

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

СИМЕОН ТОДОРИНОВ (Пловдив)

Обозначим через L_0 множество всех функций $f(x)$ циклически монотонных косинусового типа на сегменте $[0, 1]$ [1].

Пусть L подмножество L_0 обладает следующим свойством: если $f(x) \in L$, то функция $f(x) + k(f)f''(x)$, где $K(f) \cong k_1 = \frac{1}{q_1^2}$, тоже принадлежит множеству L .

Множество L не пусто. Обозначим через $F(\lambda, \mu; x)$ функцию

$$F(\lambda, \mu; x) = \begin{cases} \cos(\lambda x + \mu), & q \cong \lambda \cong 0, \mu \cong 0, \lambda + \mu \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & q \cong \lambda \cong 0, \mu \cong 0, \lambda + \mu > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где $q = \min\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right)$. Пусть $\alpha(\lambda, \mu)$ неотрицательная и неубывающая функция по переменным λ и μ в области $D\left(0 \leq \lambda \leq q, 0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда каждая функция вида

$$(1) \quad f(x) = A(1-x) + \int_D \int F(\lambda, \mu; x) d\alpha(\lambda, \mu)$$

где $A \cong 0$, тоже принадлежит множеству L . Покажем, что и обратное предложение верно.

При доказательстве пользуемся теоремой Тагамлицкого [2]. Мы придерживаемся терминологии указанной работы.

Множество L регулярный и компактный конус относительно базе $\Phi_v(f) = f(\tau_v)$, где τ_v являются рациональными числами, принадлежащими сегменту $[0, 1]$ и норме $\|f\| = f(0)$.

Из определения следует, что $f(x) + kf''(x)$ и $-kf''(x)$, $k = \frac{1}{q^2}$, тоже принадлежат множеству L и, что равенство

$$f(x) = [f(x) + kf''(x)] + [-kf''(x)]$$

является разложением по норме.

Неразложимые векторы конуса L будут удовлетворять одно из следующих уравнений

$$f''(x) + (\lambda_1 q)^2 f(x) = 0, \quad f''(x) = 0$$

где λ_1 неотрицательное число, меньше единицы.

Последнее уравнение дает нам неразложимый вектор $1-x$. Каждое решение первого уравнения можно записать в виде $p \cos(\lambda x + \mu)$, где $\lambda = \lambda_1 q$. При этом из принадлежности $p \cos(\lambda x + \mu)$ конуса L следует, что $0 \leq \lambda \leq q$ и $0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2} - \lambda$.

Обозначим через L' подмножество L , содержащее все функции вида (1). Множество L' регулярный и компактный конус относительно базы и норме в L . Из теоремы Тагамлицкого следует, что $L' = L$. Отсюда вытекает:

Теорема. Если $f(x)$ принадлежит множеству L , то существует неотрицательная константа A и неубывающая функция $\alpha(\lambda, \mu)$ в области D , для которых выполняется равенство

$$f(x) = A(1-x) + \iint_D F(\lambda, \mu; x) d\alpha(\lambda, \mu)$$

для каждого $x \in [0, 1]$.

Аналогичное утверждение имеет место и при циклических монотонных функциях синусового типа.

Ряд авторов [3], [4], [5] применяли с успехом метод Тагамлицкого в теории функций.

Литература

- [1] С. Н. Бернштейн, Об некоторых свойствах циклически монотонных функций, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **14** (1950), 381—404.
- [2] Я. А. Тагамлицки, Върху едно обобщение на понятието неразложимост, *Годишник на Софийския университет*, **48** (1953/54), 69—85.
- [3] Я. А. Тагамлицки, Допълване на конуси и приложение към проблемата за обобщение на понятието функция, **49** (1954/55), част I 34—48 и част II 41—54.
- [4] Б. Сендов, Об одном классе регулярно монотонных функций, *Доклады АН СССР* **110** (1956).
- [5] Т. Генчев, За неразложимите вектори на някои конуси, *Изв. на Математическия институт при БАН*, **3** (1958), кн. 1, 69—88.

(Поступило 25. I. 1964.)