

## Hyperflächen mit Minkowskischer Maßbestimmung in Finslerräumen

Herrn Professor A. Rapcsák zum 50. Geburtstag gewidmet

Von O. VARGA (Budapest)

In dieser Arbeit untersuchen wir, unter welchen Bedingungen eine Hyperfläche des Finslerschen Raumes eine Minkowskische Maßbestimmung besitzt.

Auf einer Hyperfläche des Finslerraumes gibt es im allgemeinen zwei Übertragungen. Es stellt sich nun heraus, daß die Übereinstimmung beider Übertragungen eine notwendige Bedingung dafür ist, daß die Maßbestimmung eine Minkowskische wird (Satz 1). Eine notwendige — und zugleich hinreichende — Bedingung, die Satz 2. beinhaltet, besteht darin, daß ein gewisser — von uns als Minkowskischer bezeichneter — Vektor, längs der Hyperfläche, zum Normalvektor proportional ist.

In Riemannschen Räumen gilt folgendes:<sup>1)</sup> Existiert zu jeder orientierten  $n$ -Stellung genau eine Hyperfläche mit euklidischer Metrik, dann ist der Raum ein solcher von negativer konstanter Krümmung. Man kann sich hier die entsprechende Frage stellen. Zu jeder orientierten  $n$ -Stellung existiere genau eine Hyperfläche mit Minkowskischer Maßbestimmung. Das Resultat ist hier nicht charakteristisch für Finslerräume konstanter negativer Krümmung, sondern es zeigt sich, daß sich der Finslerraum in diesem Falle (Satz 3) auf einen Riemannschen Raum konstanter negativer Krümmung reduziert.

Zu Grunde gelegt sei ein  $n$ -dimensionaler Finslerraum  $F_n$ , in dem  $(x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$  lokale Koordinaten bedeuten.

Das Bogenelement  $ds$  im  $F_n$  sei durch

$$(1) \quad ds = L(x, dx)$$

gegeben<sup>2)</sup>, und der metrische Fundamentaltensor durch

$$(2) \quad g_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \partial_{\dot{x}^i} \partial_{\dot{x}^k} L^2$$

bestimmt. Der zu  $g_{ik}$  reziproke Tensor werde mit  $g^{ik}$  bezeichnet. Um die Über-

<sup>1)</sup> Siehe O. VARGA (2); die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

<sup>2)</sup> Über die hier folgende Zusammenstellung von bekannten Begriffen und Formeln, sowie die analytischen Voraussetzungen über die vorkommenden Größen, siehe man E. CARTAN [1] und H. RUND [1].

tragungsobjekte angeben zu können, bezeichnen wir die, aus den  $g_{ik}$  gebildeten Christoffelschen Symbole erster Art mit  $[ijk]$ . Ferner setzen wir

$$(3) \quad C_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} \partial_{\dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k} L^2, \quad C_i^r{}_k = g^{rj} C_{ijk},$$

$$(4) \quad A_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} L C_{ijk}, \quad A_i^r{}_k = g^{rj} A_{ijk}.$$

Unter Verwendung der Bogenlänge als Parameter genügen die Extremalen des Variationsproblems

$$\int L \left( x, \frac{dx}{dt} \right) dt \rightarrow \text{Extr.}$$

den Eulerschen Differentialgleichungen

$$(5) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i \left( x, \frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

wobei

$$(6) \quad G^j = \frac{1}{4} g^{ij} \left[ \frac{\partial(L^2)}{\partial \dot{x}^i \partial x^k} \dot{x}^k - \frac{\partial(L^2)}{\partial x^i} \right].$$

Setzt man

$$(7) \quad \Gamma_{ijk}^* \stackrel{\text{def}}{=} [ijk] - C_{ijs} G_k^s - C_{jks} G_i^s + C_{isk} G_j^s,$$

$$\Gamma_i^{jk} = g^{jm} \Gamma_{imk}^*$$

und

$$(8) \quad \Gamma_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ijk}^* + C_{ijs} G_k^s = [ijk] - C_{jks} G_i^s + C_{isk} G_j^s$$

$$\Gamma_i^{jk} \equiv g^{jn} \Gamma_{imk},$$

so ist das invariante Differential eines Vektorfeldes  $\xi^i(x, \dot{x})$  nach E. CARTAN durch

$$(9) \quad D\xi^i = d\xi^i + C_{jk}^i \xi^j d\dot{x}^k + \Gamma_{jk}^i \xi^j dx^k$$

bestimmt. In dieser Form des invarianten Differentialies hat  $d\dot{x}^k$  keinen vektoriellen Charakter. Eine solche Darstellung bekommt man, falls man das invariante Differential  $Dl^i$  des Einheitsvektors  $l^i$  im Linienelement  $(x, \dot{x})$

