

Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

Einleitung

$M = M(\infty)$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ fast überall konvergiert. Es sei $1 \leq p \leq 2$ und für eine Folge $\{c_n\}_1^N$ wird

$$I_p(c_1, \dots, c_N) = I_p(\infty; c_1, \dots, c_N) = \sup \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^p dx$$

gesetzt, wobei das Supremum über alle, im Intervall $[0, 1]$ orthonormierten Funktionensysteme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ gebildet wird.

In der vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [1]) haben wir u. a. die folgenden Behauptungen bewiesen.

$\{a_n\} \in M$ gilt dann und nur dann, wenn

$$\|\{a_n\}\|_p = \|\{a_n\}; \infty\|_p = \lim_{N \rightarrow \infty} I_p^{1/p}(a_1, \dots, a_N) < \infty.$$

M ist mit der Norm $\|\{a_n\}\|_p$ ein Banachraum. Es gilt

$$\|\{a_n\}\|_p \leq C_1 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2}$$

und im Falle $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ ($n = 1, 2, \dots$) besteht

$$\|\{a_n\}\|_p \geq C_2 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2},$$

wobei C_1 und C_2 positive, absolute Konstanten bedeuten.

In dieser Mitteilung werden wir die Konvergenz der Reihe (1) mit gewissen Nebenbedingungen über das System $\{\varphi_n(x)\}$ behandeln. Wir werden nämlich die

Analoga der obigen Behauptungen beweisen, wenn das System $\{\varphi_n(x)\}$ beschränkt ist, bzw. wenn die Lebesgueschen Funktionen des Systems $\{\varphi_n(x)\}$ eine gewisse natürliche Beschränktheitsbedingung befriedigen.

§ 1. Konvergenz mit beschränkten orthonormierten Systemen

Es sei $K \geq 1$. $M(K)$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe (1) für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ mit

$$(2) \quad |\varphi_n(x)| \leq K \quad (0 \leq x \leq 1; n = 1, 2, \dots)$$

in $[0, 1]$ fast überall konvergiert. Offensichtlich ist $M(K)$ mit den gewöhnlichen vektoriellen Operationen ein linearer Raum und es gilt $M(\infty) \subseteq M(K') \subseteq M(K)$ ($K \leq K'$).

Es sei $1 \leq p \leq 2$. Für eine Folge $\{c_n\}_1^N$ setzen wir

$$I_p(K; c_1, \dots, c_N) = \sup \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^p dx,$$

wobei das Supremum für alle in $[0, 1]$ orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) gebildet ist. Offensichtlich gilt

$$(3) \quad I_p(K; c_1, \dots, c_N) \leq I_p(K'; c_1, \dots, c_N) \leq I_p(\infty; c_1, \dots, c_N) \quad (K \leq K').$$

Mit in der vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [1]) angewandten Methoden können

$$(4) \quad \left(\sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^{1/2} \leq I_2^{1/2}(K; c_1, \dots, c_N) \leq \sum_{n=1}^N |c_n|$$

und

$$(5) \quad I_p^{1/p}(K; c_1 + d_1, \dots, c_N + d_N) \leq I_p^{1/p}(K; c_1, \dots, c_N) + I_p^{1/p}(K; d_1, \dots, d_N)$$

leicht bewiesen werden. Aus (4) und (5) folgt, daß $I_2(K; c_1, \dots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \dots, c_N$ stetig ist.

Im folgenden benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. Ist $1 < K \leq K'$, dann gilt

$$I_2(K'; c_1, \dots, c_N) \leq \frac{(K')^2}{K(K-1)} I_2(K; c_1, \dots, c_N).$$

BEWEIS. Es sei $\varepsilon (> 0)$ beliebig angegeben. Nach der Definition von I_2 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\bar{\varphi}_n(x)\}_1^N$ mit $|\bar{\varphi}_n(x)| \leq K'$ ($0 \leq x \leq 1; n = 1, \dots, N$) und

$$(6) \quad \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \right)^2 dx \leq I_2(K'; c_1, \dots, c_N) - \varepsilon.$$

Es sei

$$(7) \quad a = K^{-1}(K-1).$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{K}{K'} \bar{\varphi}_n(a^{-1}x) & (0 \leq x \leq a), \\ \varrho_n r_n \left(\frac{x-a}{1-a} \right) & (a < x \leq 1) \end{cases}$$

($n=1, \dots, N$), wobei $r_n(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x$ die n -te Rademachersche Funktion bezeichnet und die Zahlen ϱ_n derart gewählt sind, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ normiert ausfallen. Offensichtlich bilden die Funktionen $\varphi_n(x)$ ein orthogonales System in $[0, 1]$ und es gilt (2) auf Grund von (7). Weiterhin besteht

$$\begin{aligned} I_2(K; c_1, \dots, c_N) &\geq \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^a \left(\max_{0 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \right)^2 dx = \\ &= \left(\frac{K}{K'} \right)^2 a \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \right)^2 dx \geq \left(\frac{K}{K'} \right)^2 a (I_2(K'; c_1, \dots, c_N) - \varepsilon) \end{aligned}$$

nach (6). Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich daraus die Behauptung.

Hilfssatz II. Es sei $K > 1$. Es gilt

$$I_2(K; c_1, \dots, c_N) \leq 2 \frac{K}{K-1} I_2(K; d_1, \dots, d_N) \quad (|c_n| \leq |d_n|; n=1, \dots, N).$$

BEWEIS. Da I_2 offensichtlich nur von den von 0 verschiedenen Koeffizienten abhängt, kann $d_n \neq 0$ ($n=1, \dots, N$) vorausgesetzt werden. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) und

$$(8) \quad \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^2 dx \geq I_2(K; c_1, \dots, c_N) - \varepsilon.$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} c_n d_n^{-1} \varphi_n(2x) & (0 \leq x \leq 1/2), \\ \sqrt{2} (1 - c_n^2 d_n^{-2})^{1/2} \varphi_n(2x-1) & (1/2 < x \leq 1) \end{cases}$$

($n=1, \dots, N$). Offensichtlich bilden diese Funktionen ein orthonormiertes System in $[0, 1]$ und es gilt $|\varphi_n(x)| \leq \sqrt{2} K$ ($0 \leq x \leq 1$; $n=1, \dots, N$). Durch eine einfache

Rechnung erhalten wir aus (8)

$$\begin{aligned}
 I_2(\sqrt{2}K; d_1, \dots, d_N) &\cong \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |d_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + d_j \bar{\varphi}_j(x)| \right)^2 dx \cong \\
 &\cong 2 \int_0^{1/2} \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(2x) + \dots + c_j \varphi_j(2x)| \right)^2 dx = \\
 &= \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^2 dx \cong I_2(K; c_1, \dots, c_N) - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich $I_2(\sqrt{2}K; d_1, \dots, d_N) \cong I_2(K; c_1, \dots, c_N)$. Mit Anwendung des Hilfssatzes I folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz III. *Es sei $K > 1$. Ist $I_2(K; c_1, \dots, c_N) \cong 3$, dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) derart, daß*

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \cong 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteq [0, 1])$ mit $\text{mes}(E) \cong q(K)$ erfüllt ist, wobei $q(K)$ eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet.

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $I_2(K; c_1, \dots, c_N) = 3$ vorausgesetzt werden. Es sei a nach (7) gewählt. Auf Grund der Definition von I_2 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$ mit $|\psi_n(x)| \leq K$ ($0 \leq x \leq 1$; $n = 1, \dots, N$) und

$$(9) \quad 3 \cong \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \psi_i(x) + \dots + c_j \psi_j(x)| \right)^2 dx \cong 2,5.$$

Für $\eta > 0$ wählen wir Treppenfunktionen $\{\chi_n(x)\}_1^N$ mit

$$(10) \quad |\chi_n(x)| \leq K \quad (0 \leq x \leq 1; n = 1, \dots, N)$$

und

$$\int_0^1 (\psi_n(x) - \chi_n(x))^2 dx \leq \eta \quad (n = 1, \dots, N).$$

Es sei

$$\alpha_{i,j} = \int_0^1 \chi_i(x) \chi_j(x) dx \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Ist η genügend klein, dann gelten

$$(11) \quad 4 \cong \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \chi_i(x) + \dots + c_j \chi_j(x)| \right)^2 dx \cong 2,$$

$$(12) \quad 6^{-1} a \alpha_{i,i} + \sum_{1 \leq j \leq N; j \neq i} |\alpha_{i,j}| \leq 1 \quad (i = 1, \dots, N)$$

und

$$(13) \quad (3a^{-1}N(N-1)|\alpha_{i,j}|)^{1/2} \leq K \quad (i, j = 1, \dots, N; i \neq j)$$

auf Grund der Orthonormalität des Systems $\{\psi_n(x)\}_1^N$ und auf Grund von (9).

