

Charakterisierung eines Nachbarpunkt-Schemas durch Stellen

Von MANFRED HERRMANN (Halle)

DEDEKIND und WEBER haben für algebraische Funktionen einer Veränderlichen einen *Punkt der Riemannschen Fläche* als homomorphe Zuordnung zwischen den Elementen α, β des zugehörigen Funktionenkörpers und den Elementen a, b des Körpers der komplexen Zahlen definiert (vgl. [1], S. 236–238). Dabei wird — wie in der Funktionentheorie üblich — der Ausnahmewert ∞ als bestimmte Zahl (Konstante) betrachtet, mit der nach folgenden Regeln zu rechnen ist:

$$\begin{aligned} a \pm \infty &= \infty; \quad a \cdot \infty = \infty \quad \forall a \neq 0; \\ \infty \cdot \infty &= \infty; \quad 1/0 = \infty; \quad 1/\infty = 0. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $\infty \pm \infty$; $0 \cdot \infty$; $0/0$; ∞/∞ werden nicht erklärt. Die erwähnte Zuordnung $\alpha \rightarrow a$ genügt den Homomorphie-Gesetzen, wenn die rechten Seiten definiert sind.

Diese Überlegung hängt mit dem VAN DER WAERDEN'schen Begriff der *relationstreu* Spezialisierung [3], angewandt auf unendlich viele algebraische Funktionen, zusammen. VAN DER WAERDEN charakterisiert so *einen Punkt des zum Körper gehörenden algebraischen Gebildes*, wobei durch seine homogene Betrachtungsweise die Einführung von ∞ vermieden wird.

Benutzt man zur Beschreibung dieses Sachverhaltes konsequent den Homomorphiebegriff, so gelangt man zum *Stellenbegriff*, wie ihn u. a. LANG ([2]) und — in seiner endlichen Form — WEIL ([6]) verwenden.

Es ist das Ziel dieser Note, in Anlehnung an [1] und [3] den Begriff des *linearen* Zweiges in der komplexen Ebene E_0 *aufgefaßt als ein Schema von Nachbarpunkten* $\mathfrak{P} = (P; P_1, P_2, \dots)$ ¹⁾ durch den Stellenbegriff auf Ebenen E über beliebigem Grundkörper k zu übertragen. Mit anderen Worten: Der Begriff „*Punkt eines algebraischen Gebildes*“ soll hier entsprechend der Betrachtungsweise aus [1] und [3] zum Begriff des Schemas $\mathfrak{P}$ verallgemeinert werden. Es handelt sich also nicht wie in [5] — um Fragen der Begründung der Theorie der Nachbarpunkte in E (bzw. auf einer Varietät V), sondern um die Fassung des genannten verallgemeinerten Punkt-begriffes durch geeignete Abbildungen eines bestimmten Funktionenkörpers.

Bezeichnungen: a) Mit $k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ kennzeichnen wir den Ring der formalen Polynome in n Variablen über k . Sein Quotientenkörper ist $k(\chi_1, \dots, \chi_n)$.

¹⁾ Im vorliegenden Fall: Mittelpunkt P des Zweiges und lauter freie, einfache Nachbarpunkte P_i ([4]), wobei in diesem Schema jeweils die Richtung t_{i+1} , mit der P_{i+1} auf P_i folgt, zu berücksichtigen ist.

b) Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement ohne Nullteiler und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R . Dann heißt der Ring $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{z} \mid \begin{array}{l} a, z \in R \\ z \notin \mathfrak{p} \end{array} \right\}$ der lokale $\mathfrak{p}$ -Ring von R .

