

Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung“

Von A. MOÓR (Szeged)

§ 1. Allgemeine rekurrente kovariante Ableitung

In unserer Arbeit „Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung“¹⁾ konstruierten wir im § 4 solche symmetrische Übertragungsparameter $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ für die die kovariante Ableitung eines vorgegebenen n -dimensionalen in α, β symmetrischen kovarianten Tensorfeldes $T_{\alpha\beta}(x)$ von zweiter Stufe rekurrent ist, d. h.:

$$(1) \quad \nabla_{\nu} T_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\nu} T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha}^{\rho\nu} T_{\rho\beta} - \Gamma_{\beta}^{\rho\nu} T_{\alpha\rho} = k_{\nu} T_{\alpha\beta}.$$

k_{ν} bedeutet in der Formel (1) ein vorgegebenes kovariantes Vektorfeld. Die Formel von $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ ist:

$$(2) \quad \Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} T^{\rho\gamma} (\partial_{\nu} T_{\alpha\rho} + \partial_{\alpha} T_{\rho\nu} - \partial_{\rho} T_{\nu\alpha}) - \frac{1}{2} (k_{\nu} \delta_{\alpha}^{\gamma} + k_{\alpha} \delta_{\nu}^{\gamma} - k_{\rho} T^{\rho\gamma} T_{\nu\alpha}),$$

wo $T^{\rho\gamma}$ einen symmetrischen Tensor bedeutet, der durch die Formeln

$$T_{\alpha\rho} T^{\rho\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

definiert ist.

Bedingen wir jetzt, daß das Vektorfeld $T_{\alpha\beta}$ beliebig ist, so ist schon das Gleichungssystem (1) für die $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ im allgemeinen nicht lösbar, da man in diesem Falle n^3 Gleichungen mit $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ unbekanntem $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ hat. Es entsteht aber die Frage, was für eine Form die allgemeinen Übertragungsparameter $L_{\alpha}^{\beta\gamma}$ haben müssen, damit das Tensorfeld $T_{\alpha\beta}$ bezüglich der durch $L_{\alpha}^{\beta\gamma}$ bestimmten kovarianten Ableitung eine rekurrente kovariante Ableitung habe, d. h.:

$$(3) \quad \nabla_{\nu} T_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\nu} T_{\alpha\beta} - L_{\alpha}^{\rho\nu} T_{\rho\beta} - L_{\beta}^{\rho\nu} T_{\alpha\rho},$$

$$(4) \quad \nabla_{\nu} T_{\alpha\beta} = k_{\nu} T_{\alpha\beta}$$

gültig seien. Die Formel (4) ist nach (3) mit

$$(5) \quad L_{\alpha}^{\rho\nu} T_{\rho\beta} + L_{\beta}^{\rho\nu} T_{\alpha\rho} = \partial_{\nu} T_{\alpha\beta} - k_{\nu} T_{\alpha\beta}$$

gleichwertig. (5), bzw. (4) ist nun für die $L_{\alpha}^{\rho\nu}$ ein Gleichungssystem mit n^3 Gleichungen und ebensoviel Unbekannten.

¹⁾ *Publ. Math. Debrecen* 9 (1962), 81–93.

Wir können (4) in der Form:

$$(6a) \quad \nabla_v T_{(\alpha\beta)} = k_v T_{(\alpha\beta)} \quad (6b) \quad \nabla_v T_{[\alpha\beta]} = k_v T_{[\alpha\beta]}$$

schreiben²⁾, und mit den Bezeichnungen:

$$(7) \quad \Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} L_{(\alpha}^{\beta\gamma)}, \quad S_{\alpha}^{\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} L_{[\alpha}^{\beta\gamma]}$$

können in dem Gleichungssystem (6a), (6b) die $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ und $S_{\alpha}^{\beta\gamma}$ für unbekannte Größen betrachtet werden. Die zu bestimmenden Übertragungsparameter sind dann durch

$$(8) \quad L_{\alpha}^{\beta\gamma} \equiv \Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma} + S_{\alpha}^{\beta\gamma}$$

festgelegt.

