

Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakteristischen Polynom

Von HORST SACHS (Ilmenau)

I. Einleitung

1. *Definitionen.* Wir betrachten im Folgenden ungerichtete Graphen G und gerichtete Graphen $\vec{G}$ mit endlich vielen Knotenpunkten $K_1, K_2, \dots, K_k$ und endlich vielen (ungerichteten bzw. gerichteten) Kanten; Schlingen und Mehrfachkanten sind zugelassen. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie in [11], gerichtete Gebilde werden durch einen Pfeil ($\vec{}$) gekennzeichnet.

$\vec{G}(G)$ bezeichne denjenigen gerichteten Graphen, welcher aus dem ungerichteten Graphen G hervorgeht, indem jede Kante von G durch ein Paar entgegengesetzt gerichteter Kanten ersetzt wird (auch jede Schlinge von G wird durch zwei „gerichtete“ Schlingen ersetzt).

Eine Strecke S besteht aus zwei Knotenpunkten K, K' und einer K mit K' verbindenden ungerichteten Kante.

Ein gerichteter Graph heißt linear, wenn in jedem seiner Knotenpunkte genau eine gerichtete Kante entspringt und genau eine gerichtete Kante mündet. Ein gerichteter Kreis $\vec{C}$ ist ein zusammenhängender linearer (gerichteter) Graph. Ein Linearfaktor von $\vec{G}$ ist ein linearer gerichteter Untergraph von $\vec{G}$, welcher sämtliche Knotenpunkte von $\vec{G}$ enthält.

a_{ij} sei die Anzahl der in $\vec{G}$ bzw. $\vec{G}(G)$ vom Knotenpunkt K_i zum Knotenpunkt K_j laufenden gerichteten Kanten. Die Matrix $A = (a_{ij})$ heißt die Knotenmatrix (oder Adjazenzmatrix) von $\vec{G}$ bzw. G . Die Knotenmatrix eines ungerichteten Graphen ist symmetrisch, ihre Diagonalelemente sind gerade.

2. *Problemstellung; Resultate.* Ein Graph $\vec{G}$ oder G ist durch seine Knotenmatrix A vollständig bestimmt, während umgekehrt A durch $\vec{G}$ bzw. G nur bis auf eine beliebige gleichzeitige Permutation von Zeilen und Spalten bestimmt ist, da die Numerierung der Knotenpunkte ganz willkürlich vorgenommen werden kann: Die Knotenmatrizen A und A^* gehören genau dann zum gleichen Graphen, wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß

$$A^* = P^{-1}AP.$$

Sämtliche Eigenschaften des Graphen $\vec{G}$ bzw. G sind unabhängig von der Numerierung seiner Knotenpunkte, ihnen entsprechen also eineindeutig diejenigen Eigen-

schaften der Matrix $\mathbf{A}$, welche invariant sind gegenüber der (symmetrischen) Gruppe der Transformationen $\mathbf{P}$.

Eine wichtige Invariante von $\mathbf{A}$ ist das charakteristische Polynom

$$f(x) = (-1)^k |\mathbf{A} - x\mathbf{E}| = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

($\mathbf{E}$ ist die Einheitsmatrix), und es drängt sich die Frage auf, welche Eigenschaften von $\vec{G}$ bzw. G allein aus $f(x)$ abgelesen werden können¹⁾. Wir wollen uns hier darauf beschränken, den Zusammenhang zwischen $f(x)$ und den in $\vec{G}$ bzw. G vorhandenen Kreisen und ihrer Anordnung näher zu untersuchen.

Man erkennt leicht, wie man aus den kombinatorisch-topologischen Eigenschaften eines Graphen $\vec{G}$ oder G die Werte der zugehörigen Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_k$ von $f(x)$ ablesen kann (Sätze 1, 1'), interessanter ist jedoch das folgende Problem: Was läßt sich über die Anzahlen der in $\vec{G}$ bzw. G vorhandenen Kreise einer bestimmten Länge aussagen, wenn von $\vec{G}$ bzw. G nur das charakteristische Polynom bekannt ist?

Für gerichtete Graphen läßt sich hier relativ leicht ein Resultat gewinnen (Sätze 2, 3). Die Übertragung dieses Ergebnisses auf ungerichtete Graphen führt aber auf Schwierigkeiten, sie gelingt schließlich für den Fall regulärer ungerichteter Graphen unter wesentlicher Verwendung der Sätze 2 und 3 aus [11] (Satz 6):

Es sei G ein regulärer ungerichteter Graph mit der Tailleweite t und dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k.$$

Ist dann h eine beliebige natürliche Zahl $\leq 2t-1$, so gilt: Die Anzahl der in G enthaltenen verschiedenen Kreise der Länge h ist durch den Grad k , die Maximalwurzel r und die ersten h Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_h$ des charakteristischen Polynoms bestimmt.

Insbesondere lassen sich also die Tailleweite und die Anzahl der Taillekreise aus den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ablesen²⁾.

Als Nebenresultate ergeben sich u. a. Aussagen über die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer beliebigen quadratischen Matrix mit nicht-negativen Elementen (Sätze 2a, 3a).

II. Der Koeffizientensatz

1. Der Koeffizientensatz für gerichtete Graphen.

Satz 1. *Es sei*

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

das charakteristische Polynom eines endlichen gerichteten Graphen $\vec{G}$. Dann ist

$$(1) \quad a_i = \sum_{\vec{L}_i \subset \vec{G}} (-1)^{n(\vec{L}_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

¹⁾ Diese Frage wird, in anderer Hinsicht als hier, auch in [13] behandelt. Weitere Arbeiten, die sich mit dem charakteristischen Polynom eines Graphen beschäftigen: [1], [6], [14], [15], [16].

²⁾ Diese Frage wurde von G. RINGEL aufgeworfen.

wo die Summation über alle in $\vec{G}$ enthaltenen linearen gerichteten Untergraphen $\vec{L}_i$ mit genau i Knotenpunkten zu erstrecken ist; $n(\vec{L}_i)$ bezeichnet die Anzahl der Komponenten von $\vec{L}_i$ (das ist die Anzahl der gerichteten Kreise, in welche $\vec{L}_i$ zerfällt).