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{L(x, \dot{x})}$$

eingührt. Man hat dann

$$(10) \quad D\xi^i = d\xi^i + A_{jk}^i \xi^j D\dot{l}^k + \Gamma_{jk}^i \xi^j dx^k.$$

Die Größen  $C_{jk}^i, \Gamma_{jk}^i$ , bzw. die mit ihnen äquivalenten Größen  $A_{jk}^i, \Gamma_{jk}^*$  sind die Zusammenhangsobjekte des  $F_n$ .

Auf einer Hyperfläche  $F_{n-1}$  des  $F_n$ , die durch eine Parameterdarstellung

$$(11) \quad x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$$

gegeben sei, wobei die Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind, induziert die Metrik des umgebenden Raumes eine durch

$$(12) \quad ds = L(x(u), dx(u)) = L(u, du)$$

bestimmte Metrik. Wir wollen untersuchen, wann diese Metrik eine Minkowskische wird. Dazu muß es auf  $F_{n-1}$  ein Koordinatensystem  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n-1$ ) von derart geben, daß

$$(13) \quad L(x(u), dx(u)) = L(du)$$

wird. Ein solches Koordinatensystem bezeichnen wir als ein ausgezeichnetes. Für eine Hyperfläche des  $F_{n-1}$  — die einschränkende Voraussetzung (13) werde vor der Hand nicht gestellt — kann man zwei lineare Zusammenhänge definieren. Der induzierte Zusammenhang ergibt sich, falls man das invariante Differential (9) eines Hyperflächenvektorfeldes

$$(14) \quad \xi^i = x_\alpha^i \xi^\alpha(u); \quad x_\alpha^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

auf die entsprechenden Tangentialebenen des  $F_{n-1}$  projiziert. Wir werden den zu ihm gehörenden invarianten Differentialoperator mit  $D$  bezeichnen.

Der zweite sogenannte innere Zusammenhang des  $F_{n-1}$  ist derjenige Cartansche Zusammenhang, der aus der, auf der rechten Seite von (12) angegebenen Grundfunktion  $L(u, du)$  bildbar ist. Der zu diesem Zusammenhang gehörende invariante

Differentialoperator werde mit  $D$  bezeichnet. Diese Zusammenhangsobjekte und ihre funktionale Abhängigkeit wurden an anderer Stelle behandelt<sup>3)</sup>, wir geben hier nur soviel an, wie für das Verständnis des Folgenden notwendig ist.

Der Fundamentaltensor des  $F_{n-1}$  ist

$$(15) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_{\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} L(u, \dot{u})$$

und  $\gamma^{\alpha\beta}$  sein reziproker Tensor. Es gilt außerdem

$$(16) \quad A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} L \partial_{\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma} L^2 = A_{ijk} x_\alpha^i x_\beta^j x_\gamma^k, \\ LC_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\beta\gamma}.$$

Ist  $n^i$  der Normalvektor eines Linienelementes der  $F_{n-1}$  und  $x_\alpha^i$  die Tangentenvektoren des betreffenden Punktes, so sind die Ableitungsgleichungen

$$(17a) \quad Dx_\alpha^i = \omega_\alpha^\sigma x_\sigma^i + \Theta_\alpha n^i,$$

$$(17b) \quad Dn^i = -\Theta^\sigma x_\sigma^i \quad * \quad \Theta^\alpha = \gamma^{\alpha\sigma} \Theta_\sigma.$$

Die  $\omega_\alpha^\sigma$  und  $\Theta_\alpha$  sind Pfaffsche Formen in den  $du^\alpha$  bzw.  $d\dot{u}^\alpha$ . Da  $d\dot{u}^\alpha$  keinen vektoriellen Charakter besitzt, kann man statt dieser Größen das innere invariante Differential

<sup>3)</sup> Siehe O. VARGA [1].

