

Zerlegungen von Inzidenzstrukturen, I

VON VÁCLAV HAVEL (Brno)

Im weiteren soll der Apparat der Zerlegungstheorie (von O. BORŮVKA, P. DUBREIL und O. ORE) auf einige Grundbegriffe der Inzidenzgeometrie verwendet werden; dabei ist dieser erste Teil den allgemeinen Inzidenzstrukturen gewidmet, während wir im zweiten Teile gewisse Translationsstrukturen behandeln wollen.

Unter einer *Inzidenzstruktur* ¹⁾ werden wir für unsere Zwecke ein Quadrupel $\mathcal{J} = (M_1, M_2, f_1, f_2)$ verstehen, wobei folgende Bedingungen gelten sollen:

- (i) M_1 und M_2 sind disjunkte, wenigstens zweielementige Mengen;
- (ii) f_i ist eine Abbildung von einer Untermenge $\mathcal{D}(M_i) \subseteq \{(x, y) | x, y \in M_i; x \neq y\}$ auf M_j für $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$;
- (iii) $f_i(a, b) = f_i(c, d)$, $b \neq c \Rightarrow f_i(a, b) = f_i(b, c)$ für $i = 1, 2$;
- (iv) $f_i(a, b) = f_i(a, c) \Rightarrow f_j(f_i(a, b), f_i(a, c)) = a$ für $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$.

Für $f_i(a, b) = c$ (wo $i = 1$ oder 2) schreiben wir auch aIc und sagen, dass a und c einander *inzidieren*. Die Elemente von M_1 bzw. M_2 sollen *Punkte* bzw. *Geraden* von $\mathcal{J}$ heißen.

Sind $\mathcal{J} = (M_1, M_2, f_1, f_2)$ und $\mathcal{J}^* = (M_1^*, M_2^*, f_1^*, f_2^*)$ zwei Inzidenzstrukturen, so ist eine *Surjektion* zwischen $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^*$ als ein Paar $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ gemeint, wo σ_i eine Surjektion zwischen M_i und M_i^* ($i = 1, 2$) bedeutet. Eine solche Surjektion σ heißt *inzidenzerhaltend* (oder *Inzidenzsurjektion*), wenn

$$(1) \quad a_1 I a_2, a_1 \in M_1, a_2 \in M_2 \Rightarrow \sigma_1 a_1 I^* \sigma_2 a_2.$$

Weiter wollen wir noch folgende *Bedingung* aussprechen:

$$(2_i) \quad \sigma_j f_i(a, b) = f_j^*(\sigma_i a, \sigma_i b)$$

für jedes $(a, b) \in \mathcal{D}(M_i)$, für welches $(\sigma_i a, \sigma_i b) \in \mathcal{D}(M_i^*)$ gilt. Dabei ist $(i, j) = (1, 2)$ oder $(2, 1)$.

Aus (1) folgt (2_i).

BEWEIS. Es gelte (1) und es sei $(a, b) \in \mathcal{D}(M_i)$ gewählt, wo $(\sigma_i a, \sigma_i b) \in \mathcal{D}(M_i^*)$. Dann ist $a I f_i(a, b)$, $\sigma_i a I^* \sigma_j f_i(a, b)$ und ähnlich $\sigma_i b I^* \sigma_j f_i(a, b)$, so dass $f_j^*(\sigma_i a, \sigma_i b) =$

¹⁾ Hier in etwas schärferer Form als bei G. PICKERT: *Projektive Ebenen*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955, S. 2.

$= \sigma_j f_i(a, b)$. Aus leicht konstruierbaren Gegenbeispielen folgt es, daß die bewiesene Implikation allgemein nicht umkehrbar ist.

Ist $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ eine Surjektion zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$, für welche (2_i) gilt, und gibt es auf jeder Geraden von $\mathcal{I}$ Punkte x, y , welche die Bedingung $\sigma_1 x \neq \sigma_1 y$ erfüllen, dann folgt (1).

BEWEIS. Sind $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$ so gewählt, dass $a_1 I a_2$, dann gibt es ein $b_1 \in M_1, b_1 I a_2, b_1 \neq a_1, \sigma_1 b_1 \neq \sigma_1 a_1$ und nach (2₁) ist also $\sigma_2 f_1(a_1, b_1) = f_1^*(\sigma_1 a_1, \sigma_1 b_1)$. Ähnlicherweise für den Index 2.