Man kann das auch so ausdrücken: Jeder lineare gerichtete Untergraph mit genau i Knotenpunkten von $\vec{G}$ leistet zu a_i den Beitrag $+1$ oder -1 , je nachdem er in eine gerade oder ungerade Anzahl von Kreisen zerfällt.³⁾

2. Der Koeffizientensatz für ungerichtete Graphen. Mittels Satz 1 können die Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms auch für einen ungerichteten Graphen G leicht angegeben werden, indem man von G zu $\vec{G} = \vec{G}(G)$ übergeht und Satz 1 auf $\vec{G}$ anwendet. Man kann aber die rechte Seite von (1) auch so fassen, daß darin keine gerichteten, sondern nur ungerichtete Untergraphen von G vorkommen:

Als Grundfigur U_i bezeichnen wir einen ungerichteten Graphen mit genau i Knotenpunkten, dessen sämtliche Komponenten (ungerichtete) Kreise und Strecken sind (Abb. 1). Es sei $n = n(U_i)$ die Anzahl der Komponenten von U_i und es sei

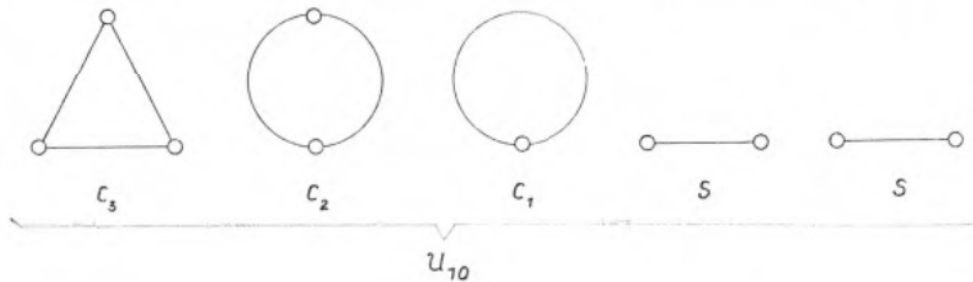


Abb. 1

$c = c(U_i)$ die Anzahl der darunter befindlichen Kreise. Jeder lineare Untergraph $\vec{L}_i$ von $\vec{G} = \vec{G}(G)$ bestimmt genau eine Grundfigur U_i von G , welche man erhält, wenn man von der Richtung der Kanten von $\vec{L}_i$ absieht; umgekehrt gibt jede Grundfigur U_i von G Anlaß zu genau $2^{c(U_i)}$ linearen Untergraphen $\vec{L}_i$ von $\vec{G}$, indem nämlich jeder der Strecken von U_i je genau ein gerichteter Kreis von $\vec{G}$, jedem der c Kreise von U_i aber je genau zwei verschiedene gerichtete Kreise in $\vec{G}$ entsprechen, und diese Kreise können folglich auf genau 2^c verschiedene Weisen zu linearen Untergraphen $\vec{L}_i$ zusammengefaßt werden, welche zur Summe auf der rechten Seite von (1) je den gleichen Beitrag $(-1)^{n(U_i)}$, alle zusammen also den Beitrag $(-1)^{n(U_i)} \cdot 2^{c(U_i)}$ liefern. Mithin können wir anstelle von (1) auch schreiben

$$(2) \quad a_i = \sum_{U_i \subset G} (-1)^{n(U_i)} \cdot 2^{c(U_i)};$$

aus Satz 1 folgt damit

Satz 1'. Es sei G ein ungerichteter Graph mit dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k.$$

³⁾ Die Determinante der Adjazenz-Matrix wurde von F. HARARY [5] untersucht.

Als Elementarfigur E werde bezeichnet

- a) die Strecke S ,
- b) jeder (ungerichtete) Kreis C_p mit $p \geq 1$ Knotenpunkten, und Grundfigur U_i heiße jeder Graph mit genau i Knotenpunkten, dessen sämtliche Komponenten Elementarfiguren sind; weiter sei $n(U_i)$ die Anzahl der Komponenten von U_i und $c(U_i)$ die Anzahl der darunter befindlichen Kreise. Dann gilt

$$(2) \quad a_i = \sum_{U_i \subset G} (-1)^{n(U_i)} \cdot 2^{c(U_i)},$$

wo die Summation über alle in G enthaltenen Grundfiguren mit genau i Knotenpunkten zu erstrecken ist.

Dieser Sachverhalt kann noch etwas anders formuliert werden: Der „Beitrag“ b einer Grundfigur sei folgendermaßen definiert:

$$b(S) = -1, \quad b(C_p) = (-1)^{p+1} \cdot 2, \quad b(U_i) = \prod_{E \subset U_i} b(E).$$

Dann gilt

$$(3) \quad (-1)^i \cdot a_i = \sum_{U_i \subset G} b(U_i).$$

3. *Beweis des Koeffizientensatzes.* Wir beweisen im Folgenden Satz 1, womit dann zugleich Satz 1' bewiesen ist.

Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ die Knotenmatrix von $\vec{G}$, so daß

$$f(x) = (-1)^k \cdot |\mathbf{A} - x\mathbf{E}|.$$

Betrachten wir als ersten den Koeffizienten a_k (also das absolute Glied von $f(x)$): Es ist nach der Leibnizschen Definition der Determinante

$$(4) \quad a_k = (-1)^k \cdot |a_{ij}| = \sum_P (-1)^{k+I(P)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k},$$

wo die Summation über alle Permutationen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$$

zu erstrecken ist; $I(P)$ bedeutet wie üblich die Anzahl der Inversionen von P .

Nehmen wir zunächst der Einfachheit halber an, daß $\vec{G}$ keine mehrfachen Kanten besitze, d. h. vom Knotenpunkt K_i zum Knotenpunkt K_j gehe in dieser Richtung höchstens eine Kante (so daß also $a_{ij} = 0$ oder $= 1$ ist). Ein Summand

$$S_P = (-1)^{k+I(P)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k}$$

der Summe (4) ist genau dann von Null verschieden, wenn alle gerichteten Kanten $\overrightarrow{K_1 K_{i_1}}, \overrightarrow{K_2 K_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{K_k K_{i_k}}$ in $\vec{G}$ vorkommen. Schreiben wir nun die Permutation P in Zykelform (d. h. als Produkt elementfremder Zykeln),

$$\overline{\mathbb{P}} P = (1i_1 \dots)(\dots)(\dots),$$

so ist sofort zu sehen: Im Falle $S_P \neq 0$ sind diejenigen Knotenpunkte, welche den Elementen eines Zyklus von P entsprechen, in der durch den Zyklus gegebenen