<sup>(1)</sup>  
 $Dl^x$  des zum Linienelement  $(u, \dot{u})$  gehörenden Einheitsvektors  $l^x$  einführen. Demnach erhält man:

$$(18) \quad \omega_x^\sigma = K_{x\beta}^\sigma du^\beta + C_{x\beta}^\sigma d\dot{u}^\beta = K_{x\beta}^{*\sigma} du^\beta + A_{x\beta}^\sigma D\dot{l}^\beta,$$

$$(19) \quad \Theta_x = \Theta_{x\beta}^{(1)} du^\beta + \frac{1}{L} \Theta_{x\beta}^{(2)} d\dot{u}^\beta = \Theta_{x\beta}^{*(1)} du^\beta + \Theta_{x\beta}^{(2)(1)} D\dot{l}^\beta.$$

Beachtet man, daß sich  $G^x$  mit Hilfe der in (12) auftretenden Grundfunktion  $L(u, du)$  des  $F_{n-1}$  genau so definieren läßt, wie  $G^i$  in Formel (6) mit Hilfe von  $L(x, dx)$ , und berücksichtigt den bekannten Ausdruck<sup>4)</sup> für  $Dl^x$ , so folgt für den Zusammenhang der Größen  $K_{x\beta}^{*\sigma}$  und  $K_{x\beta}^\sigma$ , sowie der  $\Theta_{x\beta}^{*(1)}$  und  $\Theta_{x\beta}^{(2)(1)}$

$$(20a) \quad K_{x\beta}^{*\sigma} = K_{x\beta}^\sigma - C_{x\mu}^\sigma G_\beta^\mu,$$

$$(20b) \quad \Theta_{x\beta}^{*(1)} = \Theta_{x\beta}^{(1)} - \frac{1}{L} \Theta_{x\mu}^{(2)} G_\beta^\mu.$$

Die Größen  $K_{x\beta}^\sigma$ ,  $\Theta_{x\beta}^{(1)}$  und  $\Theta_{x\beta}^{(2)}$  können durch die Zusammenhangsobjekte  $C_{jk}^i$ ,  $\Gamma_{jk}^i$  bzw. ihren Äquivalenten  $A_{jk}^i$ ,  $\Gamma_{jk}^{*i}$ , dem  $n$ -Bein  $x_\alpha^i$ ,  $n^i$  und den Größen

$$x_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

ausgedrückt werden<sup>5)</sup>. Die Größen  $\Theta_{x\beta}^{(2)}$  stellen einen Tensor dar, der durch

$$(21) \quad \Theta_{x\beta}^{(2)} = A_{jk}^i x_\alpha^j x_\beta^k n_i$$

bestimmt ist. Im Folgenden benötigen wir noch die aus den Tensor  $\Theta_{x\beta}^{(1)}$  herleitbare Normalkrümmungsform<sup>6)</sup>

$$(22) \quad O_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L} \Theta_{\mu x}^{*(1)} \dot{u}^\mu = \frac{1}{L} \Theta_{\mu x}^{(1)} \dot{u}^\mu,$$

sowie die Normalkrümmung

$$(23) \quad N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Theta_{x\beta}^{(1)} \dot{u}^x \dot{u}^\beta}{\gamma_{x\beta} \dot{u}^x \dot{u}^\beta} = \frac{\Theta_{x\beta}^{*(1)} \dot{u}^x \dot{u}^\beta}{\gamma_{x\beta} \dot{u}^x \dot{u}^\beta} = \frac{1}{L^2} \Theta_{x\beta}^{(1)} \dot{u}^x \dot{u}^\beta.$$

Wir führen noch das Objekt

$$(24) \quad K_\beta^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} K_{x\beta}^\sigma \dot{u}^x$$

<sup>4)</sup> Siehe E. CARTAN [1] S. 16 Formel XIII., wo statt  $Dl^x$  die Bezeichnung  $\omega^*$  verwendet wird.

<sup>5)</sup> Siehe O. VARGA [1] Formeln (17), (19) und (53).

