

Cauchy-Gleichungen für Quaternionenfunktionen

Von I. MAKAI (Debrecen)

In 1962, an der 1. Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach hat O. TAUSKY—TODD das folgende Problem gestellt (s. [2]):

„Es sei $f(x)$ eine Funktion, die für Quaternionen oder Cayleysche Zahlen definiert ist und deren Werte reelle Zahlen sind. Es sei weiter $f(xy) = f(x)f(y)$. Wie charakterisiert man die Funktion $f(x) = \text{norm}(x)$?“

Wir haben im Jahre 1963 dieses Problem teilweise beantwortet, was an der 2. Tagung über Funktionalgleichungen (7–11. Oktober 1963) in Oberwolfach vorgetragen wurde (vgl. [3] S. 10). Wir geben hier diese Ergebnisse wieder, die sich auf das Problem von Tausky—Todd und auf das duale Problem beziehen.

§ 1. Einleitung

Üblicherweise nennen wir eine über dem Körper (der reellen oder komplexen Zahlen) $\mathbf{K}$ betrachtete vierdimensionale Algebra $\mathbf{Q}$ einen Quaternionenkörper, wenn ihre Einheiten

$$1, E_1, E_2, E_3 \quad (1 \in \mathbf{K})$$

die Multiplikationsregel

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -1,$$

$$E_1 E_2 = -E_2 E_1 = E_3, \quad E_2 E_3 = -E_3 E_2 = E_1, \quad E_3 E_1 = -E_1 E_3 = E_2$$

erfüllen.

Es seien im folgenden die Elemente des Grundkörpers $\mathbf{K}$ mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben, die Elemente des Quaternionenkörpers $\mathbf{Q}$ mit großen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet. Wir werden die Funktionen auch mit kleinen oder großen Buchstaben bezeichnen, je nachdem ihre Werte in dem Körper $\mathbf{K}$ oder in dem Körper $\mathbf{Q}$ liegen.

Ein beliebiges Element A des Körpers $\mathbf{Q}$ kann man immer in der eindeutigen Form

$$A = a_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

darstellen, wo a_x ($x=0, 1, 2, 3$) Elemente des Körpers $\mathbf{K}$ sind.

Die Komplemente a_0 von A heißt *Skalarteil* oder *Skalar* von A und wird mit $s(A)$ bezeichnet:

$$s(A) = a_0, \quad (s(A) \in \mathbf{K})$$

der Bestandteil $a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$ von A heißt *Vektorteil* oder *Vektor* von A und man schreibt

$$V(A) = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3, \quad (V(A) \in \mathbf{Q})$$

so daß jede Quaternion A folgendermaßen zerlegt werden kann:

$$A = s(A) + V(A).$$

Ist $V(A)=0$, so heißt A eine *skalare Quaternion* oder ein *Skalar*; ist $s(A)=0$, so heißt A eine *vektorielle Quaternion* oder ein *Vektor*.

Unter der *Konjugierten* $\bar{A}$ von A versteht man die Quaternion

$$\bar{A} = s(A) - V(A).$$

Es ist

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A},$$

ferner gelten die Gleichungen

$$s(\bar{A}) = s(A), \quad V(\bar{A}) = -V(A), \quad \bar{\bar{A}} = A.$$

Unter der *Norm* (oder den *absoluten Betrag*) $n(A)$ einer Quaternion A versteht man den folgenden Ausdruck der Komponenten a_0, a_1, a_2, a_3 von A

$$n(A) = +\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

der die Funktionalgleichung

$$(1) \quad n(AB) = n(A)n(B) \quad (A, B \in \mathbf{Q})$$

erfüllt.

Um die *trigonometrische Gestalt der Quaternionen* zu erklären, setzen wir erstens voraus, daß der Vektor $V(A)$ von A von Null verschieden ist, also gilt die Ungleichung

$$n[V(A)] > 0,$$

und wir bilden den Vektor

$$(2) \quad J(A) = n[V(A)]^{-1}V(A).$$

Es sei noch für die Quaternion A durch die Relationen

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \varphi(A) = n(A)^{-1}s(A) \\ \sin \varphi(A) = n(A)^{-1}n[V(A)] \end{cases}$$

ein Winkelmaß erklärt, eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π . So werden die Quaternionen $A, J(A)$ und der Winkel $\varphi(A)$ die Identität

$$(4) \quad A = n(A)[\cos \varphi(A) + J(A) \sin \varphi(A)]$$

erfüllen. Wir erstrecken die Gültigkeit der Identität (4) auch auf den Fall $n[V(A)] = 0$. In diesem Fall ist $J(A)$ ein beliebiger Vektor von $\mathbf{Q}$.