Wir benutzen hier inhomogene Koordinaten x, y . Um einen Punkt $P = (x_0, y_0) \in E$ zu erfassen, hat man den Homomorphismus

$$k[x, y] \xrightarrow{\varphi} k[x, y]/(x - x_0, y - y_0)$$

zu betrachten; P ist in dieser Hinsicht durch das Primideal $(x - x_0, y - y_0)$ gekennzeichnet. Zur Charakterisierung des Schemas $\mathfrak{P}$ werden zusätzlich gebrochenrationale Ausdrücke herangezogen; durch eine geeignete Stelle ψ wird dann allen Funktionen aus $K = k_t(x, y)$ entweder ein bestimmtes Element aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper Ω oder der „Wert“ ∞ zugeordnet. Als k_t bezeichnen wir die unendliche Körpererweiterung $k(t_1, t_2, \dots)$ mit den Unbestimmten $t_1, t_2, \dots$. Diese Erweiterung des Grundkörpers k entspricht dem Übergang von der Punktdarstellung durch den Homomorphismus φ zur Zweigdarstellung durch die Stelle ψ . Für die Zuordnung ψ gelten mit den gleichen Einschränkungen wie in [1] die Homomorphiegesetze (vgl. [2]).

Die folgenden Überlegungen behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Unbestimmten t_i zu Elementen aus k spezialisiert und die dementsprechenden Abbildungen hernimmt.

Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn Prof. O. H. KELLER.

Zur Vereinfachung der Darstellung wählen wir $x_0 = y_0 = 0$. In E_0 wird ein linearer Zweig in P durch eine Potenzreihe

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

gegeben.

Wir betrachten folgende Ausdrücke:

$$l_1 = \frac{y}{x}, \quad l_2 = \frac{\frac{y}{x} - a_1}{x}, \quad \dots, \quad l_i = \frac{l_{i-1} - a_{i-1}}{x}, \quad \dots$$

Macht man den Grenzübergang $x \rightarrow 0$, so gilt:

$$l_i \rightarrow \frac{1}{i!} y^{(i)}(P).$$

Durch die Ableitungen $y_{(P)}^{(i)}$ ist der Verlauf des betrachteten Zweiges in P eindeutig bestimmt.

Darauf beruht die folgende Stellenkonstruktion über einem beliebigen Körper k . Wir setzen:

$$L_1 = l_1 = \frac{y}{x}, \quad \dots, \quad L_i = \frac{L_{i-1} - t_{i-1}}{x}, \quad \dots$$

Geht man von $R = k[x, y]$ aus, so kann P , wie gesagt, durch

$$k[x, y] \xrightarrow{\varphi} k[x, y]/\mathfrak{p} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} = (x, y)$$

beschrieben werden. (Wir identifizieren dabei k mit seinem φ -Bild, sodaß $\varphi(k[x, y]) = k$ gilt.) Die Charakterisierung von $\mathfrak{A}$ erfolgt nun so:

1) Sukzessive Erweiterung der Abbildung φ zu einem Homomorphismus σ^* eines bestimmten Unterringes $R^* \subset K = k_t(x, y)$, der jedem L_i die Unbestimmte t_i zuordnet. Die Abbildung σ^* „ersetzt“ den Grenzübergang $x \rightarrow 0$ in E_0 .

2) Ausdehnung von σ^* zu einer geeigneten Ω -bewerteten Stelle ψ des Körpers K ²⁾: ψ charakterisiert dann das Schema $\mathfrak{A}$ über $P \in E$.

Zu 1): Zunächst wird φ durch

$$\varphi^*(a/z) = \varphi(a)/\varphi(z)$$

zu einem Homomorphismus φ^* des $\mathfrak{p}$ -Ringes $v = R_{\mathfrak{p}}$ von φ fortgesetzt. Der Kern von φ^* ist das maximale Ideal

$$\mathfrak{m} = \left\{ a/z \mid \begin{array}{l} a \in \mathfrak{p} \\ z \notin \mathfrak{p} \end{array} \right\} \subset v.$$

Satz. Die Abbildung φ^* kann zu einem Homomorphismus σ_1 :

$$R_1 = v[L_1] \xrightarrow{\sigma_1} \Omega \text{ mit } \sigma_1(L_1) = t_1; \text{ d. h.: } \sigma_1(R_1) = k[t_1]$$

erweitert werden. Dabei ist $v[L_1]$ der Ring der Polynome in L_1 .