Durch zyklische Permutation der Indizes α, β, γ bekommt man aus (6a) bzw. (6b) zwei weitere Gleichungen. Addiert man die ersten beide, subtrahiert man die dritte, beachtet man ferner die Symmetrie, bzw. die Schiefsymmetrie von $T_{(\alpha\beta)}$ bzw. $T_{[\alpha\beta]}$, so wird auf Grund der Relationen (8):

$$(9a) \quad \Gamma_{\alpha}^{\rho\nu} T_{(\rho\beta)} = \frac{1}{2}(\partial_\nu T_{(\alpha\beta)} + \partial_\alpha T_{(\rho\nu)} - \partial_\beta T_{(\nu\alpha)}) - \frac{1}{2}(k_\nu T_{(\alpha\beta)} + k_\alpha T_{(\rho\nu)} - k_\beta T_{(\nu\alpha)}) + \\ + S_{\alpha}^{\rho\beta} T_{(\rho\nu)} + S_{\nu}^{\rho\beta} T_{(\rho\alpha)},$$

bzw.

$$(9b) \quad S_{\alpha}^{\rho\nu} T_{[\rho\beta]} = \frac{1}{2}(\partial_\nu T_{[\alpha\beta]} + \partial_\alpha T_{[\rho\nu]} - \partial_\beta T_{[\nu\alpha]}) - \frac{1}{2}(k_\nu T_{[\alpha\beta]} + k_\alpha T_{[\rho\nu]} - k_\beta T_{[\nu\alpha]}) - \\ - \Gamma_{\alpha}^{\rho\beta} T_{[\rho\nu]} + \Gamma_{\nu}^{\rho\beta} T_{[\rho\alpha]}.$$

Wir werden noch die Existenz des inversen Tensors von $T_{(\alpha\beta)}$ bzw. $T_{[\alpha\beta]}$ bedingen, d. h. die Lösbarkeit der Gleichungen

$$T_{(\alpha\rho)} Q^{\beta\rho} = \delta_\alpha^\beta, \quad \text{bzw.} \quad T_{[\alpha\rho]} Q^{*\beta\rho} = \delta_\alpha^\beta$$

voraussetzen; dann bekommt man aus (9a), bzw. (9b) nach einer Überschiebung mit $Q^{\gamma\beta}$ bzw. $Q^{*\gamma\beta}$, $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ ausgedrückt mit $S_{\alpha}^{\beta\gamma}$, bzw. $S_{\alpha}^{\beta\gamma}$ ausgedrückt mit $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$.

Für die vollständige Bestimmung von $L_{\alpha}^{\beta\gamma}$ können wir so (9a), wie (9b) benützen. Substituiert man z. B. $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ aus (9a) in die Formel (8), so ist (6a) identisch erfüllt, d. h. $S_{\alpha}^{\beta\gamma}$ kann noch beliebig gewählt werden. (6b) ist aber keine Identität und gibt $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ Gleichungen für die unbekanntenen $S_{\alpha}^{\beta\gamma}$. Bestimmt man aber $S_{\alpha}^{\beta\gamma}$ durch (9b), so wird (6b) unter Benützung der Übertragungsparameter (8) für beliebige $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ identisch erfüllt. Die Formeln (6a) bestimmen dann für die unbekanntenen $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$ $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Gleichungen.

Aus (9a), bzw. (9b) erhält man nach einer Überschiebung mit $Q^{\gamma\beta}$, bzw. mit $Q^{*\gamma\beta}$:

$$(10a) \quad \Gamma_{\alpha}^{\gamma\nu} = \frac{1}{2} Q^{\gamma\beta} \{ \partial_\nu T_{(\alpha\beta)} - k_\nu T_{(\alpha\beta)} \}_{\alpha\beta\nu} - Q^{\gamma\beta} (S_{\alpha}^{\rho\beta} T_{(\rho\nu)} + S_{\nu}^{\rho\beta} T_{(\rho\alpha)}),$$

$$(10b) \quad S_{\alpha}^{\gamma\nu} = \frac{1}{2} Q^{*\gamma\beta} \{ \partial_\nu T_{[\alpha\beta]} - k_\nu T_{[\alpha\beta]} \}_{\alpha\beta\nu} - Q^{*\gamma\beta} (\Gamma_{\alpha}^{\rho\beta} T_{[\rho\nu]} - \Gamma_{\nu}^{\rho\beta} T_{[\rho\alpha]}),$$

wo $\{ \dots \}_{\alpha\beta\nu}$ die zyklische Permutation der Indizes α, β, ν bedeutet, bei der dritten Permutation jedoch kommt noch ein Vorzeichenwechsel hinzu.