<sup>6)</sup> Die im Text definierte Normalkrümmungsform  $O_x$  bzw. Normalkrümmung  $N$  unterscheidet sich von der im O. VARGA [1] — Formeln (21), (22) — vorkommenden durch den Faktor  $\frac{1}{L}$  bzw.  $\frac{1}{L^2}$ .

ein.  $K_\beta^0$  und  $G_\beta^0$  hängen gemäß

$$(25) \quad G_\beta^0 = K_\beta^0 + LN\Theta_\beta^{(2)}, \quad \Theta_\beta^0 = \gamma^{0\alpha}\Theta_{\alpha\beta}^{(2)}$$

zusammen<sup>7)</sup>. Zwischen den inneren und induzierten Zusammenhangsobjekten bestehen die Relationen<sup>8)</sup>

$$(26) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^* = K_{\alpha\beta}^* + N(A_{\alpha\beta\sigma}\Theta_\sigma^{(2)} - A_{\beta\alpha\sigma}\Theta_\sigma^{(2)}) + (O_\alpha\Theta_{\beta\sigma}^{(2)} - O_\beta\Theta_{\alpha\sigma}^{(2)}).$$

Die  $F_{n-1}$  soll nun eine Minkowskische Mannigfaltigkeit sein, mit  $u^\alpha$  als ausgezeichneten Koordinaten, so, daß für die Grundfunktion (13) besteht. Wegen der zu (6) analogen Formel für  $G^\alpha$  muß

$$(27) \quad G^\alpha \equiv 0$$

und daher auch

$$(28) \quad G_\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{u}^\beta} \equiv 0$$

sein. Formel (25) besagt dann, daß

$$(29) \quad K_\beta^0 = -LN\Theta_\beta^{(2)}$$

ein Tensor ist. Da die Differenz von  $G_\beta^0$  und  $K_\beta^0$  nach (26) ein Tensor ist, gehorchen beide Objekte demselben Transformationsgesetz. Nun genügen aber die  $G_\beta^0$  bei einer Koordinatentransformation

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u})$$

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u)$$

dem Transformationsgesetz

$$(30) \quad \bar{G}_\lambda^\mu = G_\beta^0 \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\lambda} + \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda \partial \bar{u}^\sigma} \dot{u}^\sigma.$$

Bei einer beliebigen nicht linearen Transformation der Koordinaten müßte demnach wegen (29)

$$\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda \partial \bar{u}^\sigma} \dot{u}^\sigma \equiv 0$$

sein, was gegen unsere Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda \partial \bar{u}^\sigma} \equiv 0$$

nach sich ziehen würde. Die Relation (29) kann demnach nur so bestehen, daß

$$(30) \quad K_\beta^0 \equiv 0$$

<sup>7)</sup> Siehe O. VARGA [1] Formel (37), wobei der Unterschied in beiden Formeln wegen der in Fußnote <sup>6)</sup> erwähnten Bezeichnungsänderung entstanden ist.

<sup>8)</sup> Diese Formel entspricht der Formel (41) in O. VARGA [1] wobei wieder wegen der Bezeichnungsänderungen von  $O_\alpha$  und  $N$  formale Unterschiede entstanden.

ist. Diese Relation ist aber auch hinreichend, denn nach der gleichen Schlußweise folgt wegen (25), daß dann

$$(31) \quad G_{\beta}^{\alpha} \equiv 0$$

sein muß. Nun gilt aber

$$\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^{\alpha}} G_{\alpha}^{\alpha} = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}} = 0,$$

woraus folgt, daß  $L$  nur von  $\dot{u}^{\alpha}$  abhängt. Aus (29) und (30) folgt dann, daß entweder  $N$  oder der Tensor  $\Theta_{\alpha\beta}^{(2)}$  verschwinden muß. Wegen (26) und einem Lemma über  $\Theta_{\alpha}$ , welches<sup>9)</sup> besagt, daß das Verschwinden von  $N$  auch das von  $\Theta_{\alpha}$  nach sich zieht, muß sonach

$$(32) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{*} = K_{\alpha\beta}^{*}$$

sein.

Somit haben wir bewiesen den

**Satz 1.** Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Hyperfläche  $F_{n-1}$  des Finsler-  
raumes  $F_n$  eine Minkowskische Metrik besitzt besteht darin, daß die innere und induzierte  
Übertragung der Hyperfläche zusammenfallen.