BEWEIS. Die Abbildung

$$\sigma_1(A_1) = \sigma_1\left(\sum_1^n q_i L_1^i\right) = \sum_1^n \varphi^*(q_i) \cdot t_1^i$$

genügt ³⁾ den Homorphiegesetzen. Zu zeigen ist die Eindeutigkeit von σ_1 , also die Richtigkeit der Aussage: Aus $A_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1(A_1) = 0$.

$$A_1 = \sum_1^n \frac{f_i(x, y)}{c_i + p_i(x, y)} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^i = 0$$

bedeutet in unserem Fall eine Identität in x und y . Setzt man $y = x \cdot t_1$, so erhält man hieraus eine Identität in x und t_1 :

$$\bar{A}_1 = \sum_1^n \frac{f_i(x, xt_1)}{c_i + p_i(x, xt_1)} \cdot t_1^i \equiv 0.$$

Man kann nämlich den „Ersetzungs“-Homomorphismus $k[x, y] \xrightarrow{\tau_1} k[x, t_1]$ mit $\tau_1(x) = x$, $\tau_1(y) = x \cdot t_1$ und damit Kern $(\tau_1) = 0$ zu einem Isomorphismus τ_1^* des Quotientenkörpers $k(x, y)$ in $k(x, t_1)$ fortsetzen (vgl. [2], I).

Insbesondere gilt für $x = 0$:

$$\bar{A}_1(x = 0) = \sum_1^n \frac{f_i(0, 0)}{c_i + p_i(0, 0)} \cdot t_1^i \equiv 0 \text{ in } t_1;$$

²⁾ Ω ist ein algebraisch abgeschlossener Körper, der k_t enthält.

³⁾ $q_i = \frac{f_i(x, y)}{c_i + p_i(x, y)} \in v$ mit $f_i \in R$, $p_i \in \mathfrak{p}$ und $c_i \in k$ ($c_i \neq 0$).

$\bar{A}_1(x=0)$ ist aber gerade das Bild von A_1 bei der Abbildung σ_1 ; also gilt:

$$\bar{A}_1(x=0) = \sigma_1(A_1) = 0.$$

Nun wird σ_1 genau wie φ zu einem Homomorphismus σ_1^* des $\mathfrak{p}_1$ -Ringes $\mathfrak{v}_1 = R_{1\mathfrak{p}_1}$ von σ_1 ausgedehnt⁴⁾. Diese Abbildung σ_1^* erweitern wir zu σ_2 :

$$R_2 = \mathfrak{v}_1[L_2] \xrightarrow{\sigma_2^*} \Omega \quad \text{mit} \quad \sigma_2(L_2) = t_2; \text{ d. h.: } \sigma_2(R_2) \subseteq k(t_1)[t_2].$$

Satz. σ_2 ist ein Homomorphismus.

BEWEIS. Die Eindeutigkeit von σ_2 wird ähnlich wie oben gezeigt:

In der Identität (in x, y und t_1)

$$A_2 = \sum_{\mu} \frac{\sum_i \frac{f_{i\mu}(x, y)}{c_{i\mu} + p_{i\mu}(x, y)} L_1^i}{\sum_v \frac{g_{v\mu}(x, y)}{d_{v\mu} + q_{v\mu}(x, y)} L_1^v} \cdot L_2^{\mu} \equiv 0$$

setze man nun: $y = x^2 t_2 + x t_1$.

Schreibt man A_2 in der Form⁵⁾

$$A_2 = \sum_{\mu} \frac{\frac{Z_{1\mu}}{N_{1\mu}} \cdot \frac{(L_1 - t_1)^{\mu}}{x^{\mu}}}{\frac{Z_{2\mu}}{N_{2\mu}}} = \sum_{\mu} \frac{N_{2\mu} \cdot Z_{1\mu} (y - x t_1)^{\mu}}{N_{1\mu} \cdot Z_{2\mu} x^{2\mu}} = \frac{\Delta}{\Delta},$$

so wird $\Delta = \Delta(x, y, t_1) \neq 0$ für $y = x^2 t_2 + x t_1$. Anderenfalls wäre für mindestens ein μ insbesondere $N_{1\mu}(0, 0, t_1) = 0$ oder $Z_{2\mu}(0, 0, t_1) = 0$ im Widerspruch zu unseren

Festsetzungen, wonach alle in $\sum_{\mu}$ auftretenden Nenner $\sum_v \frac{g_{v\mu}(x, y)}{d_{v\mu} + q_{v\mu}(x, y)} L_1^v \notin \mathfrak{p}_1$.