Unter der *Achse der Quaternion* A versteht man den Vektor $J(A)$. Jenen Winkel $\varphi(A)$, der durch die Relationen (3) bestimmt ist, werden wir das *Argument der Quaternion* A nennen.

Quaternionen mit derselben Achse heißen *komplanar*, als Zeichen dafür wird „||“ verwendet.

Für komplanare Quaternionen gilt der folgende

Satz I. (s. [1]) *Zwei Quaternionen A, B sind dann und nur dann komplanar, wenn sie für die Multiplikation des Körpers $\mathbf{Q}$ vertauschbar sind.*

Es seien

$$A = n(A)[\cos \varphi(A) + J \sin \varphi(A)]$$

und

$$B = n(B)[\cos \varphi(B) + J \sin \varphi(B)]$$

zwei komplanare Quaternionen. Die trigonometrische Gestalt ihres Produktes AB ist die folgende:

$$(5) \quad AB = n(A)n(B)\{\cos [\varphi(A) + \varphi(B)] + J \sin [\varphi(A) + \varphi(B)]\}.$$

Die für komplanare Quaternionen geltende Multiplikationsregel (5) werden wir den „*Moirreschen Satz für Quaternionen*“ nennen.

Wir werden noch die Definition des *Winkels* $\angle (J_1, J_2)$ zwischen den Achsen J_1 und J_2 angeben.

Der Winkel $\angle (J_1, J_2)$ sei durch die Relationen

$$0 \leq \angle (J_1, J_2) \leq \pi, \quad \cos \angle (J_1, J_2) = -n(J_1 J_2)^{-1} s(J_1 J_2)$$

erklärt.

Es gilt der folgende

Satz II. (s. [1]) *Eine beliebige Quaternion A kann man immer in der Form*

$$(6) \quad A = n(A)J_1 J_2$$

darstellen, wo J_1, J_2 zwei, die Relationen

$$\angle [J_1, J(A)] = \angle [J_2, J(A)] = \frac{1}{2}\pi, \quad \angle (J_1, J_2) = \pi - \varphi(A)$$

erfüllende, sonst beliebig gewählte Achsen sind.

Bemerkung. Es sei

$$(6) \quad A = n(A)J_1 J_2,$$

so ist

$$(7) \quad \bar{A} = n(A)J_2 J_1.$$

§ 2. Über die Lösungen der Funktionalgleichung $F(ab) = F(a)F(b)$

Es seien a, b beliebige Elemente von $\mathbf{K}$ und wir erklären die Funktion

$$F(x) \quad (x \in \mathbf{K}, F(x) \in \mathbf{Q})$$

durch die Funktionalgleichung

$$(8) \quad F(ab) = F(a)F(b).$$

Um die Funktionalgleichung (8) zu lösen, schließen wir erstens ihre triviale Lösungen

$$(9) \quad F(x) \equiv 0$$

und

$$(10) \quad F(x) \equiv 1$$

aus.

Wegen $ab = ba$ haben wir aus (8) die Gleichheit

$$F(a)F(b) = F(b)F(a),$$

folglich gilt (s. Satz I.)

$$F(a) \parallel F(b) \quad (a, b \in \mathbf{K})$$

für zwei beliebige Elemente a, b . Also hat $F(x)$ eine, von x unabhängige, in einer Lösung von (8) konstante Achse und man kann für jedes Paar von Funktionswerten $F(a), F(b)$ von $F(x)$ den „Moivreschen Satz für Quaternionen“ anwenden.

Wenn die trigonometrische Gestalt der Funktion $F(x)$

$$(11) \quad F(x) = v(x)[\cos^* \varphi(x) + J \sin^* \varphi(x)]$$

ist, dann bekommt man aus (8) wegen (5) die Funktionalgleichung

$$(12) \quad \begin{aligned} v(ab)[\cos^* \varphi(ab) + J \sin^* \varphi(ab)] = \\ = v(a)v(b)\{\cos[\varphi^*(a) + \varphi^*(b)] + J \sin[\varphi^*(a) + \varphi^*(b)]\}, \end{aligned}$$

die in die folgenden Funktionalgleichungen zerfällt:

$$(12.1) \quad v(ab) = v(a)v(b)$$

und

$$(12.2) \quad \varphi^*(ab) \equiv \varphi^*(a) + \varphi^*(b) \pmod{2\pi}.$$

Also kann man das Problem der Auflösung der Funktionalgleichung (8) auf das Problem der *auf dem Körper $\mathbf{K}$ betrachteten* Cauchy-Funktionalgleichungen (12.1) und (12.2) zurückführen. Zusammenfassend haben wir den folgenden