Unter einer Zerlegung auf $\mathcal{I}$ verstehen wir ein Paar $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$, wo $\mathcal{Z}_i$ eine Zerlegung²⁾ auf M_i ($i=1, 2$) ist. Eine solche Zerlegung $\mathcal{Z}$ heißt erzeugend bzw. streng erzeugend, wenn für je zwei verschiedene $\mathcal{Z}_i$ -Blöcke X, Y , für welche $X \times Y \delta \mathcal{D}(M_i)$ gilt, ein $Z \in \mathcal{Z}_j$ existiert, so daß $f_i(X, Y) \subseteq Z$ bzw. $f_i(X, Y) = Z$ für $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$. Zu jeder Surjektion $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$ gehört die Zerlegung $\mathcal{Z}^\sigma = (\mathcal{Z}_1^\sigma, \mathcal{Z}_2^\sigma)$ auf $\mathcal{I}$, bei welcher alle $\mathcal{Z}_i^\sigma$ -Blöcke als vollständige Urbilder der Elemente aus M_i^* ($i=1, 2$) definiert sind.

Zu jeder Inzidenzsurjektion $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$ gehört eine erzeugende Zerlegung.

BEWEIS. Es seien X, Y verschiedene $\mathcal{Z}_i^\sigma$ -Blöcke, wobei $X = \sigma_i^{-1} x^*$ und $Y = \sigma_i^{-1} y^*$ für gewisse $x^*, y^* \in M_i^*$. Gilt $X \times Y \delta \mathcal{D}(M_i)$, so folgt $\sigma_j f_i(x, y) = f_i(x^*, y^*)$ für jedes $f_i(x, y)$ mit $x \in X$ und $y \in Y$. Das bedeutet also, daß $f_i(x, y) \in \sigma_j^{-1} f_i^*(x^*, y^*)$. — Wie üblich, war es $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$.

Ist eine Inzidenzstruktur gegeben, so nennen wir eine Punktreihe jede Menge von sämtlichen mit derselben Geraden inzidierenden Punkten; dual definiert man ein Geradenbüschel.

Nun sprechen wir eine Folgerung des vorangehenden Satzes aus:

$\mathcal{Z}^\sigma$ ist dann und nur dann sogar streng erzeugend, wenn σ_1 bzw. σ_2 jedes Geradenbüschel aus $\mathfrak{I}$ auf eine Punktreihe bzw. auf ein Geradenbüschel abbildet.

BEWEIS. Gilt die ausgesprochene Bedingung, so wählen wir zu jeder Geraden $z^* \in M_2^*$ eine Gerade $z_0 \in \sigma_2^{-1} z^*$. Für den veränderlichen Punkt $x^* I z^*$ schöpfen die $\mathcal{Z}_1^\sigma$ -Blöcke $\sigma_1^{-1} x^*$ alle Punkte von z_0 aus. Man kann aber auf eine ersichtliche Weise mittels solchen $\mathcal{Z}_1^\sigma$ -Blöcken alle Geraden aus $\sigma_2^{-1} z^*$ konstruieren. Ähnlich schließt man im Falle der Geradenbüschel, so dass $\mathcal{Z}^\sigma$ streng erzeugend ist. — Es sei $\mathcal{Z}^\sigma$ eine streng erzeugende Zerlegung auf $\mathcal{I}$. Es sei $z^* \in M_2^*$ gegeben. Für jede Wahl von verschiedenen Punkten $a^*, b^* I z^*$ ist $f_1(\sigma_1^{-1} a^*, \sigma_1^{-1} b^*)$ gleich dem $\mathcal{Z}_2^\sigma$ -Block $\sigma_2^{-1} z^*$. Daraus folgt es, dass jede Gerade aus $\sigma_2^{-1} z^*$ mit sämtlichen $\mathcal{Z}_1^\sigma$ -Blöcken $\sigma_1^{-1} x^*, x^* I z^*$ inzidieren muss und die verlangte Bedingung für die Punktreihen folgt schon. Ähnlich wird der Fall der Geradenbüschel untersucht. Zusammen ist also damit der übrige Teil unserer Folgerung bewiesen.