Wir definieren die Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall $(5 \cdot 6^{-1}a, a]$ in $N(N-1)$ gleiche Teilintervalle $I_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, N; i \neq j$) ein. Es sei

$$\bar{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \chi_i(6a^{-1}x) & (x \in [0, 6^{-1}a]), \\ (3a^{-1}N(N-1)|\alpha_{i,j}|)^{1/2} & (x \in I_{i,j}; j = 1, \dots, N; i \neq j), \\ -(3a^{-1}N(N-1)|\alpha_{i,j}|)^{1/2} \operatorname{sign} \alpha_{i,j} & (x \in I_{j,i}; j = 1, \dots, N; i \neq j), \\ \varrho_i r_i ((1-a)^{-1}(x-a)) & (x \in (a, 1]), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($i = 1, \dots, N$), wobei die Zahlen ϱ_n derart bestimmt sind, daß die Funktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ normiert ausfallen. (Auf Grund von (12) können die ϱ_n auf diese Weise gewählt werden.) Nach (7) und (13) ist $|\bar{\varphi}_n(x)| \leq K$ ($0 \leq x \leq 1; n = 1, \dots, N$) und offensichtlich bilden diese Funktionen ein orthogonales System in $[0, 1]$.

Es sei

$$F(x) = \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)|.$$

Aus (11) folgt wegen

$$\begin{aligned} & \int_0^{a/6} \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \right)^2 dx = \\ & = \frac{a}{6} \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \chi_i(x) + \dots + c_j \chi_j(x)| \right)^2 dx \end{aligned}$$

die Beziehung

$$(14) \quad \frac{a}{3} \leq \int_0^{a/6} F^2(x) dx \leq \frac{2}{3} a.$$

Da die $\bar{\varphi}_n(x)$ Treppenfunktionen sind, gibt es eine Zerlegung von $[0, 6^{-1}a]$ in Teilintervalle $I_r = (a_r, b_r)$ ($r = 1, \dots, \varrho$) derart, daß jede Funktion $\bar{\varphi}_n(x)$ in jedem I_r konstant ist. Die Werte von $F(x)$ in I_r bezeichnen wir mit w_r . Aus (14) folgt

$$(15) \quad \frac{a}{3} \leq \sum_{r=1}^{\varrho} w_r^2 \operatorname{mes}(I_r) \leq \frac{2}{3} a.$$

Es seien $1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq \varrho$ die Indizes r , für die $w_r \geq 1$ ist. Wegen (15) gilt

$$(16) \quad \sum_{i=1}^s w_{r_i}^2 \operatorname{mes}(I_{r_i}) \geq \frac{a}{6}.$$

Wir setzen $v_r = w_r$ für $r = r_i$ ($i = 1, \dots, s$), $v_r = 1$ sonst, und

$$\alpha_l = \sum_{i=1}^l v_i^2 \text{mes}(I_i) \quad (l=0, \dots, \varrho).$$

Nach (15) ist

$$(17) \quad \alpha_\varrho \leq 5 \cdot 6^{-1} a.$$

Es sei

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_n(x) & (x \in (5 \cdot 6^{-1} a, 1]), \\ \frac{1}{v_r} \bar{\varphi}_n \left(\frac{x - \alpha_{r-1}}{v_r^2} + a_r \right) & (x \in (\alpha_{r-1}, \alpha_r); r = 1, \dots, \varrho), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n = 1, \dots, N$). (Nach (17) ist diese Definition richtig.) Die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ bilden offensichtlich ein orthonormiertes System in $[0, 1]$. Nach der Definition von v_r gilt (2). Es sei

$$E = \bigcup_{i=1}^s (\alpha_{r_i-1}, \alpha_{r_i}).$$

Auf Grund von (16) ist $\text{mes}(E) \geq 6^{-1} a$. Es sei $x \in E$. Dann gibt es ein i_0 ($1 \leq i_0 \leq s$) mit $x \in (\alpha_{r_{i_0}-1}, \alpha_{r_{i_0}})$. Da $t = v_{r_{i_0}}^{-2}(x - \alpha_{r_{i_0}-1}) + a_{r_{i_0}} \in I_{r_{i_0}}$ besteht, gilt

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| = \\ & = w_{r_{i_0}}^{-1} \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(t) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(t)| = w_{r_{i_0}}^{-1} F(t) = 1. \end{aligned}$$

Die Menge E und die Funktionen $\varphi_n(x)$ befriedigen also alle Bedingungen des Hilfssatzes III.

Hilfssatz IV. Es sei $K > 1$. Ist für eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ $I_2(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geq 3$ ($k = 0, 1, \dots$), dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) mit (2) derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.

Die Behauptung ergibt sich auf Grund des Hilfssatzes III, durch Anwendung einer in einer vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [2]) verwendeten Methode.

Hilfssatz V. Es sei $p (\geq 2)$ eine natürliche Zahl und $1 \leq c \leq 4^{-1} p$. Dann existiert ein im Intervall $[-1, \beta]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $g_l(c, p; x)$ ($l = 1, \dots, p^2$) mit $|g_l(c, p, x)| \leq M$ ($-1 \leq x \leq \beta; l = 1, \dots, p^2$) (wobei β und M positive, von c und p unabhängige Konstanten sind), für welches die folgende Bedingung erfüllt ist: für jeden Punkt $x \in [(2c)^{-1}, c^{-1}]$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p^2)$ derart, daß die Funktionswerte $g_l(c, p; x)$ ($l = 1, \dots, m(x)$) nichtnegativ sind und

$$\sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c, p; x) \geq C \sqrt{c} p \log p$$

mit einer positiven, von c, p und x unabhängigen Konstante C besteht.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. K. TANDORI [2].)

Hilfssatz VI. Es sei $K > 1$, $p (\geq 2)$ eine natürliche Zahl und $1 \leq c \leq 4^{-1}p$. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $h_l(c, p; x)$ ($l = 1, \dots, p^2$) mit folgenden Eigenschaften: es gilt $|h_l(c, p; x)| \leq K$ ($0 \leq x \leq 1$; $l = 1, \dots, p^2$); es gibt ein Intervall E mit $\text{mes}(E) \geq \omega c^{-1}$ (wobei ω eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet) derart, daß für $x \in E$ ein Index $m(x) (< p^2)$ mit $h_l(c, p; x) \geq 0$ ($l = 1, \dots, m(x)$) und

$$\sum_{l=1}^{m(x)} h_l(c, p; x) \geq D \sqrt{c} p \log p$$

existiert, wo D eine positive, nur von K abhängige Konstante ist.

BEWEIS. Dieser Hilfssatz folgt leicht aus dem Hilfssatz V. Es sei a nach (7) gewählt. Wir setzen

$$h_l(c, p; x) = \begin{cases} \frac{K}{M+K} g_l \left(c, p; \frac{1+\beta}{a} x - 1 \right) & (0 \leq x \leq a), \\ \varrho_l r_l \left(\frac{x-a}{1-a} \right) & (a < x \leq 1) \end{cases}$$

($l = 1, \dots, p^2$), wobei die ϱ_l derart angewählt sind, daß die Funktionen $h_l(c, p; x)$ normiert ausfallen. Es sei E die Bildmenge des Intervalls $[(2c)^{-1}, c^{-1}]$ bei der Transformation $y = (1+\beta)^{-1}(x+1)$. Die Funktion $h(c, p; x)$ und die Menge E befriedigen alle Forderungen des Hilfssatzes VI.

Hilfssatz VII. Es sei $K > 1$. Ist $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ ($n = 1, 2, \dots$) und

$$a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty,$$

dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ mit (2) derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.

Die Behauptung folgt durch Anwendung des Hilfssatzes VI mit in einer vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [3]) angewandten Methode.

Hilfssatz VIII. Es sei $K > 1$. $\{a_n\} \in M(K)$ gilt dann und nur dann, wenn

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} I_2(K; a_{n+1}, \dots, a_{n+N}) \right) = 0.$$

BEWEIS. Ist (18) erfüllt, dann gilt $\{a_n\} \in l^2$ wegen (4). Wir wählen eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$(19) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

und

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} I_2(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \infty.$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System mit (2). Nach dem Satz von

Riesz—Fischer gibt es eine Funktion $f(x) \in L^2[0, 1]$, nach der die Reihe (1) im quadratischen Mittel konvergiert. Bezeichnet $s_n(x)$ die n -te Partialsumme der Reihe (1), dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (f(x) - s_{n_k}(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

wegen (19), woraus $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(x) = f(x)$ fast überall folgt. Nach (20) ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\max_{n_k < i \leq j < n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right)^2 dx < \infty$$

und so besteht

$$\max_{n_k < i \leq j < n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

fast überall, woraus $s_n(x) - s_{n_k}(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$; $n_k < n < n_{k+1}$) sich fast überall ergibt. Damit haben wir $\{a_n\} \in M(K)$ bewiesen.

Ist (18) nicht erfüllt, dann gilt

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} I_2(K; a_{n+1}, \dots, a_{n+N}) \right) = \sigma > 0$$

auf Grund von $\lim_{N \rightarrow \infty} I_2(K; a_{n+1}, \dots, a_N) \cong \lim_{N \rightarrow \infty} I_2(K; a_{n+2}, \dots, a_N)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Nach (21) kann eine Indexfolge ($0 =$) $n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit $I_2(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \cong \cong \sigma/2$ ($k = 0, 1, \dots$) gewählt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $I_2(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \cong 3$ ($k = 0, 1, \dots$) annehmen. Durch Anwendung der Hilfssatzes IV ergibt sich $\{a_n\} \notin M(K)$.