Reihenfolge und Richtung durch gerichtete Kanten verbunden: Jedem Zyklus entspricht so ein gerichteter Kreis und der ganzen Permutation eine direkte Summe von paarweise fremden gerichteten Kreisen, also ein gerichteter Linearfaktor $\vec{L}_k$ von $\vec{G}$, und umgekehrt: Jedem gerichteten Linearfaktor $\vec{L}_k$ von $\vec{G}$ entspricht ein Summand $S_p = \pm 1$, wo das Zeichen nur von der Anzahl $g(\vec{L}_k)$ der geraden unter den Kreisen von $\vec{L}_k$ abhängt:

$$S_p = (-1)^{k+g(\vec{L}_k)}.$$

Da offenbar

$$k + g(\vec{L}_k) \equiv n(\vec{L}_k), \text{ mod } 2$$

ist, erhalten wir

$$(5) \quad a_k = \sum_P S_p = \sum_{\vec{L}_k \subset \vec{G}} (-1)^{n(\vec{L}_k)}.$$

(5) bleibt aber auch dann richtig, wenn wir die Annahme $a_{ij} \leq 1$ wieder fallen lassen: Es ist nämlich $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ki_k}$ gleich der Anzahl der verschiedenen in $\vec{G}$ enthaltenen gerichteten Linearfaktoren, in welchen die k Knotenpunkte in der durch die Zyklen der festen Permutation P bestimmten Weise miteinander verbunden sind, denn man erhält offenbar gerade die Gesamtheit aller dieser Linearfaktoren, indem man auf jede mögliche Weise für jedes j willkürlich eine von K_j nach K_{i_j} gehende Kante auswählt, und diese Auswahl kann für jedes j gerade auf genau a_{ji_j} Weisen vorgenommen werden. Der Beitrag, den diese Linearfaktoren zur Summe

$$\sum_{\vec{L}_k \subset \vec{G}} (-1)^{n(\vec{L}_k)}$$

liefern, ist daher gleich $(-1)^{k+I(P)} \cdot a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ki_k}$, und wenn man noch über alle Permutationen summiert, erhält man einerseits die rechte Seite von (4) und andererseits die rechte Seite von (5), woraus sogleich die Gültigkeit von (5) auch im allgemeinen Falle folgt.

Die Richtigkeit von (1) ergibt sich nun aus (5) auf folgende Weise: Bekanntlich ist $(-1)^i \cdot a_i$ gleich der Summe der i -reihigen Hauptminoren von $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Beachten wir nun, daß jedem solchen Hauptminor ein von i Knotenpunkten aufgespannter Untergraph von $\vec{G}$ eindeutig entspricht, und wenden wir (5) auf jeden dieser Untergraphen an und summieren, so ergibt sich sogleich

$$(1) \quad a_i = \sum_{\vec{L}_i \subset \vec{G}} (-1)^{n(\vec{L}_i)},$$

wie zu beweisen war.

4. *Einige einfache Folgerungen aus dem Koeffizientensatz.* Bevor wir unser eigentliches Ziel weiter verfolgen, wollen wir kurz einige unmittelbare Folgerungen aus den Sätzen 1 und 1' zusammenstellen.

$\vec{G}$ bzw. G ist genau dann gerade ⁴⁾, wenn sämtliche Koeffizienten a_i mit ungeradem Index verschwinden.

⁴⁾ Ein Graph heißt gerade, wenn er keinen (gerichteten bzw. ungerichteten) Kreis ungerader Länge besitzt. Jeder paare Graph ist gerade, jeder gerade ungerichtete Graph ist paar. Der gerichtete Graph mit den Knotenpunkten 1, 2, 3 und den Kanten (1,2), (1,3), (2,3) ist gerade, aber nicht paar.

BEWEIS. 1) Ein gerader Graph enthält keinen $\vec{L}_{2q+1}$ bzw. U_{2q+1} , folglich ist $a_{2q+1} = 0$.

2) Ein nicht-gerader Graph enthält einen ungeraden Kreis minimaler Knotenzahl u , jede Figur $\vec{L}_u$ bzw. U_u ist notwendig selbst ein Kreis mit u Knotenpunkten, und folglich ist $a_u \neq 0$.

Aus (1) folgt unmittelbar:

$\vec{G}$ ist genau dann kreislos, wenn sämtliche Koeffizienten a_i verschwinden.

Es sei H ein ungerichteter Baum. H ist gerade, folglich ist $a_1 = a_3 = \dots = a_{2q+1} = \dots = 0$. Jede in H enthaltene Grundfigur U_{2q} ist ein linearer Untergraph, welcher aus q Strecken besteht. Aus (2) lesen wir ab:

Die Anzahl der in einem ungerichteten Baum H enthaltenen verschiedenen linearen Untergraphen mit genau q Kanten ist gleich

$$(-1)^q \cdot a_{2q}.$$

Ein Linearfaktor (und zwar genau einer) existiert in H genau dann, wenn $a_k \neq 0$ ist (und zwar ist dann k gerade und $a_k = (-1)^{\frac{1}{2}k}$). ⁵⁾

Setzen wir in (1) bzw. (2) $i=k$ und reduzieren die rechte Seite modulo 2, so erhalten wir:

Die Anzahl der in $\vec{G}$ bzw. G enthaltenen (gerichteten bzw. ungerichteten) Linearfaktoren ist kongruent a_k modulo 2. Ist a_k ungerade, so existiert also mindestens ein Linearfaktor.

Aus (1) folgt weiter unmittelbar:

Die Anzahl der in $\vec{G}$ enthaltenen Linearfaktoren ist nicht kleiner als $|a_k|$.

III. Kreissätze

Haben wir zunächst die Frage behandelt, wie man aus den kombinatorisch-topologischen Eigenschaften eines Graphen, insbesondere aus der Verteilung der in ihm enthaltenen Kreise (und Strecken), das charakteristische Polynom erhalten kann, so wollen wir diese Frage jetzt in gewisser Weise umkehren und versuchen, aus dem gegebenen charakteristischen Polynom eines Graphen G oder $\vec{G}$ möglichst viele Aussagen über die in G bzw. $\vec{G}$ enthaltenen Kreise zu gewinnen.

