-ten Grades in v^i , gibt, für welchen folgende Bedingungen erfüllt sind:⁶⁾

$$(4_1) \quad \lambda_{i|k} - \lambda_{k|i} = 0$$

$$(4_2) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial v^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial v^i} = 0$$

$$(4_3) \quad \lambda_r v^r \text{ ist in } v^i \text{ konvex.}$$

¹⁾ S. L. BERWALD [1].

²⁾ D. HILBERT [3], Problem 4.

³⁾ Bezüglich der auftretenden Funktionen setzen wir voraus, daß sie in einer jeden ihrer Veränderlichen zumindest viertel stetig derivierbar sind.

⁴⁾ A. RAPCSÁK [5], Satz 1.

⁵⁾ D. h. läßt sich dann und nur dann auf einen metrischen Raum bahntreu abbilden.

⁶⁾ $\lambda_{i|k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^i} G^r - \lambda_r G^r_{ik}$ bedeutet die Berwaldsche kovariante Ableitung.

Aus (4₁) und (3) ergibt sich wegen den Homogenitätsbedingungen

$$(5) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^i} = 0.$$

Es gilt also der

Satz 1. Die metrischen Grundfunktionen, für welche die zugehörigen Geodätischen Geraden sind, werden durch die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\lambda_r v^r$ gegeben, die den Bedingungen (4₂), (4₃) und (5) genügen.

λ_i ist wegen (5) ein Gradientenvektor, es muß also eine skalare Funktion $\Phi(x, v)$, positiv homogen 0-ten Grades in v_i , geben, derart, daß

$$(6) \quad \lambda_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

gilt. Aus (6) und aus (4₂) folgt

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial v^k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^i \partial x^k} = 0.$$

Indem wir (7) mit v_i kontrahieren, erhalten wir wegen der Homogenitätsbedingung

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^i \partial x^k} v^k = 0.$$

Satz 2. Damit es ein die Bedingungen (4₂), (4₃) und (5) befriedigendes Vektorfeld gebe, ist die Existenz einer solchen, das Differentialgleichungssystem (8) befriedigenden skalaren Funktion $\Phi(x, v)$, homogen 0-ten Grades in v^i , notwendig und hinreichend, für welche $\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} v^r$ in v^i konvex ist.

Die Notwendigkeit der ausgesprochenen Bedingung folgt aus (6), (7) und (8). Nehmen wir also an, daß es einen solchen Skalar Φ gibt. Indem wir (8) nach v^i derivieren, die Indizes i und j vertauschen und die beiden Gleichungen auseinander subtrahieren, gelangen wir zu (7). Falls wir noch von der Bezeichnung (6) Gebrauch machen, ergibt sich daraus (4₂) und (5).

Sehen wir im partiellen Differentialgleichungssystem (8) die $\frac{\partial \Phi}{\partial v^i}$ als unbekannte Funktionen an, so ergibt sich als Integralfäche des Systems eine allgemeine Zylinderfläche mit der Erzeugendenrichtung v^i ⁷⁾.

Die allgemeine Lösung von (8) ist also

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v^i} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_i = \Phi_i(v, x^1 v^n - x^n v^1, \dots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}).$$

⁷⁾ Im Differentialgleichungssystem (8) treten die v^i , falls $\frac{\partial \Phi}{\partial v^i}$ die unbekannte Funktion ist, nur als Parameter auf!

In (9) sind die Funktionen $\Phi_i(z^1, \dots, z^{2n-1})$ positiv homogen -1 -ten Grades in ihren Veränderlichen, und sie müssen die folgenden Differentialgleichungssysteme befriedigen:⁸⁾

$$(10_1) \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^K} - \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+K}} x^n - \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^L} + \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^{n+L}} x^n = 0$$

$$(10_2) \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^n} + \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+S}} x^S - \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^L} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^{n+L}} x^n = 0$$

(10₁) und (10₂) stellen offenbar die Integrabilitätsbedingungen von (9) bezüglich v^i dar.

In (10₁) und in (10₂) müssen, da die x_i beliebig sind, die Relationen

$$(11_1) \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^K} = \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^L}, \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+K}} = \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^{n+L}}$$

$$(11_2) \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^n} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^L}, \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+S}} x^S = - \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^{n+L}} x^n$$

gelten. — Die den Gleichungen (11₁) und (11₂) genügenden Funktionen sind:

$$(12_1) \quad \Phi_L(z^1, \dots, z^{2n-1}) = \frac{\partial \Psi(z^1, \dots, z^n)}{\partial z^L} + \frac{\partial \Omega(z^{n+1}, \dots, z^{2n-1})}{\partial z^{n+L}}$$

$$(12_2) \quad \Phi_n(z^1, \dots, z^{2n-1}) = \frac{\partial \Psi(z^1, \dots, z^n)}{\partial z^n} - \frac{\partial \Omega(z^{n+1}, \dots, z^{2n-1})}{\partial z^{n+S}} \frac{x^S}{x^n}.$$

In (12₁) und (12₂) sind Ψ und Ω in ihren Veränderlichen positiv und homogen 0 -ten Grades, sonst aber beliebige Funktionen.

Aus (9) erhalten wir wegen (10₁) und (10₂):

$$(13) \quad \Phi(x, v) = \int_{\binom{v}{(0)}}^{(v)} \Phi_i(v, x^1 v^n - x^n v^1, \dots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}) dv^i.$$

Endlich folgt aus (13) wegen (6)

$$(14) \quad \bar{L}(x, v) = v^k \int_{\binom{v}{(0)}}^{(v)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} dv^i.$$

Es gilt also der

Satz 3. In den metrischen Räumen, in welchen die Extremalen Geraden sind, wird die metrische Grundfunktion durch die Formel (14) dargestellt, wobei die Φ_i dem Gleichungssystem (11₁) und (11₂) genügen und in ihren Veränderlichen positiv homogene Funktionen -1 -ten Grades sind, und $\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} v^r$ in v^r konvex ist.

⁸⁾ In (10₁), (10₂), (11₁) und (11₂) können die großen Buchstaben die Werte $1, 2, \dots, n-1$ annehmen.

Als Beispiel werden wir eine solche Funktion in der Umgebung des Punktes $(x^1 \dots x^{n-1}, x^n \neq 0)$ hinschreiben:

$$\bar{L}(x, v) = \frac{1}{(x^n)^2} \varphi(x^1 v^n - x^n v^1, \dots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}) + \psi(v)$$

wobei die Funktionen φ und ψ in ihren Veränderlichen positiv homogen ersten Grades und konvex sind.

Literatur

- [1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie, *Annals of Math.* **48** (1947), 753–781.
- [2] E. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles* **79** (1934).
- [3] D. HILBERT, Mathematische Probleme, *Göttinger Nach.* (1900), 253–297.
- [4] A. RAPCSÁK, Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 285–290.
- [5] A. RAPCSÁK, Über die Metrisierbarkeit affinzusammenhängender Bahnräume. *Ann. Mat. Pura Appl. (Bologna)* **67** (1962), 233–238.

(Eingegangen am 27. Januar, 1962.)