Für eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ setzen wir

$$\|\{a_n\}; K\|_2 = \inf \sum_{k=0}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}),$$

wobei das Infimum für alle unendlichen Indexfolgen ($0 =$) $n_0 < \dots < n_k < \dots$ gebildet wird. Auf Grund von (3), (4) und (5) können

$$(22) \quad \|\{a_n\}; K\|_2 \leq \|\{a_n\}; K'\|_2 \leq \|\{a_n\}; \infty\|_2 \quad (K \leq K')$$

und

$$(23) \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{1/2} \leq \|\{a_n\}; K\|_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

leicht bewiesen werden. Aus dem Hilfssatz I folgt

$$(24) \quad \|\{a_n\}; K'\|_2 \leq \frac{K'}{\sqrt{K(K-1)}} \|\{a_n\}; K\|_2 \quad (1 < K \leq K').$$

Satz I. Es sei $K > 1$. $\{a_n\} \in M(K)$ gilt dann und nur dann, wenn $\|\{a_n\}; K\|_2 < \infty$. $M(K)$ ist mit der Norm $\|\{a_n\}; K\|_2$ ein Banachraum.

BEWEIS. Ist $\|\{a_n\}; K\|_2 < \infty$, dann gilt (18), woraus $\{a_n\} \in M(K)$ sich auf Grund des Hilfssatzes VIII ergibt. Ist aber $\|\{a_n\}; K\|_2 = \infty$, so kann (18) nicht bestehen. Auf Grund des Hilfssatzes VIII ist also $\{a_n\} \notin M(K)$. Um zu zeigen, daß $\|\{a_n\}; K\|_2$ in $M(K)$ eine Norm ist, soll nur die Dreiecksungleichung bewiesen werden.

Wir zeigen zuerst die folgende Behauptung: es gilt

$$(25) \quad \|\{a_n\}; K\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} I_2^{1/2}(K; a_1, \dots, a_N) \quad (\{a_n\} \in M(K)),$$

woraus die Dreiecksungleichung auf Grund von (5) folgt. Es sei $\varepsilon (> 0)$ beliebig angegeben. Ist $\{a_n\} \in M(K)$, dann gibt es eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$(26) \quad \|\{a_n\}; K\|_2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \leq \|\{a_n\}; K\|_2 + \varepsilon.$$

Es sei k_0 so groß, daß

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \varepsilon.$$

Aus (26) ergibt sich auf Grund von (5)

$$\begin{aligned} \|\{a_n\}; K\|_2 &\leq I_2^{1/2}(K; a_1, \dots, a_{n_{k_0+1}}) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \leq \\ &\leq \|\{a_n\}; K\|_2 + \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus

$$\|\{a_n\}; K\|_2 - \varepsilon \leq I_2^{1/2}(K; a_1, \dots, a_{n_{k_0+1}}) \leq \|\{a_n\}; K\|_2 + \varepsilon$$

folgt. Da $\varepsilon (> 0)$ beliebig ist, erhalten wir (25) für $k_0 \rightarrow \infty$.

Die Vollständigkeit von $M(K)$ ergibt sich aus (4) und daraus, daß $I_2(K; c_1, \dots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \dots, c_N$ stetig ist. Damit haben wir Satz I bewiesen.

Aus (23) folgt $M(K) \subseteq I^2(K \geq 1)$.

Auf Grund des Hilfssatzes II ergibt sich: Ist $|a_n| \leq |b_n|$ ($n = 1, 2, \dots$), dann gilt $\|\{a_n\}; K\|_2 \leq (2K(K-1)^{-1})^{\frac{1}{2}} \|\{b_n\}; K\|_2$ ($K > 1$).

Durch Anwendung des Hilfssatzes II kann man leicht beweisen: Ist $\{a_n(1)\}_1^\infty \in M(K)$ und gilt $a_n(m) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$; $n = 1, 2, \dots$), dann ist $\|\{a_n(m)\}; K\|_2 \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) ($K > 1$).

Aus dieser Behauptung folgt leicht, daß $M(K)$ ($K > 1$) separabel ist; die endlichen rationalen Folgen liegen nämlich in $M(K)$ überall dicht.

Aus Satz I folgt, daß im Falle $\{a_n\} \in M(K)$ ($K > 1$) eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\{\lambda_n a_n\} \in M(K)$ existiert.

Aus dem Beweis des Hilfssatzes VIII ergibt sich, daß im Falle $\{a_n\} \notin M(K)$ ($K > 1$) ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) mit (2) existiert derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.

Es sei $1 \leq p < 2$ und $K > 1$. Man kann die folgende Ungleichung leicht beweisen: Es gilt

$$\alpha I_2^{1/2}(K; c_1, \dots, c_N) \leq I_p^{1/p}(K; c_1, \dots, c_N) \leq I_2^{1/2}(K; c_1, \dots, c_N)$$

mit einer positiven, nur von K abhängigen Konstante α .

Die zweite Ungleichung folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Zum Beweis der ersten Ungleichung kann $I_2(K; c_1, \dots, c_N) = 3$ angenommen werden. Nach dem Hilfssatz III gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) derart, daß

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \cong 1$$

in einer meßbaren Menge $E(\subseteq [0, 1])$ mit $\text{mes}(E) \cong \varrho$ gilt, wobei $\varrho(\cong 1)$ eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet. Dann gilt

$$I_p^{1/p}(K; c_1, \dots, c_N) \cong (\text{mes}(E))^{1/p} \cong \varrho^{1/p} 3^{-1/2} I_2^{1/2}(K; c_1, \dots, c_N),$$

woraus sich die erste Ungleichung ergibt.

Aus diesen Ungleichungen erhalten wir, daß die entsprechenden Behauptungen anstatt $p=2$ auch für $1 \leq p < 2$ gelten.

Satz II. *Es gilt*

$$(27) \quad \|\{a_n\}; K\|_2 \cong C \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2} \quad (K \cong 1)$$

mit einer positiven, absoluten Konstante C . Ist $|a_n| \cong |a_{n+1}|$ ($n=1, 2, \dots$), dann gilt

$$(28) \quad \|\{a_n\}; K\|_2 \cong D \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2} \quad (K > 1),$$

wobei D eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet.

BEWEIS. (27) folgt aus (22) und aus der entsprechenden Ungleichung für $\|\{a_n\}; \infty\|_2$.

Ist $\|\{a_n\}; K\|_2 < \infty$, dann ist $\{a_n\} \in M(K)$. Nach dem Hilfssatz VII folgt

$$a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty.$$

Für jede Folge $\{a_n\}$ gibt es also eine positive Konstante D derart, daß (28) besteht. Wir zeigen, daß D in (28) von der Folge $\{a_n\}$ unabhängig bestimmt werden kann. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich Folgen $\{a_n(m)\}_1^{\infty}$ ($m=1, 2, \dots$) mit $|a_n(m)| \cong |a_{n+1}(m)|$ ($n=1, 2, \dots; m=1, 2, \dots$) und

$$(29) \quad \|\{a_n(m)\}; K\|_2 \cong \frac{1}{m^4} \left(a_1^2(m) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2(m) \log^2 n \right)^{1/2}$$

angeben. $\|\{a_n(m)\}; K\|_2 = 1/m^2$ ($m=1, 2, \dots$) kann vorausgesetzt werden. Dann folgt aus (29)

$$(30) \quad \left(a_1^2(m) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2(m) \log^2 n \right)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty).$$

Auf Grund von (30) und von $|a_n(m)| \cong \|\{a_n(m)\}; K\|_2 \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty; n=1, 2, \dots$) ergeben sich durch vollständige Induktion zwei Folgen ganzer Zahlen $(1 \leq) v_1 < \dots$

$\dots < v_k < \dots$ ($v_0 = -1$) und $(1 \leq) m_1 < \dots < m_k < \dots$ mit

$$a_1^2(m_1) + \sum_{n=2}^{2^{v_1}} a_n^2(m_1) \log^2 n \cong 1, \quad \sum_{n=2^{v_{k-1}+1}}^{2^{v_k}} a_n^2(m_k) \log^2 n \cong 1 \quad (k=2, 3, \dots)$$

und

$$|a_{2^{v_k}}(m_k)| \cong |a_{2^{v_{k+1}}}(m_{k+1})| \quad (k=1, 2, \dots).$$

Es sei $a_n = a_n(m_k)$ ($2^{v_{k-1}} < n \leq 2^{v_k}$; $k=1, 2, \dots$). Dann ist $|a_n| \cong |a_{n+1}|$ ($n=1, 2, \dots$) und

$$a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty.$$

Auf Grund des Hilfssatzes VII folgt also $\{a_n\} \notin M(K)$, was der Ungleichung

$$\|\{a_n\}; K\|_2 \cong \sum_{m=1}^{\infty} \|\{a_n(m)\}; K\|_2 = \sum_{m=1}^m \frac{1}{m^2} < \infty$$

widerspricht. Damit haben wir Satz II bewiesen.