1. *Kreissätze für gerichtete Graphen.* Es sei $\vec{G}$ ein gerichteter Graph der Tailenweite t ; besitzt $\vec{G}$ keinen Kreis, so sei $t = \infty$. Jeder in $\vec{G}$ enthaltene lineare Untergraph $\vec{L}_t$ mit weniger als $2t$ Knotenpunkten ist notwendig ein Kreis $\vec{C}_t$, denn würde

⁵⁾ Mittels dieser Aussage läßt sich die Tabelle II von [1] (S. 72) leicht überprüfen. So findet man folgende Versehen: Für den Baum  gilt $a_6 = -7$ (statt -5) und für den Baum

 gilt $a_8 = 1$ (statt 0; es ist ein Linearfaktor vorhanden).

er in mehrere Kreise zerfallen, so gäbe es in $\vec{G}$ einen Kreis mit weniger als t Knotenpunkten, und das verstößt gegen die Definition der Tailleweite. Aus Satz 1 folgt

$$a_i = \sum_{\vec{C}_i \subset \vec{G}} (-1)^{n(\vec{C}_i)} = - \sum_{\vec{C}_i \subset \vec{G}} 1 \quad (i < 2t),$$

$-a_i$ ist also gleich der Anzahl der in $\vec{G}$ enthaltenen Kreise $\vec{C}_i$.

Satz 2. Es sei $\vec{G}$ ein gerichteter Graph mit dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

und der Tailleweite t . Weiter sei h eine beliebige natürliche Zahl, welche nicht größer ist als die kleinere der Zahlen $2t-1$, k . Dann gilt:

Die Anzahl der in $\vec{G}$ enthaltenen gerichteten Kreise der Länge h ist gleich $-a_h$.

Insbesondere ist also die Tailleweite t gleich dem kleinsten Index i , für welchen a_i von Null verschieden ist, und die Anzahl der Taillekreise ist gleich $-a_t$.

BEMERKUNG. Beachtet man, daß die Zahlen $-a_{t+1}, -a_{t+2}, \dots, -a_{2t-1}$ gewiß nicht-negativ sind, weil sie die Bedeutung von Anzahlen haben, so erhält man aus Satz 2 einen Satz über das charakteristische Polynom von quadratischen Matrizen mit nichtnegativen ganzrationalen Elementen. Durch eine leichte und naheliegende Modifikation der Schlußweise können wir diesen Satz sogleich auf beliebige quadratische Matrizen mit nicht-negativen (reellen) Elementen ausdehnen und wollen ihn daher gleich für solche Matrizen formulieren:

Satz 2a. Es sei A eine beliebige k -reihige quadratische Matrix mit nicht-negativen Elementen⁶⁾, und es sei

$$f(x) = (-1)^k |A - xE| = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

das zugehörige charakteristische Polynom. Ferner sei e eine natürliche Zahl $\leq k$ und f die kleinere der Zahlen $k, 2e-1$. Wenn dann die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_{e-1}$ sämtlich verschwinden, so sind die Koeffizienten $a_e, a_{e+1}, \dots, a_f$ sämtlich nicht-positiv⁷⁾.

Wir suchen nun das in Satz 2 ausgesprochene Resultat zu erweitern und die Anzahl der Kreise der Länge i auch noch für geeignete Zahlen $i > 2t-1$ zu bestimmen. Es erweist sich als zweckmäßig, einen neuen Begriff einzuführen: Es sei d eine beliebige natürliche Zahl > 1 . Jeder in $\vec{G}$ enthaltene Kreis kleinster *nicht* durch d teilbarer Länge heiße ein d -Taillekreis von $\vec{G}$, seine Länge $t_d = t_d(\vec{G})$ heiße die d -Tailleweite von $\vec{G}$; existiert kein solcher Kreis, so sei $t_d = \infty$.

Satz 3. Es sei $\vec{G}$ ein gerichteter Graph mit dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

und der Tailleweite t ; d sei eine beliebige natürliche Zahl > 1 und t_d sei die d -Taille-

⁶⁾ Zur Theorie der Matrizen mit nicht-negativen Elementen siehe [2], [3], [4], [7], [8], [9], [17].

⁷⁾ Man kann das auch so ausdrücken: Sind die ersten $e-1$ Koeffizienten sämtlich $\equiv 0$, so sind die ersten $2e-1$ Koeffizienten sämtlich $\equiv 0$.

weite von $\vec{G}$. Weiter sei w eine beliebige nicht durch d teilbare natürliche Zahl, welche nicht größer ist als die kleinere der Zahlen $t+t_d-1$ und k . Dann gilt: Die Anzahl der in $\vec{G}$ enthaltenen gerichteten Kreise der Länge w ist gleich $-a_w$.

Insbesondere ist also t_d gleich der kleinsten der nicht durch d teilbaren Zahlen w , für welche a_w von Null verschieden ist, und die Anzahl der d -Taillenkreise ist gleich $-a_{t_d}$.

BEMERKUNG. Ist d kein Teiler von t , so ist trivialerweise $t_d = t$, und Satz 3 sagt weniger aus als Satz 2. Ist aber d ein Teiler von t , so ist gewiß $t_d > t$, und ist nicht gerade $t_d = t+1$, so erhalten wir aus Satz 3 Aussagen, welche wir aus Satz 2 nicht gewinnen können.

Beispiel. $t=9$, $t_9=15$, $t_3=20$. Satz 2 liefert die Anzahlen aller Kreise der Länge c für $c \leq 17$, Satz 3 liefert außerdem mit $d=9$ diese Anzahlen für $c=19$, 20, 21, 22, 23 und mit $d=3$ auch für $c=25$, 26, 28.

Mit $d=2$ erhalten wir folgenden

Zusatz zu Satz 3. Die Länge u eines kürzesten ungeraden Kreises von $\vec{G}$ ist gleich dem Index des ersten nicht-verschwindenden unter den Koeffizienten $a_1, a_3, a_5, \dots$; die Anzahl der kürzesten ungeraden Kreise von G ist gleich $-a_u$.

BEMERKUNG. Die letzte Aussage läßt sich unmittelbar auf ungerichtete Graphen G übertragen, denn offenbar haben die kürzesten ungeraden Kreise von G und $\vec{G}(G)$ die gleiche Länge; wir kommen darauf im nächsten Abschnitt (Satz 7) zurück. — Wir entnehmen hieraus noch einmal, daß $\vec{G}$ bzw. G genau dann gerade ist, wenn alle Koeffizienten mit ungeradem Index verschwinden.

