

Eine Charakterisierung des 0-Radikals einer Halbgruppe

Von HANS-JÜRGEN HOEHNKE (Berlin)

In einer kürzlich erschienenen Note [3] hat A. KERTÉSZ die auf dem Begriff der Frattinischen Untergruppe einer Gruppe beruhende Charakterisierung des Jacobson'schen Radikals eines Ringes mit Einselement durch FUCHS [1] auf beliebige Ringe übertragen können. In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß sich das von mir in [2] eingeführte 0-Radikal $\text{rad}^0 S$ einer Halbgruppe S (mit Nullelement 0), das im folgenden das 0-Rechtsradikal $\text{rad}_r^0 S$ genannt wird, in analoger Weise charakterisieren läßt.

Es sei S eine Halbgruppe mit Null 0 und α eine Relation in S , d. h. eine Teilmenge von $S \times S$. Die von α erzeugte Rechtskongruenz in S (d. h. der Durchschnitt aller Rechtskongruenzen ϱ in S mit $\alpha \subseteq \varrho$) sei $\{\alpha\}_r$. Bezeichnet $\varrho \vee \sigma$ das Supremum zweier Rechtskongruenzen ϱ und σ im Verband $\mathfrak{K}_r$ aller Rechtskongruenzen in S , so gilt für zwei Relationen α und β in S offenbar $\{\alpha\}_r \vee \{\beta\}_r = \{\alpha \cup \beta\}_r$, wo $\alpha \cup \beta$ die mengentheoretische Vereinigung von α und β ist. Eine Relation α in S heißt eine rechts erzeugende Relation der Allrelation $\mathbf{1}$ in S wenn $\{\alpha\}_r = \mathbf{1}$. Wir betrachten die Gesamtheit $\Phi_r^0(S)$ aller der Elemente $a \in S$, welche die Eigenschaft besitzen, daß $(xa, 0)$ für jedes $x \in S$ aus jeder rechts erzeugenden Relation von $\mathbf{1}$ gestrichen werden darf. D. h., aus $\{ \{(xa, 0)\} \cup \alpha \}_r = \mathbf{1}$, wo $x \in S$ und α eine Relation in S ist, soll stets folgen $\{\alpha\}_r = \mathbf{1}$.

Satz. Es gilt $\Phi_r^0(S) = \text{rad}_r^0 S$ für jede Halbgruppe S mit Nullelement.

BEWEIS. 1. Wir zeigen zuerst, daß $\text{rad}_r^0 S \subseteq \Phi_r^0(S)$. Wenn $a \in S$, $a \notin \Phi_r^0(S)$, so existieren ein Element $x \in S$ und eine Relation β in S , für welche

$$(1) \quad \{ \{(xa, 0)\} \cup \beta \}_r = \mathbf{1}$$

und $\{\beta\}_r \neq \mathbf{1}$. Es sei μ eine Rechtskongruenz in S , so daß $\beta \subseteq \mu$, $(xa, 0) \notin \mu$ und daß μ maximal in $\mathfrak{K}_r$ bezüglich dieser Eigenschaft ist. (Nach dem ZORN'schen Lemma existiert stets ein solches μ .) Zuzufolge (1) ist μ eine maximale Rechtskongruenz in S . Daraus ergibt sich, daß das Restklassensystem S/μ von S bezüglich μ ein irreduzibles (sogar total irreduzibles) S -System im Sinne von [2] ist. Denn bezeichnet $\bar{u}$ die Restklasse eines Elementes $u \in S$ bezüglich μ , so gilt wegen $(xa, 0) \notin \mu$

$$(2) \quad \bar{x}a \neq \bar{0}.$$

Die Menge $F(S/\mu)$ der Fixelemente von S/μ enthält nur das Element $\bar{0}$, da $F(S/\mu) = (S/\mu)0 = \{\bar{0}\}$. Da S/μ außer sich selbst und $\{\bar{0}\}$ keine S -Teilsysteme enthält und $\bar{x}S \neq \{\bar{0}\}$ ist, so muß sein $\bar{x}S = S/\mu$ und daher erst recht $(S/\mu)S = S/\mu$. Damit ist

gezeigt, daß S/μ (total) irreduzibel ist. Dies hat mit Rücksicht auf (2) zur Folge, daß für geeignetes $b \in S$ die Beziehung

$$(3) \quad \bar{x}ab = \bar{x} \neq \bar{0}$$

besteht. Benutzt man die Darstellung $\text{rad}_r^0 S = \bigcap_{M \in I} M^0$, wo I die Menge aller irreduziblen S -Systeme ist, und die in [2] angegebene Definition von M^0 , so folgt aus (3) $a \notin (S/\mu)^0$ und daher $a \notin \text{rad}_r^0 S$.

2. Nachweis von $\Phi_r^0(S) \subseteq \text{rad}_r^0 S$. Es sei $a \in S$, $a \notin \text{rad}_r^0 S$. Jetzt gehen wir auf die in [2] im Beweis von Satz 20 angegebene Darstellung $\text{rad}_r^0 S = \bigcap_{M \in T} M^{-1}\{0\}$ zurück, wo T die Menge der total irreduziblen S -Systeme ist. Es existiert dann ein $M \in T$, so daß $Ma \neq \{0\}$, und, wegen $MS = M$, ein Element $x \in S$, so daß $Mxa \neq \{0\}$, wo 0 das Fixelement von M bezeichnet. Es sei z ein Element von M für welches $zxa \neq 0$. Dann ist $z \neq 0$ und $M = zS$. Durch $(a, b) \in \mu_z \Leftrightarrow za = zb$ ist eine maximal modulare Rechtskongruenz μ_z in S definiert, wobei wegen $zxa \neq z0$ jedenfalls $(xa, 0) \notin \mu_z$. Da μ_z maximal in $\mathfrak{A}_r$ ist, muß sein $\{(xa, 0)\} \cup \mu_z = \mathbf{1}$. Nach Definition ist aber sicher $\mu_z \neq \mathbf{1}$, somit $a \notin \Phi_r^0(S)$. Damit ist der Beweis unseres Satzes abgeschlossen.

Wenn $\Phi_l^0(S)$, $\text{rad}_l^0 S$ in analoger Weise wie $\Phi_r^0(S)$, $\text{rad}_r^0 S$ (unter Vertauschung von „rechts“ und „links“) definiert werden, so gilt auch $\Phi_l^0(S) = \text{rad}_l^0 S$. Es scheint eine offene Frage zu sein, ob stets $\text{rad}_r^0 S = \text{rad}_l^0 S$ zutrifft.¹⁾

Literatur

- [1] L. FUCHS, A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 167–168.
- [2] H.-J. HOEHNKE, Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, *Math. Nachr.* **26** (1963/64), 1–13.
- [3] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 595–597.
- [4] H. SEIDEL, Über das Radikal einer Halbgruppe, *Math. Nachr.* (im Druck).

(Eingegangen am 22. Juli 1963.)

¹⁾ (Zusatz bei Korrektur.) Diese Frage wurde inzwischen in positivem Sinne gelöst. Genauer wird in [4] bewiesen, daß $\text{rad}_r^0 S$ mit der Gesamtheit aller eigentlich nilpotenten Elemente von S übereinstimmt.