Wir werden noch einige Probleme erwähnen. Wie kann $M(1)$ charakterisiert werden? Gilt $\|\{a_n\}; \infty\|_2 \cong C \|\{a_n\}; K\|_2$ mit einer nur von K abhängigen positiven Konstante C ? Gibt es im Falle $\{a_n\} \notin M(K)$ ($K > 1$) eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\mu_n\}$ mit $\{a_n \mu_n\} \in M(K)$? Gilt (25) für jede Folge $\{a_n\}$?

§ 2. Konvergenz mit Beschränktheitsbedingung für die Lebesgueschen Funktionen

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit $\lambda_1 \cong 1$. $M(\{\lambda_n\})$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^{\infty}$, für die die Orthogonalreihe (1) für jedes in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ mit

$$(31) \quad \sup \int_0^1 \frac{dx}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{v(x)} \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \cong 1$$

in $[0, 1]$ fast überall konvergiert, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist. Ist für ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$

$$(32) \quad L_v(\{\varphi_n\}; x) = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^v \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \cong \lambda_v \quad (0 \leq x \leq 1; v=1, 2, \dots),$$

dann gilt (31). $M(\{\lambda_n\})$ ist mit den gewöhnlichen vektoriellen Operationen ein linearer Raum und es gilt $M(\{\lambda_n\}) \supseteq M(\{\mu_n\}) \supseteq M(\infty)$ ($\lambda_n \cong \mu_n$; $n=1, 2, \dots$).

Es sei $1 \leq p \leq 2$. Für eine Folge $\{c_n\}_1^N$ wird

$$I_p(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) = \sup \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^p dx$$

gesetzt, wobei das Supremum für alle in $[0, 1]$ orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (31) gebildet wird. Offensichtlich ist

$$(33) \quad I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \leq I_1(\{\mu_n\}; c_1, \dots, c_N) \leq I_1(\infty; c_1, \dots, c_N) \quad (\lambda_n \leq \mu_n; n = 1, 2, \dots),$$

$$(34) \quad I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \leq \sum_{n=1}^N |c_n|$$

und

$$(35) \quad I_1(\{\lambda_n\}; c_1 + d_1, \dots, c_N + d_N) \leq I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) + I_1(\{\lambda_n\}; d_1, \dots, d_N).$$

Daraus und aus (34) folgt, daß $I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \dots, c_N$ stetig ist.

Die Abschätzung

$$(36) \quad |c_n| \leq C I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \quad (1 \leq n \leq N)$$

mit einer positiven absoluten Konstante C kann man ebenfalls leicht beweisen. Es sei nämlich $I_n = [0, \frac{1}{2}]$ und die I_k ($k = 1, \dots, N; k \neq n$) sollen der Reihe nach die Intervalle $(\frac{1}{2} + (j-1)/2(N-1), \frac{1}{2} + j/2(N-1)]$ ($j = 1, \dots, N-1$) bezeichnen. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{\text{mes}(I_n)} & (x \in I_n), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n = 1, \dots, N$). $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ ist ein orthonormiertes System in $[0, 1]$, es besteht $L_v(\{\varphi_n\}; x) = 1$ ($0 \leq x \leq 1; v = 1, 2, \dots$) und es gilt

$$|c_n|/\sqrt{2} \leq \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right) dx,$$

woraus (36) folgt.

Wir benötigen einige Hilfssätze.

Hilfssatz IX. *Es gilt*

$$I_1(\{a\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \leq 2\sqrt{a} I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \quad (a > 1).$$

BEWEIS. Auf Grund der Definition von I_1 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$ mit

$$(37) \quad \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \psi_i(x) + \dots + c_j \psi_j(x)| \right) dx \leq \frac{1}{2} I_1(\{a\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N)$$

und

$$(38) \quad \sup \int_0^1 \frac{dx}{a^{\lambda_{\mu(x)}}} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \psi_n(x) \psi_n(t) \right| dt \leq 1,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\mu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{a} \psi_n(ax) & (0 \leq x \leq 1/a), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, N$). Das System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ ist in $[0, 1]$ orthonormiert. Ist $x \in [0, 1/a]$, dann gilt

$$L_v(\{\varphi_n\}; x) = a \int_0^{1/a} \left| \sum_{n=1}^v \psi_n(ax) \psi_n(at) \right| dt = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^v \psi_n(ax) \psi_n(t) \right| dt;$$

im Falle $x \in (1/a, 1]$ ist aber $L_v(\{\varphi_n\}; x) = 0$ ($v=1, 2, \dots$). Es sei $v(x)$ eine beliebige meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Auf Grund von (38) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx &= \int_0^{1/a} \frac{dx}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{v(x)} \psi_n(ax) \psi_n(t) \right| dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{a \lambda_{v(x/a)}} L_{v(x/a)}(\{\psi_n\}; x) dx \leq 1. \end{aligned}$$

Da $v(x)$ eine beliebige, meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten bedeutet, ist (31) erfüllt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right) dx = \\ &= \sqrt{a} \int_0^{1/a} \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \psi_i(ax) + \dots + c_j \psi_j(ax)| \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \psi_i(x) + \dots + c_j \psi_j(x)| \right) dx, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung auf Grund von (37) folgt.

Hilfssatz X. Es sei $I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \geq 16\sqrt{2}$. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ ($n=1, \dots, N$) derart, daß

$$\sup \int_0^1 \frac{2L_{v(x)}(\{\psi_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx \leq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist, und

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \psi_i(x) + \dots + c_j \psi_j(x)| \geq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteq [0, 1])$ mit $\text{mes}(E) \geq 1/4$ besteht.

BEWEIS. Auf Grund des Hilfssatzes IX ist $I_1(\{\lambda_n/4\}; c_1, \dots, c_N) \cong 4\sqrt{2}$. Nach der Definition von I_1 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\chi_n(x)\}_1^N$ mit

$$(39) \quad \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \chi_i(x) + \dots + c_j \chi_j(x)| \right) dx > 2\sqrt{2}$$

und

$$(40) \quad \sup \int_0^1 \frac{4L_{v(x)}(\{\chi_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx \leq 1,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist.

Für $\eta > 0$ wählen wir die Treppenfunktionen $\{\bar{\chi}_n(x)\}_1^N$ mit

$$\int_0^1 (\chi_n(x) - \bar{\chi}_n(x))^2 dx < \eta \quad (n = 1, \dots, N)$$

und

$$(41) \quad |\bar{\chi}_n(x)| \leq |\chi_n(x)| \quad (0 \leq x \leq 1; n = 1, \dots, N).$$

Wir setzen

$$\alpha_{i,j} = \int_0^1 \bar{\chi}_i(x) \bar{\chi}_j(x) dx \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Es sei $\varepsilon (> 0)$ beliebig angegeben. Ist η genügend klein, dann folgt aus (39), (40), (41) und aus der Orthonormalität der Funktionen $\chi_n(x)$

$$(42) \quad \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\chi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\chi}_j(x)| \right) dx > 2\sqrt{2},$$

$$(43) \quad \sup \int_0^1 \frac{4L_{v(x)}(\{\bar{\chi}_n\}; x)}{(1 + \varepsilon) \lambda_{v(x)}} dx \leq 1$$

(wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist) und

$$(44) \quad |\alpha_{i,j}| \leq \varepsilon/N \quad (i, j = 1, \dots, N; i \neq j), \quad 1 - \varepsilon \leq \alpha_{i,i} \leq 1 + \varepsilon \quad (i = 1, \dots, N).$$

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ definieren wir folgenderweise. Wir teilen das Intervall $(1, 2]$ in $N(N-1)$ gleiche Teilintervalle $I_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, N; i \neq j$) ein. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \bar{\chi}_n(x) & (x \in [0, 1]), \\ \sqrt{2^{-1} N(N-1) |\alpha_{n,i}|} & (x \in I_{n,i}; i = 1, \dots, N; i \neq n), \\ -\sqrt{2^{-1} N(N-1) |\alpha_{n,i}|} \operatorname{sign} \alpha_{n,i} & (x \in I_{i,n}; i = 1, \dots, N; i \neq n), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, N$). Diese Treppenfunktionen bilden in $[0, 2]$ ein orthogonales System und nach (44) gilt

$$(45) \quad 1 - \varepsilon \leq \alpha_{n,n} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq n}} |\alpha_{n,j}| = \int_0^2 \varphi_n^2(x) dx \leq 1 + 2\varepsilon \quad (n=1, \dots, N).$$

Es sei $\mu(x)$ eine in $[0, 2]$ meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Nach (41) und (43) ist

$$(46) \quad \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^2 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^1 + \int_1^2 \right) dx \leq \\ \leq \frac{1+\varepsilon}{2} + \sqrt{2N(N-1)} \max_{1 \leq i, j \leq N; i \neq j} \sqrt{|\alpha_{i,j}|} \sum_{n=1}^N \int_0^1 |\chi_n(x)| dx < 1,$$

wenn ε genügend klein ist. Weiterhin gilt auf Grund von (44)

$$(47) \quad \int_1^2 \frac{2dx}{\lambda_{\mu(x)}} \int_0^2 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq \\ \leq \sum_{1 \leq i, j \leq N; i \neq j} \int_{I_{i,j}} \frac{2dx}{\lambda_{\mu(x)}} \int_0^2 (|\varphi_i(x) \varphi_i(t)| + |\varphi_j(x) \varphi_j(t)|) dt \leq \\ \leq \sqrt{2} \sum_{1 \leq i, j \leq N; i \neq j} \left(\int_0^2 |\varphi_i(t)| dt + \int_0^2 |\varphi_j(t)| dt \right) \sqrt{|\alpha_{i,j}|} < 1,$$

wenn ε genügend klein ist. Aus (46) und (47) ergibt sich

$$(48) \quad \sup \int_0^2 \frac{2}{\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^2 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx < 2,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\mu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet wird.