BEWEIS VON SATZ 3. Die Zahl w erfülle die im Satz genannten Bedingungen. Dann ist jeder in $\vec{G}$ enthaltene lineare Untergraph $\vec{L}_w$ notwendig ein Kreis $\vec{C}_w$, denn im anderen Falle besäße $\vec{L}_w$ eine Komponente, deren Knotenpunkt-Anzahl nicht durch d teilbar und folglich $\cong t_d$ ist, und für die übrigen Komponenten stünden dann weniger als t Knotenpunkte zur Verfügung, was ersichtlich nicht sein kann. Hieraus schließen wir genau wie früher:

$$a_w = \sum_{\vec{C}_w \subset \vec{G}} (-1)^{n(\vec{C}_w)} = - \sum_{\vec{C}_w \subset \vec{G}} 1,$$

$-a_w$ ist also gleich der Anzahl der in $\vec{G}$ enthaltenen Kreise $\vec{C}_w$.

BEMERKUNG. Durch die gleiche Überlegung, welche von Satz 2 zu Satz 2a führt, kommen wir von Satz 3 zu

Satz 3a. Es sei A eine beliebige k -reihige quadratische Matrix mit nicht-negativen Elementen, und es sei

$$f(x) = (-1)^k |A - xE| = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

das zugehörige charakteristische Polynom. Weiter sei $a_1 = a_2 = \dots = a_{t-1} = 0$, dagegen $a_t \neq 0$, wobei $t > 1$, und $d > 1$ sei ein beliebiger Teiler von t . Schließlich sei t_d die kleinste unter den nicht durch d teilbaren Zahlen i , für welche a_i nicht verschwindet. Dann gilt:

Ist w eine beliebige nicht durch d teilbare Zahl, welche nicht größer ist als die kleinere der Zahlen $t + t_d - 1$ und k , so ist $a_w \leq 0$.

2. Kreissätze für ungerichtete Graphen. Wollen wir die in II.1 hergeleiteten Kreissätze auf ungerichtete Graphen G übertragen, so stoßen wir auf folgende Schwierigkeit: Enthält der Graph mindestens eine Kante, so enthält der ihm zugeordnete gerichtete Graph $\vec{G} = \vec{G}(G)$ einen Kreis der Länge 1 (wenn nämlich G eine Schlinge besitzt) oder einen Kreis der Länge 2 (wenn G eine Kante besitzt, welche verschiedene Knotenpunkte miteinander verbindet); in jedem Falle ist also $t(\vec{G}) \leq 2$, während doch $t(G)$ beliebig groß sein kann. Es zeigt sich also, daß die Tailenweiten von G und $\vec{G}(G)$ i. a. verschieden sind und auch in keiner (nicht-trivialen) Beziehung zueinander stehen.

Es ist aber — im Anschluß an Satz 1' — leicht Folgendes einzusehen: Für $i < t(G)$ gibt es Grundfiguren U_i höchstens für gerades $i = 2q$, und jede Grundfigur U_{2q} besteht aus genau q Strecken, so daß $n(U_{2q}) = q$ und $c(U_{2q}) = 0$ ist; der Beitrag $b(U_{2q})$, den U_{2q} zum Koeffizienten a_{2q} liefert, ist daher gleich $(-1)^q$ (siehe Satz 1'). Bezeichnen wir nun die Anzahl der in G enthaltenen aus genau q Strecken bestehenden Grundfiguren mit b_q , so folgt aus (2) oder (3) sofort

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } i \\ (-1)^q \cdot b_q & \text{für } i = 2q \end{cases} \quad (i < t(G)).$$

Für $i = t(G)$ kommen zu den eventuell vorhandenen aus lauter Strecken bestehenden Grundfiguren U_i (solche gibt es genau dann, wenn $t(G)$ gerade ist) als weitere genau die Tailenkreise hinzu, von denen jeder zu a_i einen Summanden -2 beiträgt (siehe (2)). Setzen wir

$$(6) \quad \tilde{a}_i = \begin{cases} a_i & \text{für ungerades } i \\ a_i - (-1)^q \cdot b_q & \text{für } i = 2q, \end{cases}$$

so ist also $\tilde{a}_i = 0$ für $i < t(G)$ und $-\tilde{a}_{t(G)}$ gleich der doppelten Anzahl der Tailenkreise.

Damit haben wir bewiesen:

Satz 4. Es sei G ein ungerichteter Graph mit dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k+1} + \dots + a_k,$$

und es sei b_q die Anzahl der verschiedenen linearen Untergraphen von G , welche aus genau q Strecken bestehen; weiter sei

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} a_i & \text{für ungerades } i \\ a_i - (-1)^q \cdot b_q & \text{für } i = 2q. \end{cases}$$

Dann gilt: Die Tailenweite $t(G)$ ist gleich dem Index der ersten nicht-verschwindenden unter den Zahlen $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots$, und die Anzahl der Tailenkreise ist gleich $-\frac{1}{2} \tilde{a}_{t(G)}$.

Es sei W_q ein aus genau q (getrennten) Strecken bestehender Wald. Ist nun speziell G ein regulärer Graph vom Grade r , so folgt aus [11] (Satz 2), daß für $q < t(G)$ und also erst recht für $2q \leq t(G)$ die Anzahl $b_q = A(W_q, G)$ außer von q nur von der Knotenpunkt-Anzahl k und dem Grad r von G abhängt; da nun k

und r als Grad und Maximalwurzel⁸⁾ der charakteristischen Gleichung $f(x) \equiv \equiv (-1)^k |\mathbf{A} - x\mathbf{E}| = 0$ aus $f(x)$ abgelesen werden können, ergibt sich sogleich

Satz 5. Die Taillenweite und die Anzahl der Taillenkreise eines regulären ungerichteten Graphen G sind durch das zugehörige charakteristische Polynom $f(x)$ vollständig bestimmt.

Wir können hier sogleich einen Schritt weiter gehen und den ganzen Satz 2 auf den Fall regulärer ungerichteter Graphen übertragen. Hierbei bedienen wir uns des Satzes 3 aus [11].