²⁾ $T_{(\alpha\beta)}$ bzw. $T_{[\alpha\beta]}$ bedeutet — wie gewöhnlich — den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von $T_{\alpha\beta}$.

Aus unseren bisherigen Untersuchungen folgt leicht der folgende:

Satz 1. Ist $T_{[\alpha\beta]}=0$, so bestimmen (8) und (10a), die allgemeinste Form von $L_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ mit frei wählbaren $S_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ so, daß $T_{(\alpha\beta)}$ bezüglich dieser Übertragungsparameter eine rekurrente kovariante Ableitung hat. Ist $T_{(\alpha\beta)}=0$, so bestimmen (8) und (10b) die allgemeinste Form von $L_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ mit frei wählbaren $\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ so, daß $T_{[\alpha\beta]}$ bezüglich dieser $L_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ eine rekurrente kovariante Ableitung hat.

BEWEIS. Ist $T_{[\alpha\beta]}=0$, so ist (6b) eine Identität, und (4) und (6a) stimmen überein. (6a) ist aber mit den durch (8) und (10a) bestimmten Übertragungsparametern für beliebige $S_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ erfüllt, und das beweist die erste Hälfte unseres Satzes.

Nehmen wir nun an, daß $T_{(\alpha\beta)}=0$ ist. Jetzt ist (6a) identisch erfüllt und (4) geht in (6b) über. (6b) ist aber mit den durch (8) und (10b) bestimmten Übertragungsparameter für beliebige $\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ erfüllt, und das beweist die zweite Hälfte des Satzes.

Bemerkung. Die durch (8) und (10a) bestimmten Übertragungsparameter sind die unmittelbare Verallgemeinerungen unserer Formel (4.6) der im Fußnote ¹⁾ zitierten Arbeit.

§ 2. Der zweidimensionale Fall

Die im vorigen angegebene Methode für die Bestimmung der $L_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$, die für $T_{\alpha\beta}$ eine rekurrente kovariante Ableitung bestimmen, ist nicht immer anwendbar, ja sogar existiert nicht immer ein geeignetes $L_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$. Wir werden das durch ein Beispiel, nämlich durch die Untersuchung des zweidimensionalen Falles zeigen.

Aus (5) wird im zweidimensionalen Fall:

$$(11) \quad \begin{cases} 2L_{1^1}{}^1{}_v T_{11} + 2L_{1^2}{}^2{}_v T_{(21)} & = \Phi_{11v} \\ L_{1^1}{}^1{}_v T_{12} + L_{1^2}{}^2{}_v T_{22} + L_{2^1}{}^1{}_v T_{11} + L_{2^2}{}^2{}_v T_{12} & = \Phi_{12v} \\ L_{2^1}{}^1{}_v T_{11} + L_{2^2}{}^2{}_v T_{21} + L_{1^1}{}^1{}_v T_{21} + L_{1^2}{}^2{}_v T_{22} & = \Phi_{21v} \\ 2L_{2^1}{}^1{}_v T_{(12)} + 2L_{2^2}{}^2{}_v T_{22} & = \Phi_{22v}, \end{cases}$$

wo

$$\Phi_{\alpha\beta v} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_v T_{\alpha\beta} - k_v T_{\alpha\beta}$$

bedeutet. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß die Determinante dieses Gleichungssystems Null ist, d. h.:

$$\begin{vmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0 \\ T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21} \\ 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Tatsache folgt der

Satz 2. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer rekurrenten kovarianten Ableitung des Tensors $T_{\alpha\beta}$ im zweidimensionalen Raum ist, daß der Rang der Matrix

$$\text{Mat} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Phi_{11v} & 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0 \\ \Phi_{12v} & T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12} \\ \Phi_{21v} & T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21} \\ \Phi_{22v} & 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{pmatrix}$$

mit dem Rang der Matrix

$$\mathfrak{M}^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0 \\ T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21} \\ 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{pmatrix}$$

übereinstimme.

Bemerkung. Man kann leicht verifizieren, daß in den Fällen $T_{(\alpha\beta)}=0$, bzw. $T_{[\alpha\beta]}=0$ der Rang von $\mathfrak{M}^* < 4$ ist. In diesem Falle existiert also eine Lösung von (11)

(Eingegangen am 18. Juni 1963.)