Wir setzen

$$\bar{\varphi}_n(x) = \sqrt{2} \varphi_n(2x) \left(\int_0^2 \varphi_n^2(x) dx \right)^{-1/2} \quad (n=1, \dots, N).$$

Ist $\varepsilon(>0)$ genügend klein, so erhalten wir aus (42), (45) und (48)

$$\int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \right) dx \leq 2,$$

und

$$(49) \quad \sup \int_0^1 \frac{2L_{v(x)}(\{\bar{\varphi}_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx \leq 1,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist. Die Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann

$$(50) \quad \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \right) dx = 2$$

vorausgesetzt werden.

Es sei $I_r = (a_r, b_r)$ ($r = 1, \dots, \varrho$) eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\bar{\varphi}_n(x)$ in jedem I_r konstant ist. Es sei

$$F(x) = \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(x)|;$$

die Werte von $F(x)$ in den Intervallen I_r bezeichnen wir der Reihe nach mit w_r . Nach (50) ist

$$(51) \quad \sum_{r=1}^{\varrho} w_r \text{mes}(I_r) = 2.$$

Es seien $1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq \varrho$ diejenigen Indizes r , für die $w_r \geq 1$ ist. Nach (51) gilt

$$(52) \quad (2 \geq) \sum_{i=1}^s w_{r_i} \text{mes}(I_{r_i}) \geq 1.$$

Es seien $J_r = (\alpha_r, \beta_r)$ ($r = 1, \dots, \varrho$) nacheinander folgende Intervalle in $[0, 3]$ mit $\text{mes}(J_r) = \text{mes}(I_r)$ ($r \neq r_i; i = 1, \dots, s$), bzw. mit $\text{mes}(J_{r_i}) = w_{r_i} \text{mes}(I_{r_i})$ ($i = 1, \dots, s$), und $\bar{J}_{r_i} = (\bar{\alpha}_{r_i}, \bar{\beta}_{r_i})$ ($i = 1, \dots, s$) nacheinander folgende Intervalle in $(3, 4]$ mit $\text{mes}(\bar{J}_{r_i}) = \text{mes}(I_{r_i})$ ($i = 1, \dots, s$). Wir setzen

$$\bar{\psi}_n(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_n(x - \alpha_r + a_r) & (x \in J_r; r \neq r_i; i = 1, \dots, s), \\ \frac{1}{w_{r_i}} \bar{\varphi}_n\left(\frac{x - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i}\right) & (x \in J_{r_i}; i = 1, \dots, s), \\ \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \bar{\varphi}_n(x - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) & (x \in \bar{J}_{r_i}; i = 1, \dots, s), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n = 1, \dots, N$). Auf Grund von (52) ist diese Definition richtig.

Die Treppenfunktionen $\bar{\psi}_n(x)$ bilden in $[0, 4]$ ein orthonormiertes System. Es sei

$$\bar{E} = \bigcup_{\sigma=1}^s J_{r_\sigma}.$$

$\bar{E}$ ist einfach und es gilt

$$(53) \quad \text{mes}(\bar{E}) \cong 1$$

nach (52). Ist $x \in E$, dann gilt offensichtlich

$$(54) \quad \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\psi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\psi}_j(x)| = 1.$$

Es sei $\mu(x)$ eine beliebige in $[0, 4]$ meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Ist $x \in J_{r_0}$ ($r_0 \neq r_i; i = 1, \dots, s$), dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{J_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \alpha_r + a_r) \right| dt + \\ & \quad + \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_{r_i}} \int_{J_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n\left(\frac{t - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i}\right) \right| dt + \\ & \quad + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{\bar{J}_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) \right| dt = \\ & = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{I_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \\ & \quad + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt \leq 2L_m(\{\bar{\varphi}_n\}; x - \alpha_{r_0} + a_{r_0}) \end{aligned}$$

für $m = 1, \dots, N$, woraus sich

$$\begin{aligned} (55) \quad & \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{J_r} \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{I_r} \frac{L_{\mu(x - a_r + \alpha_r)}(\{\bar{\varphi}_n\}; x)}{\lambda_{\mu(x - a_r + \alpha_r)}} dx \end{aligned}$$

ergibt. Ist $x \in J_{r_{i_0}}$ ($1 \leq i_0 \leq s$), dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt &= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{J_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \alpha_r + a_r) \right| dt + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_{r_i}} \int_{J_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n \left(\frac{t - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i} \right) \right| dt + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}} \right)^{1/2} \int_{\bar{J}_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) \right| dt = \\
 &= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{I_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}} \right)^{1/2} \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt \leq \frac{2}{w_{r_{i_0}}} L_m \left(\{ \bar{\varphi}_n \}; \frac{x - \alpha_{r_{i_0}}}{w_{r_{i_0}}} + a_{r_{i_0}} \right)
 \end{aligned}$$

für $m = 1, \dots, N$, woraus wir

$$\begin{aligned}
 (56) \quad \sum_{i=1}^s \int_{J_{r_i}} \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt \right) dx &\leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \frac{L_{\mu(w_{r_i}(x - a_{r_i}) + \alpha_{r_i})}(\{ \bar{\varphi}_n \}; x)}{\lambda_{\mu(w_{r_i}(x - a_{r_i}) + \alpha_{r_i})}} dx
 \end{aligned}$$

erhalten. Ist aber $x \in \bar{J}_{r_{i_0}}$ ($1 \leq i_0 \leq s$), dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt &= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{J_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \alpha_r + a_r) \right| dt + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_{r_i}} \int_{J_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n \left(\frac{t - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i} \right) \right| dt + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}} \right)^{1/2} \int_{\bar{J}_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) \right| dt = \\
 &= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i \ (i=1, \dots, s)}}^q \int_{I_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}} \right)^{1/2} \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt \leq 2L_m(\{ \bar{\varphi}_n \}; x - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i})
 \end{aligned}$$

für $m = 1, \dots, N$, woraus

$$(57) \quad \sum_{i=1}^s \int_{J_{r_i}} \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt \leq \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \frac{L_{\mu(x-a_{r_i}+\bar{z}_{r_i})}(\{\bar{\varphi}_n\}; x)}{\lambda_{\mu(x-a_{r_i}+\bar{z}_{r_i})}} dx$$

folgt. Aus (55), (56) und (57) erhalten wir auf Grund von (49), daß

$$(58) \quad \int_0^4 \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt \right) dx \leq 1$$

für jede in $[0, 4]$ meßbare Funktion $\mu(x)$ mit ganzzahligen Werten besteht.

Wir setzen endlich

$$\psi_n(x) = 2\bar{\psi}_n(4x) \quad (n = 1, \dots, N).$$

Weiterhin bezeichnet E die Bildmenge von $\bar{E}$ bei der Transformation $y = x/4$. Auf Grund von (53), (54) und (58) ist es offensichtlich, daß die Funktionen $\psi_n(x)$ und die Menge E alle Forderungen des Hilfssatzes X befriedigen.

Hilfssatz XI. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. Ist für eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$

$$I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) = I_1(\{\lambda_n\}; \underbrace{0, \dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geq 16\sqrt{2} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) mit (31) derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.

BEWEIS. Durch vollständige Induktion definieren wir eine Indexfolge $(0 =) k(0) < \dots < k(i) < \dots$, ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), und eine Folge von einfachen Mengen $F_i (\subseteq [0, 1])$ ($i = 1, 2, \dots$) mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes i gilt

$$(59) \quad \lambda_{n_{k(i)}+1}^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} (M(j) + 1) \right) \leq 1/8,$$

wobei

$$M(j) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j+1)}+1} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt$$

ist.

Die Mengen F_i sind stochastisch unabhängig und für jedes i gilt

$$(60) \quad \text{mes}(F_i) \geq 1/4.$$

Es besteht

$$(61) \quad L_{n_{k(i)}}(\{\varphi_n\}; x) \leq 1, \quad \sup_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx \leq 1/8,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten $1 \leq v(x) \leq n_{k(1)}$ gebildet ist.

Für jedes i gelten

$$(62) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{n_{k(i+1)}} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

und

$$(63) \quad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq 3/4,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten $n_{k(i)} < v(x) \leq n_{k(i+1)}$ gebildet wird.

Für jedes i gilt

$$(64) \quad \max_{n_{k(i)} < p \leq q \leq n_{k(i+1)}} |a_p \varphi_p(x) + \dots + a_q \varphi_q(x)| \leq 1 \quad (x \in F_i).$$

Es sei $k(1)$ die kleinste positive ganze Zahl mit $\lambda_{n_{k(1)}+1}^{-1} \leq 1/8$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{8} \chi_n(8x) & (0 \leq x \leq 1/8), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, n_{k(1)}$), wobei $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann gilt (61). (Siehe z. B. G. ALEXITS [1], S. 46–50.) Es sei $i_0 (\geq 0)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die Indizes $k(i)$ ($i=1, \dots, i_0+1$), die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+1)}$) und die einfachen Mengen F_i ($i=1, \dots, i_0$) schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, (61), weiterhin (59) für $i=1, \dots, i_0+1$, (60), (62), (63) und (64) für $i=1, \dots, i_0$ erfüllt sind.