Ist $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ eine erzeugende Zerlegung auf $\mathcal{I}$, so bezeichnen wir mit $f_i/\mathcal{Z}$ die Abbildung der Menge von sämtlichen mit $\mathcal{D}(M_i)$ inzidenten Paaren $(X, Y) \in \mathcal{Z}_i \times \mathcal{Z}_i$ ³⁾ in $\mathcal{Z}_j$, wobei $f_i/\mathcal{Z}(X, Y)$ denselben $\mathcal{Z}_j$ -Block bedeutet, in welchem $f_i(X, Y)$ enthalten ist; $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$.

²⁾ Für die Terminologie der Zerlegungstheorie siehe O. BORŮVKA: Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin 1960. — Für die Inzidenz (also nichtleeres Durchschneiden) von Mengen gebrauchen wir das Symbol δ . Also $A \delta B$ soll bedeuten, dass $A \cap B \neq \emptyset$.

³⁾ Soweit diese Menge nicht leer ist.

Ist $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ eine streng erzeugende Zerlegung auf $\mathcal{I}$, wobei $\mathcal{Z}_i$ mindestens zweiblöckig ist, und existiert die Abbildung $f_i/\mathcal{Z}$ auf $\mathcal{Z}_j$ ($(i, j) = (1, 2), (2, 1)$) dann ist $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, f_1/\mathcal{Z}, f_2/\mathcal{Z})$ eine Inzidenzstruktur.

BEWEIS. Die Bedingungen (i) und (ii) sind erfüllt und es bleibt nur übrig (iii) und (iv) abzuleiten. Es gelte für $i = 1, 2$ $f_i/\mathcal{Z}(A, B) = f_i/\mathcal{Z}(C, D)$, $B \neq C$. Ist $a \in A$ und $b \in B$, so folgt $f_i(a, b) \in f_i/\mathcal{Z}(A, B) = f_i/\mathcal{Z}(C, D)$, so dass $c \in C$ und $d \in D$ existieren, für welche $f_i(a, b) = f_i(c, d)$ gilt. Also folgt auch $f_i/\mathcal{Z}(A, B) = f_i/\mathcal{Z}(C, D)$. Ähnlich schliesst man bei $f_i/\mathcal{Z}(A, B) \neq f_i/\mathcal{Z}(A, C) \Rightarrow f_j/\mathcal{Z}(f_i/\mathcal{Z}(A, B), f_i/\mathcal{Z}(A, C)) = A$ für $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$.

Die Mengen- und Verbandsoperationen sollen im weiteren durch $\cap$, $\cup$ und $\circ$, $\cup$ bezeichnet werden. Wir nennen zwei Zerlegungen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ auf derselben Menge assoziabel⁴⁾, wenn $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ aus demselben $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ -Block stets einander inzidieren. Zwei Zerlegungen $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ auf $\mathcal{I}$ heissen assoziabel, wenn $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2$ assoziabile Zerlegungen sind.

Sind $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ und $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ erzeugende Zerlegungen auf $\mathcal{I}$ und gilt $A, A' \in \mathcal{A}_i$; $B, B' \in \mathcal{B}_i$; $A \delta B$; $A' \delta B'$; $A \times A' \delta \mathcal{D}(M_i)$; $B \times B' \delta \mathcal{D}(M_i) \Rightarrow (A \cap B) \times (A' \cap B') \delta \mathcal{D}(M_i)$ für $i = 1, 2$, so nennen wir das Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ durchschnittsfähig.

Es seien $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ assoziabile durchschnittsfähige erzeugende Zerlegungen. Dann ist auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}_2)$ erzeugend.