Wir verschaffen uns zunächst einen Überblick über die in G enthaltenen Grundfiguren U_i mit $t \leq i < 2t$. Betrachten wir als erste diejenigen Grundfiguren U_i , welche keinen Kreis enthalten (also in lauter Strecken zerfallen); wir bezeichnen diese Grundfiguren mit U_i^0 , ihre Anzahl sei A_i : Für ungerades i gibt es offenbar keine Grundfigur U_i^0 , und für gerades $i = 2q$ ist $A_i = b_q$ gleich der Anzahl der in G enthaltenen linearen Untergraphen, welche aus q Strecken bestehen, also in der Bezeichnungsweise von [11]: $A_i = A(W_q, G)$. Aus $i = 2q < 2t$ folgt $q < t$, und nach [11] (Satz 2) ist dann A_i durch q, k und r bestimmt:

$$A_i = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } i \\ b_q & \text{für } i = 2q. \end{cases}$$

Im Falle $i = 2q$ leistet jede Grundfigur U_i^0 zu $(-1)^i \cdot a_i$ den Beitrag

$$b(U_i^0) = (-1)^q = (-1)^{\frac{i}{2}} \quad (\text{Satz 1'}).$$

Weiter betrachten wir diejenigen Grundfiguren U_i , welche einen Kreis der Länge c enthalten; wir bezeichnen diese Grundfiguren mit U_i^c . Es ist notwendig $t \leq c \leq i$ und U_i^c besitzt höchstens eine Komponente, welche ein Kreis ist, weil die Anzahl i der Knotenpunkte von U_i^c kleiner ist als $2t$. Die nicht dem Kreis angehörenden $i - c$ Knotenpunkte von U_i^c sind dann die Endknotenpunkte von $(i - c)/2$ Strecken, es ist also notwendig $c \equiv i, \text{ mod } 2$. Der Beitrag, den eine jede solche Grundfigur zu $(-1)^i \cdot a_i$ leistet, ist nach Satz 1' gleich

$$b(U_i^c) = (-1)^{(i-c)/2} \cdot (-1)^{c+1} \cdot 2 = (-1)^{1+(i+c)/2} \cdot 2.$$

Die letzte Formel gilt auch im Falle $c = i$, in welchem U_i^i selbst ein Kreis der Länge i ist.

Es kommt nun darauf an, zu jedem c mit $t \leq c \leq i$, $c \equiv i \text{ mod } 2$ die Anzahl B_i^c der verschiedenen Grundfiguren U_i^c zu ermitteln.

In G mögen genau D_c Kreise der Länge c enthalten sein, etwa die Kreise C_c^j ($j = 1, 2, \dots, D_c$). Im Falle $c = i$ haben wir $B_i^i = D_i$; im Falle $c < i$ verfahren wir folgendermaßen:

Der Graph G_c^j entstehe aus G , indem aus G alle Knotenpunkte von C_c^j sowie sämtliche mit diesen Knotenpunkten inzidenten Kanten entfernt werden. Dann ist

⁸⁾ Offenbar ist $f(r) = 0$, da die Summe der Spaltenvektoren von $|\mathbf{A} - r\mathbf{E}|$ verschwindet. Nach bekannten Sätzen (siehe [18], pp. 212, 215) ist jede Nullstelle x_j von $f(x)$ reell und $\leq r$, d. h. r ist die Maximalwurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

die Anzahl der in G enthaltenen Grundfiguren U_i^c , welche den festen Kreis C_c^j enthalten, offenbar gleich der Anzahl $E_{i,c}^j$ der in G_c^j enthaltenen, aus genau $(i-c)/2$ Strecken bestehenden Wälder $W_{(i-c)/2}$. Die Durchmessersumme D eines solchen Waldes ist $D(W_{(i-c)/2}) = (i-c)/2 < (2t-c)/2$, folglich hängt nach [11] (Satz 3) die Anzahl $E_{i,c}^j$ nur von den Zahlen i, r, k und c ab, nicht aber von j und auch nicht von der sonstigen Struktur des Graphen G . Wir lassen demgemäß den oberen Index j fort, und da wir die Zahlen r und k aus $f(x)$ unmittelbar ablesen können, dürfen wir die Zahlen $E_{i,c}$ als mit $f(x)$ gegeben ansehen.

Damit haben wir im Falle $c < i$ erhalten:

$$B_i^c = \sum_{j=1}^{D_c} E_{i,c}^j = E_{i,c} \cdot D_b.$$

Indem wir nun über alle von den einzelnen Grundfiguren U_i zu $(-1)^i \cdot a_i$ geleisteten Beiträge summieren, bekommen wir

$$(-1)^i \cdot a_i = \sum_{U_i^0} b(U_i^0) + \sum_{\substack{t \leq c < i \\ c \equiv i, (2)}} \sum_{U_i^c} b(U_i^c) + \sum_{U_i^i} b(U_i^i)$$

und daraus, indem wir die gefundenen Werte einsetzen, für gerades i :

$$(7a) \quad a_i = (-1)^{i/2} \cdot b_{i/2} + \sum_{\substack{t \leq c < i \\ c \equiv 0, (2)}} (-1)^{1+(i+c)/2} \cdot 2E_{i,c} \cdot D_c - 2D_i,$$

für ungerades i :

$$(7b) \quad a_i = \sum_{\substack{t \leq c < i \\ c \equiv 1, (2)}} (-1)^{(i+c)/2} \cdot 2E_{i,c} \cdot D_c - 2D_i.$$

Diese Formeln gelten, solange i kleiner ist als $2t$.

Die Gleichungen (7) können wir nun leicht sukzessive nach den gesuchten Anzahlen D_i auflösen: Ist etwa t gerade, so erhalten wir (unter Benutzung von (6)) der Reihe nach

aus (7b):

$$D_{t+1} = -\frac{1}{2} \tilde{a}_{t+1}$$

aus (7a):

$$D_{t+2} = -\frac{1}{2} \{ \tilde{a}_{t+2} - 2E_{t+2,t} \cdot D_t \},$$

wo D_t die nach Satz 5 bekannte Anzahl der Taillenkreise von G ist,

aus (7b):

$$D_{t+3} = -\frac{1}{2} \{ \tilde{a}_{t+3} - 2E_{t+3,t+1} \cdot D_{t+1} \},$$

usw. Die hierbei auftretenden, durch (6) definierten Zahlen $\tilde{a}_j$ sind nach [11] (Satz 2) durch die Zahlen r, k und a_j bestimmt.

Damit haben wir bewiesen:

Satz 6. Es sei G ein regulärer ungerichteter Graph mit der Taillenweite t und dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k.$$

Ist dann n eine beliebige natürliche Zahl $\leq 2t-1$, so gilt: Die Anzahl der in G enthaltenen verschiedenen Kreise der Länge n ist durch den Grad k , die Maximalwurzel r und die ersten n Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ des charakteristischen Polynoms bestimmt.