Dann können wir eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle I_s ($s=1, \dots, \sigma$) angeben derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+1)}$) in jedem I_s konstant ist und jede Menge F_i ($i=1, \dots, i_0$) die Vereinigung gewisser I_s ist. Die zwei Hälften von I_s bezeichnen wir mit I'_s bzw. I''_s . Wir wenden den Hilfssatz X mit der Folge $\lambda_{n_{k(i_0+1)}+1}, \dots, \lambda_{n_{k(i_0+1)}+1}$ und mit den Koeffizienten $a_{n_{k(i_0+1)}+1}, \dots, a_{n_{k(i_0+1)}+1}$ an. Die entsprechenden Funktionen bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\psi_n(x)$ ($n=n_{k(i_0+1)}+1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$) bzw. mit E . Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)}+l}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I'_s; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I''_s; x)$$

$$(l=1, \dots, n_{k(i_0+1)+1} - n_{k(i_0+1)})$$

und

$$F_{i_0+1} = \left(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I'_s) \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I''_s) \right),$$

wobei im allgemeinen für ein endliches Intervall $I = [a, b]$

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist und für eine Menge $H (\subseteq [0, 1])$ $H(I)$ die Bildmenge von H bei der Transformation $y = (b-a)x + a$ bedeutet.

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$) sind auch Treppenfunktionen und die Menge F_{i_0+1} ist einfach. Die Mengen F_i ($i = 1, \dots, i_0 + 1$) sind offensichtlich stochastisch unabhängig, weiterhin ist (60) auch für $i = i_0 + 1$ erfüllt. Durch einfache Rechnung folgt

$$(65) \quad \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq 1/2$$

für jede meßbare Funktion $v(x)$ mit ganzzahligen Werten $n_{k(i_0+1)} < v(x) \leq n_{k(i_0+1)+1}$. Es sei $n_{k(i_0+2)}$ die kleinste von n_k mit $n_{k(i_0+2)} > n_{k(i_0+1)}$, für die (59) im Falle $i = i_0 + 2$ besteht. Es sei $J_1, \dots, J_q$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+1)+1}$) in jedem J_r konstant ist. Die zwei Hälften von J_r bezeichnen wir mit J'_r bzw. mit J''_r . Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)+1+l}}(x) = \sum_{r=1}^q \chi_l(J'_r; x) - \sum_{r=1}^q \chi_l(J''_r; x) \quad (l = 1, \dots, n_{k(i_0+2)} - n_{k(i_0+1)+1}),$$

wobei $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann ist

$$(66) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}+1}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt = 1 \quad (0 \leq x \leq 1; n_{k(i_0+1)+1} < n \leq n_{k(i_0+2)}).$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+2)}$) ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System, (64) ist auch für $i = i_0 + 1$ erfüllt, weiterhin folgt aus (65) und (66), daß (62) und (63) für $i = i_0 + 1$ bestehen. Die Folge $\{k(i)\}$, das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ und die Mengenfolge $\{F_i\}_1^\infty$ mit den erwähnten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Ist $x \in \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} F_i}$, dann ist die Reihe (1) wegen (64) divergent. Da die Mengen F_i stochastisch unabhängig sind und (60) für jedes i besteht, ergibt sich durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\text{mes}(\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} F_i}) = 1$ ist. Die Reihe (1) divergiert also in $[0, 1]$ fast überall.

Es sei $v(x)$ eine meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Ist $n_{k(i)} < v(x) \equiv n_{k(i+1)}$ ($i=1, 2, \dots$), dann gilt, auf Grund von (59), (62) und (63),

$$\begin{aligned}
 (67) \quad & \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) \equiv \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}+1}} \left(L_{n_{k(i)}}(\{\varphi_n\}; x) + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j+1)}+1} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j+1)}+1}^{n_{k(j+2)}+1} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right\} + \\
 & + \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \equiv \\
 & \equiv \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}+1}} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} (M(j)+1) \right) + \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \equiv \\
 & \equiv \frac{1}{8} + \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt.
 \end{aligned}$$

E bezeichnet die Untermenge von $[0, 1]$, in der $v(x) \equiv n_{k(1)}$ ist und es sei $CE = [0, 1] \setminus E$. Dann ist, auf Grund von (61), (62) und (67),

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx \equiv \int_E \frac{L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx + \frac{1}{8} \int_{CE} dx + \\
 & + \int_{CE} \frac{dx}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \equiv 1.
 \end{aligned}$$

Also ist (31) erfüllt.

Hilfssatz XII. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gilt dann und nur dann, wenn

$$(68) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n+1}, \dots, a_{n+N}) \right) = 0.$$

BEWEIS. Ist (68) erfüllt, dann gibt es eine Indexfolge $(0=) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$(69) \quad \sum_{k=0}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \infty.$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System mit (31). Aus (69) folgt

$$(70) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\max_{n_k < i \leq j \leq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right) dx < \infty.$$

Bezeichnet $s_n(x)$ die n -te Partialsumme von (1), dann ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x)| dx < \infty$$

nach (70), woraus wir erhalten, daß $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(x)$ fast überall existiert. Es sei $n_k < n < n_{k+1}$.

Aus (70) folgt weiterhin

$$|s_n(x) - s_{n_k}(x)| \leq \max_{n_k < i \leq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

fast überall, womit $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ bewiesen ist.

Ist aber (68) nicht erfüllt, dann gibt es eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit $I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \cong \sigma > 0$ ($k=0, 1, \dots$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \cong 16\sqrt{2}$ ($k=0, 1, \dots$) angenommen werden. Durch Anwendung des Hilfssatzes XI erhalten wir $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$.

Bemerkung. Aus (68) folgt $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ ohne der Bedingung $\lambda_n \nearrow \infty$.

Für eine Folge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \inf \sum_{k=0}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}),$$

wobei das Infimum für alle unendlichen Indexfolgen $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ gebildet wird. Auf Grund von (34) und (36) folgt

$$(71) \quad \frac{1}{C} |a_{n_0}| \leq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (n_0 = 1, 2, \dots),$$

wobei C eine positive, absolute Konstante bedeutet. Auf Grund von (33) kann $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \|\{a_n\}; \infty\|_1$ leicht eingesehen werden. Aus (33) folgt $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \|\{a_n\}; \{\mu_n\}\|_1$ ($\lambda_n \leq \mu_n; n=1, 2, \dots$).

Satz III. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gilt dann und nur dann, wenn $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 < \infty$. $M(\{\lambda_n\})$ ist mit der Norm $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ ein Banachraum.

BEWEIS. Ist $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 < \infty$, dann gilt (68), woraus sich auf Grund des Hilfssatzes XII $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ ergibt. Ist aber $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \infty$, dann kann (68) nicht bestehen und aus dem Hilfssatz XII folgt $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$. $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ ist eine Norm in $M(\{\lambda_n\})$. Dazu sollen wir nun die Dreiecksungleichung beweisen.

Wir werden zeigen, daß im Falle $\lambda_n \nearrow \infty$

$$(72) \quad \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_N) \quad (\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\}))$$

besteht, woraus sich die Dreiecksungleichung ergibt. Im Falle $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gibt es nach der Definition von $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$(73) \quad \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \leq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon (> 0)$ beliebig angegeben ist. Es sei k_0 so groß, daß

$$(74) \quad \sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \varepsilon.$$

Wegen (35) folgt aus (73)

$$\begin{aligned} \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 &\leq I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_{n_{k_0+1}}) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \leq \\ &\leq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus und aus (74) ergibt sich

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 - \varepsilon \leq I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_{n_{k_0+1}}) \leq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon.$$

Da $I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_N) \leq I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_{N+1})$ ($N=1, 2, \dots$) ist, erhalten wir daraus

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 - \varepsilon \leq \lim_{N \rightarrow \infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_N) \leq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon (> 0)$ beliebig ist, folgt (72).

Die Vollständigkeit von $M(\{\lambda_n\})$ ergibt sich leicht auf Grund von (71), daraus, daß $I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \dots, c_N$ stetig ist. Damit haben wir Satz III bewiesen.

Aus den Beweisen der Hilfssätze XI und XII erhalten wir: *Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. Ist $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$, dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) mit (31) derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.*

Aus dem Satz III folgt: *Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. Ist $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$, dann gibt es eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\mu_n\}$ mit $\{a_n \mu_n\} \in M(\{\lambda_n\})$.*

Aus dem Hilfssatz XII und (72) ergibt sich: $M(\{\lambda_n\})$ ($\lambda_n \nearrow \infty$) ist separabel. (Die endlichen rationalen Folgen liegen in $M(\{\lambda_n\})$ überall dicht.)