Also liegt Δ nicht im Kern $\mathfrak{q}_2$ des „Ersetzungs“-Homomorphismus τ_2 :

$$S = k[x, y, t_1] \xrightarrow{\tau_2} k[x, t_1, t_2] \quad \text{mit} \quad \tau_2(x) = x; \tau_2(t_1) = t_1; \tau_2(y) = x^2 t_2 + x t_1.$$

Erweitert man τ_2 zu einem Homomorphismus τ_2^* des lokalen $\mathfrak{q}_2$ -Ringes $S_{\mathfrak{q}_2}$ in den Körper $k(x, t_1, t_2)$, so geht bei τ_2^* die gegebene Identität in (x, y, t_1) in eine Identität mit x, t_1, t_2 über.

Dann gilt:

$$\bar{A}_2(x=0) = \sum_{\mu} \frac{\sum_i \frac{f_{i\mu}(0, 0)}{c_{i\mu} + p_{i\mu}(0, 0)} t_1^i}{\sum_v \frac{g_{v\mu}(0, 0)}{d_{v\mu} + q_{v\mu}(0, 0)} t_1^v} \cdot t_2^{\mu} \equiv 0 \text{ in } t_1, t_2;$$

und dabei ist

$$0 = \bar{A}_2(x=0) = \sigma_2(A_2).$$

⁴⁾ $\mathfrak{p}_1$ ist als Kern des Homomorphismus σ_1 von R_1 in den Körper Ω ein Primideal.

⁵⁾ $\Delta = \prod_{\mu} N_{1\mu} Z_{2\mu} x^{2\mu}$.

In dieser Weise können wir fortfahren. Beim i -ten Schritt wäre entsprechend in $A_i = 0$ (Identität in x, y und $t_1, \dots, t_{i-1}$):

$$y = x^i t_2 + \dots + x t_1$$

und anschließend $x=0$ zu setzen, um die Eindeutigkeit von: $R_i = v_{i-1}[L_i] \xrightarrow{\sigma_i} \Omega$ mit $\sigma_i(L_i) = t_i$ zu zeigen. Es ist: $\sigma_i(t_{i-1}) = t_{i-1} \in R_i$ ⁶; aus

$$\sigma_i(L_{i-1} - t_{i-1}) = \sigma_i(x \cdot L_i) = 0$$

folgt nämlich:

$$\sigma_i(t_{i-1}) = \sigma_i(L_{i-1}) = \sigma_{i-1}(L_{i-1}) = t_{i-1}.$$

Wir gewinnen so eine Kette von Unterringen aus $K = k_t(x, y)$:

$$(*) \quad R \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots;$$

und zu jedem R_i gehört ein Homomorphismus σ_i mit den Eigenschaften:

$$\sigma_i(R_v) = \sigma_v(R_v) \quad \forall v \leq i, \text{ insbesondere } \sigma_i(R) = \varphi(R);$$

$$\sigma_i(R_i) \subset k(t_1, \dots, t_i) \subset \Omega, \text{ wobei } \sigma_i(L_i) = t_i \text{ und } \sigma_i(t_j) = \sigma_{j+1}(t_j) = t_j \text{ für } 1 \leq j \leq i-1.$$

Die Kette $(*)$ besitzt bezüglich der beiden Eigenschaften eine obere Schranke (R^* mit σ^*):

$$R^* = \bigcup_i R_i \text{ und } \sigma^*(R_i) = \sigma_i.$$

Der Homomorphismus $\sigma^*: R^* \rightarrow \Omega$ ordnet damit jedem L_i die Unbestimmte t_i zu; und es ist: $\sigma^*(t_i) = t_i \quad \forall i$.

Satz. R^* ist ein lokaler Ring und σ^* der zum maximalen Ideal von R^* gehörige Homomorphismus.