Betrachten wir eine beliebige zweimal stetigdifferenzierbare, auf die Bogenlänge als Parameter bezogene Kurve

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s).$$

Aus den Ableitungsgleichungen (17a) folgt jetzt für

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = \frac{D}{ds} (x_{\alpha}^i u'^{\alpha}); \quad u'^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds}$$

die Gleichung

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = 2G^{\sigma} x_{\sigma}^i + Nn^i + x_{\sigma}^i u''^{\sigma}.$$

Für die linke Seite dieser Gleichung kommt auf Grund der Formel (7) und der Homogenitätseigenschaft von  $C_{jk}^i$

$$(*) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \frac{du^{\alpha}}{ds} \frac{du^{\beta}}{ds} + 2G^i(x(u), x'(u)) = 2G^{\sigma} x_{\sigma}^i + Nn^i.$$

Beachten wir nun daß

$$G^{\beta} \equiv 0$$

notwendig und hinreichend dafür ist, daß  $F_{n-1}$  eine Minkowskische Metrik besitzt

<sup>9)</sup> Siehe O. VARGA [1], Lemma, sowie die daraus auf Seite 215 gezogene Folgerung.

für die  $u^\alpha$  ausgezeichnete Koordinaten sind. Dann kommt für eine beliebige Richtung  $\dot{u}^\alpha$  der  $F_{n-1}$

$$(33) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i(x(u), \dot{x}(u)) = L^2 N n^i.$$

Die auf der rechten Seite von (33) auftretende Größe

$$(33a) \quad m^i = x_{\alpha\beta}^i \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i(x(u), \dot{x}(u))$$

bestimmt wegen ihres Transformationsgesetzes bei Übergang zu neuen räumlichen Koordinaten einen Vektor. Wir wollen, den durch (33a) definierten Vektor als Minkowskischen Vektor bezeichnen. Wir weisen nun nach, daß umgekehrt aus (33) folgt, daß die  $F_{n-1}$  eine Minkowskische Metrik besitzt für die, die  $u^\alpha$  ausgezeichnete Parameter sind.

Die  $G_\alpha$  und  $\Theta_{\alpha\beta}^{(1)}$  lassen sich folgendermaßen darstellen<sup>10)</sup>

$$(34) \quad 2G_\alpha = g_{ik}(x_{\mu\sigma}^i \dot{u}^\mu \dot{u}^\sigma + 2G^i) x_\alpha^k; \quad G_\alpha = \gamma_{\alpha\varrho} G^\varrho,$$

$$(35) \quad \Theta_{\alpha\beta}^{(1)} = (x_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{jk}^i x_\alpha^j x_\beta^k + C_{jk}^i x_\alpha^j x_{\mu\beta}^k \dot{u}^\mu) n_i.$$

Aus (35) folgt durch Überschiebung mit  $\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$

$$(36) \quad N = \frac{\Theta_{\alpha\beta}^{(1)} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{L^2} = (x_{\alpha\beta}^i \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i) \frac{n_i}{L^2}.$$

Aus den Gleichungen (33), (34) und (36) folgt sofort, daß

$$(37) \quad G_\alpha \equiv 0$$

wird, und  $N$  die Normalkrümmung von  $F_{n-1}$  ist. Für den in Satz 1 ausgesprochenen Tatbestand ist bloß die Bedingung

$$(38) \quad \Theta_{\alpha\beta}^{(2)} \equiv 0$$

notwendig. Wir können somit feststellen,

**Satz 2.** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Hyperfläche  $F_{n-1}$  des Finslerschen Raumes  $F_n$  eine Minkowskische Metrik besitzt, für die die  $u^\alpha$  ausgezeichnete Parameter sind, ist das Bestehen der Gleichungen (33), die ausdrücken, daß der Minkowskische Vektor längs der Hyperfläche zu dem Normalvektor derselben proportional ist. Die Normalkrümmung muß dabei nicht verschwinden.