Wir erwähnen einige Probleme. Wie kann $M(\{\lambda_n\})$ mit $\lambda_n = O(1)$ charakterisiert werden? Gelten die entsprechenden Behauptungen anstatt $p=1$ für $1 < p \leq 2$? Ist $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \|\{b_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ ($|a_n| \leq |b_n|$; $n=1, 2, \dots$) richtig? Gibt es im Falle $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$ eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\mu_n\}$ mit $\{\mu_n a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$? Gilt (72) für jede Folge $\{a_n\}$?

Um noch einen weiteren Satz zu beweisen, werden wir einige Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz XIII. *Es sei $p (\geq 2)$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es ein in $[0, 5]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $f_l(p; x)$ ($l=1, \dots, 2p$) mit folgenden Eigenschaften: Es gilt*

$$\int_0^5 \left| \sum_{k=1}^n f_l(p; x) f_l(p; t) \right| dt \leq A \log^2 p \quad (0 \leq x \leq 5; n=1, \dots, 2p)$$

und für jedes $x \in [2, 3]$ existiert ein Index $m(x)$ ($< 2p$) derart, daß die Funktionswerte $f_l(p; x)$ ($l = 1, \dots, m(x)$) positiv sind und

$$\sum_{l=1}^{m(x)} f_l(p; x) \cong B \sqrt{p} \log p$$

besteht, wobei A und B positive, absolute Konstanten bedeuten.

Hilfssatz XIII ist bekannt. (Siehe K. TANDORI [4].)

Hilfssatz XIV. Es seien $p (\geq 2)$, q natürliche Zahlen und $c \geq 1$. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $g_l(c, p; q; x)$ ($l = 1, \dots, 2pq$) mit folgenden Eigenschaften. Es gilt

$$\int_0^1 \left| \sum_{l=1}^n g_l(c, p, q; x) g_l(c, p, q; t) \right| dt \leq A \log^2 p \quad (0 \leq x \leq 1; n = 1, \dots, 2pq),$$

es gibt eine einfache Menge $E (\subseteq [0, 1])$ mit $\text{mes}(E) = 1/5c$ derart, daß für jedes $x \in E$ ein Index $m(x)$ ($< 2pq$) mit $g_l(c, p, q; x) \geq 0$ ($l = 1, \dots, m(x)$) und

$$\sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c, p, q; x) \geq \sqrt{5} B \sqrt{cpq} \log p$$

existiert, wobei A und B positive, absolute Konstanten sind.

BEWEIS. Wir wenden den Hilfssatz XIII im Falle p an. Wir setzen

$$\begin{aligned} g_{2kp+l}(c, p, q; x) &= \\ &= \begin{cases} \sqrt{5qc} f_l(p, 5qc(x - k/qc)) & (k/qc \leq x < (k+1)/qc; k = 0, \dots, q-1), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

($l = 1, \dots, 2p$). Es sei

$$E = \bigcup_{k=0}^{q-1} \left[\frac{k}{qc} + \frac{2}{5qc}, \frac{k}{qc} + \frac{3}{5qc} \right].$$

Diese Funktionen und diese Menge befriedigen alle Forderungen des Hilfssatzes XIV.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende, von unten konkave Folge mit $\lambda_1 \geq 1$ und $\lambda_n \leq (\log n)^2$ ($n \geq 2$). (Im folgenden verwenden wir Logarithmus mit der Basis 2.) Die Indexfolge $\{m_k\}$ definieren wir folgenderweise. Es sei $m_1 = 1$ und m_{k+1} sei die natürliche Zahl mit $\lambda_{m_{k+1}} > 2\lambda_{m_k+1}$ und $\lambda_{m_{k+1}-1} \leq 2\lambda_{m_k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Wegen der Konkavität gilt

$$\frac{\lambda_{2m_k} - \lambda_{m_k+1}}{m_k - 1} \leq \frac{\lambda_{m_k+1} - \lambda_{m_1}}{m_k - m_1 + 1},$$

woraus

$$\lambda_{2m_k} - \lambda_{m_k+1} \leq \frac{m_k - m_1}{m_k} \lambda_{m_k+1} - \frac{m_k - m_1}{m_k} \lambda_{m_1} \leq \lambda_{m_k+1}$$

folgt. Nach der Definition von m_{k+1} gilt also $m_{k+1} > 2m_k$ ($k \geq 2$). Daraus erhalten wir

$$\log^2 (m_{k+1} - m_k) > \log^2 m_k \geq \lambda_{m_k} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Ist k genügend groß, dann gibt es eine natürliche Zahl $\bar{q}_k$ mit

$$(75) \quad \frac{\lambda_{m_k}}{4} \leq A \log^2 \left[\frac{m_{k+1} - m_k}{2\bar{q}_k} \right] \leq \frac{\lambda_{m_k}}{3},$$

wobei A die im Hilfssatz XIV erwähnte Konstante ist und $[\alpha]$ den ganzen Teil von α bezeichnet. Ist k genügend groß, dann besteht

$$(76) \quad \lambda_{m_k}/4 \geq 1.$$

Nach der Definition von m_k gilt $\lambda_{m_k} > 2^{k-1} \lambda_{m_1+1}$ ($k = 2, 3, \dots$). Ist k genügend groß, dann erhalten wir durch einfache Rechnung

$$(77) \quad \frac{1}{3} (\lambda_{m_1} + \dots + \lambda_{m_k}) + (k+2) \leq \frac{1}{2} \lambda_{m_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Wir bezeichnen der Reihe nach mit $n_1, n_2, \dots$ diejenigen Indizes m_k , für die (75), (76) und (77) bestehen; mit $q_1, q_2, \dots$ bezeichnen wir der Reihe nach die entsprechenden $\bar{q}_k$ ($n_0 = 1$). Dann gelten

$$(78) \quad \lambda_{n_k}/4 \geq 1 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$(79) \quad \frac{\lambda_{n_k}}{4} \leq A \log^2 \left[\frac{n_{k+1} - n_k}{2q_k} \right] \leq \frac{\lambda_{n_k}}{3} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

und

$$(80) \quad \frac{1}{3} (\lambda_{n_1} + \dots + \lambda_{n_k}) + (k+2) \leq \frac{1}{2} \lambda_{n_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Hilfssatz XV. Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende, von unten konkave Folge mit $\lambda_1 \geq 1$ und $\lambda_n = O(\log^2 n)$. Befriedigt die positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{a_n\}$ die Bedingung

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n^2 \leq C a_{n_{k+1}-1}^2 (n_{k+1} - n_k) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

mit einer positiven Konstante C und gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n = \infty,$$

dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ mit (32) derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda_n \leq \log^2 n$ ($n \geq 2$) vorausgesetzt werden. Es sei

$$p_k = \left[\frac{n_{k+1} - n_k}{2q_k} \right] \quad \text{und} \quad c_k = (\min(1, \lambda_{n_k} (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}-1}^2))^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Aus unseren Annahmen folgt

$$(81) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} = \infty.$$

Durch vollständige Induktion werden wir ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) und eine Folge der einfachen Mengen $E_i (\subseteq [0, 1])$ ($i=1, 2, \dots$) definieren mit folgenden Eigenschaften:

Die Mengen E_i sind stochastisch unabhängig und für $i=1, 2, \dots$ gilt

$$(82) \quad \text{mes}(E_i) = 1/5c_i;$$

Es gilt

$$(83) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1; 1 \leq m < n_1)$$

und für jedes $i=1, 2, \dots$ besteht

$$(84) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_i}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq \frac{\lambda_{n_i}}{3} + 1 \quad (0 \leq x \leq 1; n_i \leq m < n_{i+1});$$

Für jedes $i=1, 2, \dots$ gilt

$$(85) \quad \max_{n_i \leq p \leq q < n_{i+1}} |a_p \varphi_p(x) + \dots + a_q \varphi_q(x)| \leq \sqrt[5]{5} \frac{B}{4\sqrt{A}} \quad (x \in E_i),$$

wobei A und B die im Hilfssatz XIV erwähnten Konstanten bedeuten.

Es sei $\varphi_n(x) = \chi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_1-1$), wo $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann gilt (83). Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k_0}-1; k_0 \geq 1$) und die einfachen Mengen $E_i (\subseteq [0, 1])$ ($i=1, \dots, k_0-1$) schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, und (83), weiterhin (82), (84) und (85) für $i=1, \dots, k_0-1$ erfüllt sind.