BEWEIS. $\mathfrak{q} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Kern}(\sigma^*)$ und $\mathfrak{p}^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{p}_i = \text{Kern}(\sigma_i)$. Aus $a \in \mathfrak{q}$ folgt

$$\exists i: a \in R_i, \text{ d. h.: } 0 = \sigma^*(a) = \sigma_i(a);$$

danach ist

$$a \in \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}^*.$$

Umgekehrt folgt aus $a \in \mathfrak{p}^*$:

$$\exists i: a \in \mathfrak{p}_i \subset R_i; \text{ d. h.: } \sigma_i(a) = 0;$$

somit gilt:

$$\sigma^*(a) = \sigma_i(a) = 0 \text{ und daher: } a \in \mathfrak{q}.$$

Es ist demnach:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^*.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{p}^*$ das einzige maximale Ideal in R^* ist. Dafür ist die Kette der „Zwischenglieder“ aus $(*)$ entscheidend:

$$R \subset R_{1\mathfrak{p}_1} \subset R_{2\mathfrak{p}_2} \subset \dots$$

⁶) Aus $L_i \in R_i$ folgt: $t_{i-1} \in R_i$; z. B. ist: $t_1 = -v \cdot (L_2)^1 + L_1(L_2)^0 \in R_2$.

(Kette von *lokalen Ringen*): Sei v eine Nichteinheit (NE) aus R^* . Dann $\exists j: v \in R_{jv_j}$; v ist (wegen $v^{-1} \notin R^*$) auch NE in R_{jv_j} . Daher gilt ⁷⁾:

$$v \in \mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{p}_{j+1} \subset \mathfrak{p}^*.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{p}^* = \{NE \in R^*\};$$

d. h.: $\mathfrak{p}^*$ ist das einzige maximale Ideal in R^* .

Durch R^* und den zugehörigen Homomorphismus σ^* sind nunmehr sämtliche Nachbarpunkte P_i des Schemas $\mathfrak{P}$ erfaßt.

Zu 2): Die Abbildung σ^* erweitern wir zu einer Ω -bewerteten Stelle ψ von K . Dazu wählen wir nach [2] aus der Menge aller Elemente (R_j^*, σ_j^*) ⁸⁾ mit

$$R_j^* \supset R^* \quad \text{und} \quad \sigma_j^*(R^*) = \sigma^*$$

auf Grund der Ordnungsrelation

$$(R_{j_1}^*, \sigma_{j_1}^*) \leq (R_{j_2}^*, \sigma_{j_2}^*) \Leftrightarrow R_{j_1}^* \subset R_{j_2}^* \quad \text{und} \quad \sigma_{j_2}^*(R_{j_1}^*) = \sigma_{j_1}^*$$

ein maximales Element (R_L, ψ_L) aus, wobei ψ_L der zentrale Homomorphismus des lokalen Ringes R_L (d. h. der Homomorphismus mit dem maximalen Ideal von R_L als Kern) ist. R_L ist ein Bewertungsring. Dann ist die Abbildung ψ :

$$\psi(R_L) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_L$$

$$\psi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \infty \quad \forall a \in K: a \notin R_L$$

im Sinne von Lang eine Stelle.

Jede solche Stelle charakterisiert in diesem lokalen Sinn das Schema $\mathfrak{P}$ mit dem Träger $P \in E$ und den Richtungen $t_1, t_2, \dots$.

Literatur

- [1] R. DEDEKIND, — H. WEBER. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.* **92** (1882), 181—290.
- [2] S. LANG, Introduction to algebraic geometry. *New York*, 1958.
- [3] B. L. WAERDEN, Der Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie, *Math. Ann.* **97** (1927), 756—774.
- [4] B. L. WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, *Berlin*, 1939.
- [5] B. L. WAERDEN, Infinitely Near Points, *Proc. Sect. Sci.* **12** (1950), 1136—1145.
- [6] A. WEIL, Foundations of algebraic geometry, *New York*, 1962.

(Eingegangen am 15. Januar 1964.)

⁷⁾ $\mathfrak{m}_j$ = maximales Ideal von R_{jv_j} .

⁸⁾ R_j^* ist Unterring $\subset K$; σ_j^* ist ein Homomorphismus: $R_j^* \rightarrow \Omega$.