Schließlich läßt sich der Zusatz zu Satz 3 ohne Schwierigkeit auf beliebige ungerichtete Graphen übertragen: Wir knüpfen an die im Anschluß an diesen Zusatz gemachte Bemerkung an und beachten, daß jedem kürzesten ungeraden Kreis von G genau zwei entgegengesetzt orientierte kürzeste ungerade Kreise von $\vec{G}(G)$ entsprechen, die Anzahl der kürzesten ungeraden Kreise von G ist also genau halb so groß wie die Anzahl der kürzesten ungeraden Kreise von $\vec{G}(G)$. Damit ergibt sich aus dem Zusatz zu Satz 3:

Satz 7. Es sei G ein beliebiger ungerichteter Graph mit dem charakteristischen Polynom

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k.$$

Dann gilt: Die Länge u eines kürzesten ungeraden Kreises von G ist gleich dem Index des ersten nicht-verschwindenden unter den Koeffizienten $a_1, a_3, a_5, \dots$: die Anzahl der kürzesten ungeraden Kreise von G ist gleich $-\frac{1}{2} a_u$.

3. *Zwei Beispiele.* Wir betrachten kubische Graphen mit l Kanten. Dann können wir die Zahlen $E_{i,c}$ in den einfachsten Fällen $i-c=2$ und $i-c=4$ durch direkte Abzählung ohne große Mühe bestimmen, und zwar ist

$$E_{c+2,c} = l - 2c,$$

$$E_{c+4,c} = \frac{1}{2} \{l^2 - (5+4c)l + 4c^2 + 12c\}.$$

Wir behandeln als Beispiele die beiden kubischen Graphen kleinster Knotenpunkt-Anzahl, welche keinen Kreis mit weniger als 5 bzw. 6 Knotenpunkten enthalten.

Beispiel 1. Der PETERSENsche Graph P . Das charakteristische Polynom von P hat die Koeffizienten ⁹⁾

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0 & a_2 = -15 \\ a_3 = 0 & a_4 = 75 \\ a_5 = -24 & a_6 = -165 \\ a_7 = 120 & a_8 = 120 \\ a_9 = -160 & a_{10} = 48. \end{array}$$

Es ist $k=10$, $l=3k/2=15$. Für die Zahlen $\tilde{a}_i$ errechnet man die Werte ¹⁰⁾

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 0, \quad \tilde{a}_5 = -24;$$

hieraus folgt nach Satz 4: $t=5$, $D_5=12$. Aus (7a) folgt

$$D_6 = -\frac{1}{2}(a_6 + b_3) = -\frac{1}{2}(-165 + 145) = 10,$$

aus (7b) folgt

$$D_7 = -\frac{1}{2} a_7 + E_{7,5} \cdot D_5 = -\frac{1}{2} \cdot 120 + 5 \cdot 12 = 0,$$

⁹⁾ Siehe [1], p. 74, rechte Spalte, 3. Eintragung.

¹⁰⁾ Für die Werte der b_q vgl. Tabelle 1 in [12].

aus (7a) folgt weiter

$$D_8 = -\frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}b_4 + E_{8,6} \cdot D_6 = -\frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot 90 + 3 \cdot 10 = 15,$$

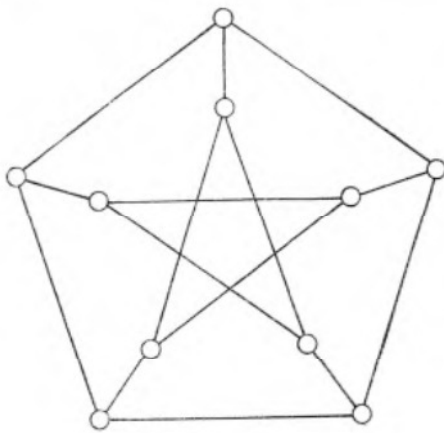
und schließlich folgt aus (7b)

$$D_9 = -\frac{1}{2}a_9 - E_{9,5} \cdot D_5 + E_{9,7} \cdot D_7 = -\frac{1}{2}(-160) - 5 \cdot 12 + 1 \cdot 0 = 20.$$

Resultat:

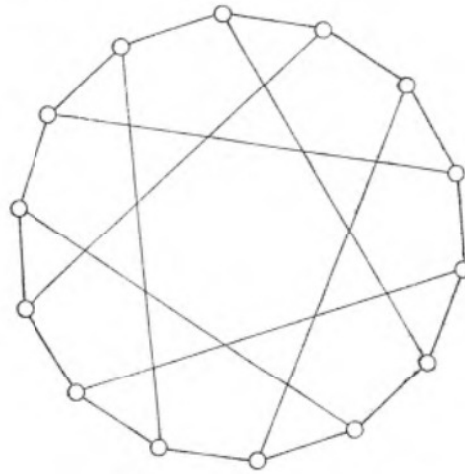
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_i	0	0	0	0	12	10	0	15	20

D_i ist die Anzahl der in P enthaltenen Kreise der Länge i .



P

Abb. 2



Q

Abb. 3

Beispiel 2. Wir betrachten den Graphen Q der Abb. 3. (Q kann auf dem Torus gezeichnet werden, die Torusfläche wird dabei in 7 paarweise aneinandergrenzende 6-Ecke zerlegt.)

Das charakteristische Polynom von Q hat die Koeffizienten

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0 & a_2 = -21 \\ a_3 = 0 & a_4 = 168 \\ a_5 = 0 & a_6 = -700 \\ a_7 = 0 & a_8 = 1680 \\ a_9 = 0 & a_{10} = -2352 \\ a_{11} = 0 & a_{12} = 1792 \\ a_{13} = 0 & a_{14} = -576 \end{array}$$

wir sehen sofort: Alle Koeffizienten mit ungeradem Index verschwinden, Q enthält folglich nach Satz 7 keinen Kreis ungerader Länge, ist also ein paarer Graph.

Eine ähnliche Rechnung wie oben liefert das

Resultat:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D_i	0	0	0	0	0	28	0	21	0	84	0	?	0

Will man dieses Resultat durch unmittelbare Abzählung aus der Figur gewinnen, so bereitet die Durchführung — trotz der vorhandenen Symmetrie — einige Mühe.

4. *Eine Beziehung zur Theorie der Partitionen.* Wendet man Satz 1' auf zusammenhängende reguläre Graphen vom Grade 2 (also auf ungerichtete Kreise) an, so wird man zu Zusammenhängen geführt, die zwischen der Theorie der geordneten Partitionen (auch Kompositionen genannt) und der Theorie der Tschebyscheffschen Polynome bestehen.