Dann gibt es eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle I_r ($r=1, \dots, q$) derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k_0}-1$) in jedem I_r konstant ist und jede Menge E_i ($i=1, \dots, k_0-1$) die Vereinigung gewisser I_r ist. Die zwei Hälften von I_r bezeichnen wir mit I'_r bzw. mit I''_r . Wir wenden den Hilfssatz XIV im Falle $q=q_{k_0}, p=p_{k_0}, c=c_{k_0}$ an. Die entsprechenden Funktionen bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\bar{\varphi}_n(x)$ ($n=1, \dots, 2p_{k_0}q_{k_0}$) bzw. mit $\bar{E}$. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k_0}+n-1}(x) = \sum_{r=1}^q \bar{\varphi}_n(I'_r; x) - \sum_{r=1}^q \bar{\varphi}_n(I''_r; x) \quad (n=1, \dots, 2p_{k_0}q_{k_0})$$

und

$$E_{k_0} = \left(\bigcup_{r=1}^q \bar{E}(I'_r) \right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^q \bar{E}(I''_r) \right).$$

Die Menge E_{k_0} ist einfach und die Mengen E_i ($i=1, \dots, k_0$) sind offensichtlich stochastisch unabhängig. Auf Grund des Hilfssatzes XIV gilt (82) für $i=k_0$. Die

Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n_{k_0} \leq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}$) sind Treppenfunktionen. Auf Grund von (79) gilt

$$(86) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k_0}}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq \frac{\lambda_{n_{k_0}}}{3} \quad (0 \leq x \leq 1; n_{k_0} \leq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}).$$

Auf Grund der Positivität und der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ ergibt sich durch Anwendung des Hilfssatzes XIV, mit Rücksicht auf (78) und (79),

$$(87) \quad \max_{n_{k_0} \leq p \leq q < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}} |a_p \varphi_p(x) + \dots + a_q \varphi_q(x)| \leq \sqrt[5]{5} \frac{B}{4\sqrt{A}} \quad (x \in E_{k_0}).$$

Nach der Definition von n_k gilt $n_k + 2p_{k_0}q_{k_0} < n_{k_0+1} - 1$. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}$) Treppenfunktionen sind, können wir eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle J_s ($s = 1, \dots, \sigma$) angeben derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}$) in jedem J_s konstant ist. Die zwei Hälften von J_s bezeichnen wir mit J'_s bzw. mit J''_s . Wir setzen

$$\varphi_{n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0} + n - 1}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \chi_n(J'_s; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \chi_n(J''_s; x) \quad (n = 1, \dots, n_{k_0+1} - n_{k_0} - 2p_{k_0}q_{k_0}),$$

wobei $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet. Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k_0+1} - 1$) ein orthonormiertes System in $[0, 1]$. Aus (87) folgt, daß (85) für $i = k_0$ besteht. Weiterhin gilt offensichtlich

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1; n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0} \leq m < n_{k_0+1}).$$

Daraus und aus (86) folgt, daß (84) für $i = k_0$ besteht.

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ und die Mengen E_i mit den erwähnten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Gilt $x \in \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E_i}$, dann ist die Reihe (1) wegen (85) divergent. Da die Mengen E_i stochastisch unabhängig sind, ergibt sich aus (81) und (82), durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\text{mes}(\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E_i}) = 1$ ist. Also divergiert die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall. Aus (80), (83) und (84) erhalten wir leicht, daß (32) für dieses System $\{\varphi_n(x)\}$ erfüllt wird.

Satz IV. Es gilt

$$(88) \quad \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq A_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \right)^{1/2}$$

mit einer positiven, absoluten Konstante A_1 . Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende, von unten konkave Folge mit $\lambda_n = O(\log^2 n)$. Befriedigt die positive, monoton

zu 0 strebende Folge $\{a_n\}$ die Bedingung

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n^2 \leq C a_{n_{k+1}-1}^2 (n_{k+1} - n_k) \quad (k=0, 1, \dots)$$

mit einer positiven, absoluten Konstante C , dann gilt

$$(89) \quad \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq A_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \right)^{1/2},$$

wo A_2 eine von der Folge $\{a_n\}$ unabhängige Konstante ist.

BEWEIS. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty$ und $\{q_n(x)\}_1^{\infty}$ bezeichne ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System mit (31). Die n -te Partialsumme der Reihe (1) bzw. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a_n q_n(x)$ bezeichnen wir mit $s_n(x)$ bzw. mit $s_n^*(x)$. Durch Anwendung der Methode von S. KACZMARZ—A. N. KOLMOGOROFF—G. SELIVERSTOFF (siehe z. B. G. ALEXITS [1], S. 172—174) kann

$$(90) \quad |s_n^*(x)| \leq \sqrt{\lambda_n} F_N(x) \quad (0 \leq x \leq 1; n = N, N+1, \dots)$$

mit

$$(91) \quad \int_0^1 F_N(x) dx \leq M \left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \right)^{1/2}$$

bewiesen werden, wobei $M(\geq 1)$ eine absolute Konstante ist. Für $n \geq m \geq N$ setzen wir

$$\begin{aligned} s_n(x) - s_{m-1}(x) &= \sum_{k=m}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\lambda_k} a_k q_k(x) = \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \right) |s_k^*(x) - s_{m-1}^*(x)| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} |s_n^*(x) - s_{m-1}^*(x)|. \end{aligned}$$

Daraus und aus (90) ergibt sich

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s_{m-1}(x)| &\leq \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \right) |s_k^*(x) - s_{N-1}^*(x)| + \\ &+ |s_{m-1}^*(x) - s_{N-1}^*(x)| \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \right) + 2F_N(x) \leq \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \right) |s_k^*(x) - s_{N-1}^*(x)| + 4F_N(x). \end{aligned}$$

Durch einfache Rechnung erhalten wir

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \right) |s_k^*(x) - s_{N-1}^*(x)| \right) dx \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k a_k^2}.$$

Nach (91) ist also

$$\int_0^1 \left(\sup_{N \leq m \leq n} |s_n(x) - s_{m-1}(x)| \right) dx \leq \left(4M + \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right) \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k a_k^2},$$

woraus

$$(92) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n+1}, \dots, a_N) \right) = 0$$

und

$$(93) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_N) \leq 5M \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \right)^{1/2}$$

sich ergeben. Aus (92) erhalten wir durch Anwendung der Bemerkung nach dem Hilfssatz XII $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$. Nach (72) und (93) ergibt sich (88).

Es sei $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 < \infty$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty$ auf Grund des Hilfssatzes XV. Also besteht (89) mit einer Konstante A_2 . Wir werden zeigen, daß A_2 von der Folge $\{a_n\}$ unabhängig bestimmt werden kann. Im entgegengesetzten Falle gibt es Folgen $\{a_n(m)\}_1^{\infty}$ ($m=1, 2, \dots$), die die Forderungen des Satzes IV befriedigen, derart, daß

$$\|\{a_n(m)\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \frac{1}{m^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(m) \lambda_n \right)^{1/2} \quad (m=1, 2, \dots).$$

Man kann $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = 1/m^2$ ($m=1, 2, \dots$) voraussetzen. Dann gilt

$$\sum_{k=N}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}-1}^2(m) \lambda_{n_k} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty; N=1, 2, \dots).$$

Auf Grund dieser Relation und von (71) kann man durch Induktion zwei Indexfolgen $(0=)v_0 < \dots < v_k < \dots$ und $(1 \leq)m_1 < \dots < m_k < \dots$ mit

$$(94) \quad \sum_{k=v_{l-1}}^{v_l-1} (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}-1}^2(m_l) \lambda_{n_k} \geq 1 \quad (l=1, 3, \dots)$$

und

$$a_{n_{v_l}-1}(m_l) \geq a_{n_{v_l+1}}(m_{l+1}) \quad (l=1, 2, \dots)$$

angeben. Es sei $c_{n_{v_l}+n} = a_{n_{v_l}+n}(m_{l+1})$ ($n=0, \dots, n_{v_{l+1}} - n_{v_l} - 1$; $l=1, 2, \dots$) und $c_n = a_n(m_1)$ ($1 \leq n \leq n_{v_1}$). Für die Folge $\{c_n\}$ sind die Bedingungen des Hilfssatzes

XV erfüllt und auf Grund von (94) ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n = \infty$. Durch Anwendung des Hilfssatzes XV ergibt sich also $\{c_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$.

Es seien

$$\{c_n(l)\}_1^{\infty} = \{a_1(m_1), \dots, a_{n_{v_l}-1}(m_1), 0, \dots\},$$

$$\{c_n(l+1)\}_1^{\infty} = \{\overbrace{0, \dots, 0}^{n_{v_l}-1}, a_{n_{v_l}}(m_{l+1}), \dots, a_{n_{v_{l+1}}-1}(m_{l+1}), 0, \dots\}$$

($l = 1, 2, \dots$). Offensichtlich besteht

$$\{c_n\}_1^{\infty} = \sum_{l=1}^{\infty} \{c_n(l)\}_1^{\infty}$$

und

$$\|\{c_n(l)\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \| \{a_n(m_l)\}; \{\lambda_n\} \|_1 \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Auf Grund dieser Relationen erhalten wir

$$\|\{c_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \sum_{l=1}^{\infty} \|\{c_n(l)\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leq \sum_{l=1}^{\infty} \| \{a_n(m_l)\}; \{\lambda_n\} \|_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l^2} < \infty,$$

woraus sich $\{c_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ ergibt. Die Ungleichung (89) besteht also mit einer von der Folge $\{a_n\}$ unabhängigen, positiven Konstante A_2 . Damit haben wir Satz IV bewiesen.

Literatur

- G. ALEXITS, [1] Convergence problems of orthogonal series, *Budapest*, 1961.
 K. TANDORI, [1] Über die Konvergenz der Orthogonalreihen II, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 219–232.
 [2] Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 139–151.
 [3] Über die orthogonalen Funktionen, I., *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), 57–130.
 [4] Über die orthogonalen Funktionen V (Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *Acta Sci. Math. Szeged*, **20** (1959), 1–13.

(Eingegangen am 13. Juli 1964.)