Satz 1. *Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung*

$$(8) \quad F(ab) = F(a)F(b)$$

hat die Gestalt

$$(11) \quad F(x) = v(x)[\cos^* \varphi(x) + J \sin^* \varphi(x)],$$

wo J eine beliebige konstante Achse von $\mathbf{Q}$ ist und die Funktionen $v(x), \varphi^(x)$ sind die Lösungen der Funktionalgleichungen*

$$(12.1) \quad v(ab) = v(a)v(b)$$

und

$$(12.2) \quad \varphi^*(ab) \equiv \varphi^*(a) + \varphi^*(b) \pmod{2\pi}.$$

Bemerkung. Im Falle

$$v(x) \equiv 0,$$

bzw.

$$v(x) \equiv 1, \quad \bar{q}(x) \equiv 0$$

gewinnen wir die Lösung (9), bzw. (10) der Funktionalgleichung (8).

§ 3. Über die Lösungen der Funktionalgleichung $f(AB) = f(A)f(B)$

Wir werden uns noch mit der Auflösung der Funktionalgleichung

$$(13) \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

beschäftigen.

Es sei also die durch Funktionalgleichung (13) gekennzeichnete Funktion

$$f(X) \neq 0 \quad (X \in \mathbf{Q})$$

gegeben. Wegen der Gleichung (13), wegen des Satzes II. und wegen der nachfolgenden Bemerkung bekommen wir für das beliebige Element $Y (\in \mathbf{Q})$:

$$\begin{aligned} f(Y) &= f[n(Y)J_1J_2] = f[n(Y)]f(J_1)f(J_2) = \\ &= f[n(Y)]f(J_2)f(J_1) = f[n(Y)J_2J_1] = f(\bar{Y}), \end{aligned}$$

also haben wir für $f(Y)$ die Relation

$$(14) \quad f(Y) = f(\bar{Y}).$$

Aus (14) folgt die Gleichheit

$$(15) \quad f(Y^2) = f[n^2(Y)] \quad (n^2(Y) = Y\bar{Y})$$

(durch Multiplikation mit $f(Y)$ der beiden Seiten von (14)).

Aber man kann ein beliebiges Element X von $\mathbf{Q}$ als Quadrat eines entsprechend gewählten Elementes Y von $\mathbf{Q}$ angeben. Es sei die trigonometrische Gestalt von X

$$X = n(X)[\cos \varphi(X) + J(X) \sin \varphi(X)],$$

dann erfüllt z. B. eine „Quadratwurzel“

$$(16) \quad Y = n(X)^{1/2} \left[\cos \frac{1}{2} \varphi(X) + J(X) \sin \frac{1}{2} \varphi(X) \right]$$

von X wegen des „Moivreschen Satzes der Quaternionen“ die Gleichheit

$$X = Y^2.$$

Die Gleichung (15) geht mit Hilfe der Relation (16) in die Form

$$(17) \quad f(X) = f[n(X)]$$

über.

Wenn

$$(18) \quad f(X) \equiv 0$$

ist, so haben wir wieder eine Lösung von (13), die auch in der allgemeinen Gestalt (17) der Lösungen von (13) enthalten ist.

Wir haben also den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Die Lösungen $f(X)$ der Funktionalgleichung*

$$(13) \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

können nur von der Norm $n(X)$ ihrer Veränderlichen $X (\in \mathbf{Q})$ abhängen:

$$(17) \quad f(X) = f[n(X)].$$

Bemerkung. Es sei $f(X)$ eine positiv-homogene Funktion erster Ordnung, die der Einheit 1 sich selbst zuordnet. Sie erfüllt also für beliebige skalare $k > 0$ die Funktionalgleichung

$$(19) \quad f(kX) = kf(X)$$

und die Gleichheit

$$(20) \quad f(1) = 1.$$

Wegen $n(X) > 0$ haben wir aus (17), (19) und (20) für $f(X)$ den Ausdruck

$$f(X) = n(X).$$

Die Norm $n(X)$ von X kann man als positiv-homogene multiplikative Funktion erster Ordnung von X mit der Eigenschaft (20) charakterisieren.

Literatur

- [1] *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, B. II, 1. Teil, 2. Hälfte, 11. II. 6–7. Leipzig, 1914–1931.
- [2] *Tagungsbericht der 1. Tagung über Funktionalgleichungen* (2–8. September 1962). Oberwolfach, 1962.
- [3] *Tagungsbericht der 2. Tagung über Funktionalgleichungen* (7–11. Okt. 1963). Oberwolfach, 1963.

(Eingegangen am 23. September 1964.)