Es sei nämlich $C = C_k$ ein ungerichteter Kreis der Länge k , und $b_m = b_m(k)$ bezeichne die Anzahl der linearen Untergraphen L_m von C mit genau $2m$ Knotenpunkten ($2m \leq k$; L_m zerfällt in m getrennte Strecken). Werden nun die m Kanten eines L_m aus C entfernt, so zerfällt der Rest von C in m zusammenhängende Stücke, und durch die Längen dieser Stücke ist eine m -gliedrige Partition von $k - m$ gegeben. Wird C in bestimmter Weise orientiert gedacht, so erscheinen auch die Glieder dieser Partition in einer bestimmten zyklischen Anordnung; eine naheliegende Abzählung liefert folgende zwischen $b_m(k)$ und der Anzahl $c_m(k - m)$ der m -gliedrigen Kompositionen von $k - m$ bestehende Relation:

$$(8) \quad m \cdot b_m(k) = k \cdot c_m(k - m).$$

Nun ist bekanntlich ¹¹⁾

$$c_m(n) = \binom{n-1}{m-1},$$

so daß

$$(9) \quad b_m(k) = \frac{k}{m} \binom{k-m-1}{m-1} \quad ^{12)}.$$

Es sei

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

das zu C gehörige charakteristische Polynom. Es ist unmittelbar klar: Ist $i < k$, so existieren Grundfiguren U_i in C nur für gerades $i = 2m$, und jede Grundfigur U_{2m} ($2m < k$) besteht aus genau m (getrennten) Strecken. Ist k gerade, so gibt es genau drei Grundfiguren U_k , nämlich genau zwei, welche je aus $k/2$ getrennten Strecken bestehen, und außerdem ist C selbst eine Grundfigur; ist k ungerade, so gibt es außer C selbst keine Grundfigur U_k . Satz 1' liefert dann in Verbindung mit (9)

$$(10) \quad a_i = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } i < k, \\ -2 & \text{für ungerades } i = k, \\ (-1)^m \cdot \frac{k}{m} \cdot \binom{k-m-1}{m-1} & \text{für } i = 2m < k, \\ 2[(-1)^m - 1] & \text{für } i = 2m = k. \end{cases}$$

¹¹⁾ Siehe etwa [10], p. 124.

¹²⁾ Vergleiche auch das Lemma in [10], p. 198.

$f(x)$ läßt auch auf andere Weise leicht berechnen: Die Knotenmatrix von C ist nämlich eine „bicyklische“ Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und deren Eigenwerte sind bekanntlich [18] (S. 224) die Zahlen

$$x_j = 2 \cos(2\pi j/k) \quad (j=1, 2, \dots, k),$$

so daß

$$(11) \quad f(x) = \prod_{j=1}^k (x - 2 \cos(2\pi j/k)) = 2\{T_k(x/2) - 1\},$$

wo $T_k(x)$ das k -te Tschebyscheffsche Polynom 1. Art bezeichnet, welches folgendermaßen definiert ist:

$$x = \cos \varphi, \quad T_k(x) = \cos k\varphi = \cos(k \arccos x).$$

Setzen wir

$$T_k(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \dots + A_k,$$

so erhalten wir aus (10) und (11) für $k \geq 1$

$$(12) \quad \begin{cases} A_0 = 2^{k-1} \\ A_i = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } i \leq k \\ (-1)^m \cdot \frac{k}{m} \binom{k-m-1}{m-1} 2^{k-2m-1} & \text{für } 0 < i = 2m \leq k. \end{cases} \end{cases}$$

Die Richtigkeit von (12) kann leicht mittels der rekurrenten Definition der Tschebyscheffschen Polynome:

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

bestätigt werden.

Eine ganz entsprechende Überlegung kann man anstellen, wenn man statt von Kreisen von Graphen ausgeht, die die Form eines Weges haben, an dessen beiden Enden noch je eine gerichtete (d. h. einfach zu zählende) Schlinge angeheftet ist: An die Stelle der Tschebyscheffschen Polynome 1. Art treten dann diejenigen der 2. Art.

Literatur

- [1] L. COLLATZ—U. SINOGOWITZ, Spektren endlicher Grafen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **21** (1957), 63—77.
- [2] G. FROBENIUS, Über Matrizen aus positiven Elementen I., *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* 1908, 471—476.

- [3] G. FROBENIUS, Über Matrizen aus positiven Elementen. II., *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* 1909, 514–518.
- [4] G. FROBENIUS, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* 1912, 456–477.
- [5] F. HARARY, The determinant of the adjacency matrix of a graph, *SIAM Rev.* 4 (1962), 202–210.
- [6] A. J. HOFFMAN and R. R. SINGLETON, On Moore graphs with diameters two and three, *IBM J. Res. Develop.* 4 (1960), 497–504.
- [7] P. PERKINS, A theorem on regular matrices, *Pacific J. Math.* 11 (1961), 1529–1533.
- [8] V. PTÁK, On a combinatorial theorem and its application to nonnegative matrices (russisch, engl. Zusammenf.), *Czechoslovak Math. J.* 8 (83) (1958), 487–495.
- [9] V. PTÁK—J. SEDLÁČEK, On the index of imprimitivity of nonnegative matrices (russisch, engl. Zusammenf.), *Czechoslovak Math. J.* 8 (83) (1958), 496–501.
- [10] J. RIORDAN, An introduction to combinatorial analysis, *New York and London*, 1958.
- [11] H. SACHS, Abzählung von Wäldern eines gegebenen Typs in regulären und biregulären Graphen I., in dieser Zeitschrift 74–84.
- [12] H. SACHS, Abzählung von Wäldern eines gegebenen Typs in regulären und biregulären Graphen II, (soll in *Publ. Math. Debrecen* erscheinen).
- [13] H. SACHS, Über selbtskomplementäre Graphen (p. 279 ff), *Publ. Math. Debrecen* 9 (1962), 270–288.
- [14] J. SEDLÁČEK, O incidenčních orientovaných grafů (Deutsche Zusammenfassung: Über Inzidenzmatrizen gerichteter Graphen), *Časopis Pěst. Mat.* 84 (1959), 303–316.
- [15] M. TUERO, A contribution to the theory of cyclic graphs, *Matrix Tensor Quart.* 11 (1961), 74–80.
- [16] T. H. WEI, The algebraic foundations of ranking theory, *Thesis, Cambridge*, 1952.
- [17] H. WIELANDT, Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, *Math. Z.* 52 (1950), 642–648.
- [18] ZURMÜHL, Matrizen (2. Aufl.), *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1958.

(Eingegangen am 21. September 1963.)