Wir untersuchen nun ob es Finslerräume gibt, in denen zu jeder orientierten  $n$ -Stellung genau eine Hyperfläche  $F_{n-1}$  mit Minkowskischer Metrik existiert. Wegen Satz 1 muß in einem solchen Raum notwendigerweise zu jeder  $n$ -Stellung eine Hyperfläche vorhandensein, für die, die innere und induzierte Übertragung

<sup>10)</sup> Siehe O. VARGA [1], Formeln (19), (22) und (31), wo wieder wegen der in Fußnote 6) gemachten Bemerkung formale Änderungen auftreten.

zusammenfallen. Nach einem an anderer Stelle bewiesenen Satz<sup>11)</sup> ist der Raum also entweder ein Finslerscher von konstanter Krümmung, oder ein Riemannscher. Wir untersuchen zunächst den ersten Fall. Zuzufolge der unbeschränkten Existenz von Hyperflächen  $F_{n-1}$ , mit Minkowskischen Metrik, können wir bei festem Linien-element  $(x, \dot{x})$  die  $n$ -Stellung die die Hyperfläche berührt, beliebig um diese Richtung drehen. Dabei wird zu jeder solchen  $n$ -Stellung genau eine Hyperfläche der gewünschten Eigenschaft existieren. Daraus folgt aber wegen (33), daß der Minkowski-sche Vektor in  $(u, \dot{u})$  identisch verschwinden muß, d. h.

$$(39) \quad x_{\alpha\beta}^i \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i \equiv 0.$$

Diese Gleichung besagt aber, da die  $\dot{u}^\alpha$  nur vermöge der  $\dot{x}^i$  in den  $G^i$  auftreten, daß  $G^i$  ein quadratisches Polynom in den  $\dot{x}^i$  ist. (Man kann dies auch durch zweimalige partielle Ableitung der Gleichung (39) hinsichtlich den  $\dot{u}^\alpha$  verifizieren.)

Somit ist

$$(39a) \quad G^i(x, \dot{x}) \equiv G_{kr}^i(x) \dot{x}^k \dot{x}^r.$$

Bildet man aus  $G_{kr}^i$  den Tensor

$$(40) \quad K_{hj}^i = \frac{\partial G_{hj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{hk}^i}{\partial x^j} + G_{hj}^r G_{rk}^i - G_{hk}^r G_{rj}^i$$

und verjüngt hinsichtlich  $i$  und  $h$ , und setzt

$$(41) \quad K_{hj} = K_{hj}^i,$$

so ist nach L. BERWALD<sup>12)</sup> für einen Finslerschen Raum konstanter Krümmung  $R$  die Gleichung

$$(42) \quad K_{hj} = (n-1) R g_{hj}$$

charakteristisch. Hieraus folgt, daß die  $g_{ik}$  Ortsfunktionen sind, der Raum also ein Riemannscher, und wegen der Formeln (41), (42) und den Umstand, daß (40) ein Riemannscher Krümmungstensor ist, von konstanter Krümmung ist.

Daraus folgt, daß der  $F_n$  in beiden Fällen ein Riemannscher ist. Die Hyperflächen mit Minkowskischer Metrik werden dabei zu solchen mit euklidischer Metrik. Die unbeschränkte Existenz solcher Hyperflächen hat aber zur Folge, daß der Raum ein Riemannscher von konstanter negativer Krümmung wird.<sup>13)</sup> Daraus folgt

**Satz 3.** *Existiert in einem Finslerschen Raum  $F_n$  zu jeder orientierten  $n$ -Stellung genau eine Hyperfläche mit Minkowskischer Metrik, dann reduziert sich der  $F_n$  zu einem Riemannschen Raum konstanter negativer Krümmung.*

<sup>11)</sup> Siehe O. VARGA [1] Satz 2 und Folgerungen.

<sup>12)</sup> Siehe L. BERWALD [1], Seite 775, insb. Formel (13, 11).

<sup>13)</sup> Siehe O. VARGA [2], insb. Seite 115 und Satz 1.

### Literatur

- L. BERWALD [1], Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math.* **48** (1947), 755–781.
- E. CARTAN [1], Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Ind.* **79** (1934), 1–42.
- H. RUND [1], The Differential Geometry of Finsler Spaces, *Berlin–Göttingen–Heidelberg*, 1959.
- O. VARGA [1], Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 208–217.
- [2], Über eine Kennzeichnung der Riemannschen Räume konstanter negativer und konstanter positiver Krümmung, *Ann. Mat. Pura Appl.* **53** (1961), 105–118.

(Eingegangen am 14. Mai 1964.)