BEWEIS. Weiter setzen wir stets $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$. Es seien X und X' verschiedene $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_j$ -Blöcke, wobei $X \times X' \delta \mathcal{D}(M_i)$. Es seien P und P' $\mathcal{A}_i$ -Blöcke, für welche $P \subseteq X$, $P' \subseteq X'$, $P \times P' \delta \mathcal{D}(M_i)$ gilt. Dann gibt es einen $\mathcal{A}_i$ -Block $Q \supseteq f_i(P, P')$ und einen $\mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ -Block $R \supseteq Q$. Für jedes $x \in X$ bzw. $x' \in X'$ existiert ein $B \in \mathcal{B}_i$ bzw. $B' \in \mathcal{B}_i$, so daß $x \in B$ bzw. $x' \in B'$. Aus der vorausgesetzten Assoziabilität folgt also $P \delta B$ und $P' \delta B'$. Wegen $B \times B' \delta \mathcal{D}(M_i)$ gibt es einen $\mathcal{B}_j$ -Block $C \supseteq f_i(B, B')$. Es handelt sich aber um ein durchschnittsfähiges Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, so daß $(P \cap B) \times (P' \cap B') \delta \mathcal{D}(M_i)$, $f_i(P \cap B, P' \cap B') \subseteq Q \cap C$ folgt. Daraus ergibt sich die verlangte Beziehung $C \subseteq R$. — Sind insbesondere $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ streng erzeugend und sind $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}_2$ mindestens zweiblöckig, so ist auch streng erzeugend.

Sind $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ zwei Zerlegungen auf $\mathcal{I}$ und existieren für jedes $y \in M_j$ unter den mit $\{x | x I y\}$ inzidenten $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_i$ -Blöcken zwei ausgezeichnete, die mit einem jedem solchen Block nicht im gemeinsamen $\mathcal{A}_i$ -oder $\mathcal{B}_j$ -Block liegen ($(i, j) = (1, 2), (2, 1)$) so sagen wir, dass $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein ordentliches Paar ist.

Sind $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ streng erzeugende Zerlegungen auf $\mathcal{I}$, die ein ordentliches Paar bilden, dann ist auch $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2)$ streng erzeugend.

BEWEIS. Es sei wieder $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$. Sind X, Y verschiedene $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_i$ -Blöcke, wo $X \times Y \delta \mathcal{D}(M_i)$, dann ist $X = A \cap B$, $Y = A' \cap B'$ für passende $A, A' \in \mathcal{A}_i$ und $B, B' \in \mathcal{B}_i$. Für $A \neq A'$, $B \neq B'$ folgt $f_i(A, A') = P$, $f_i(B, B') = Q$ für gewisse $P \in \mathcal{A}_j$, $Q \in \mathcal{B}_j$ und daraus ergibt sich schließlich $f_i(A \cap B, A' \cap B') = P \cap Q \in \mathcal{A}_j \cap \mathcal{B}_j$. Ist o.B.d.A. $A = A'$, $B \neq B'$, dann übergehen wir von $A \cap B, A \cap B'$ zu weiteren $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_i$ -Blöcken $C \cap D, C' \cap D'$, wo $C, C' \in \mathcal{A}_i$; $D, D' \in \mathcal{B}_i$; $C \neq C'$; $D \neq D'$;

⁴⁾ Vgl. P. DUBREIL, *Algèbre*, Paris 1954, S. 64. Im zitierten Buche von O. BORŮVKA ist die Bezeichnung komplementäre Zerlegungen gebraucht.

$f(A \cap B, A \cap B') = f(C \cap D, C' \cap D')$, was nach Voraussetzung möglich ist. Das Ende des Beweises folgt schon.

Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (M_1, M_2, f_1, f_2)$, für welche $\mathcal{D}(M_i) = M_i \times M_i \setminus \{(x, x) | x \in M_i\}$; $i = 1, 2$ gilt, soll jetzt *gesättigt* heißen. Eine gesättigte Inzidenzstruktur, in welcher vier Punkte *allgemeiner Lage* (d. h. von denen keine drei mit derselben Geraden inzidieren) existieren, heisst bekanntlich *projektive Ebene*.

Es seien $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ erzeugende Zerlegungen auf einer gesättigten Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$. Dann ist auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}_2)$ erzeugend.

BEWEIS. Im weiteren ist, wie üblich, $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$. Es seien X, X' verschiedene $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$ -Blöcke und P, P' zwei $\mathcal{A}_i$ -Blöcke, für welche $P \subseteq X, P' \subseteq X'$ gilt. Dann gibt es einen $\mathcal{A}_j$ -Block $Q \supseteq f_i(P, P')$ und einen $\mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ -Block $C \supseteq Q$. Jedes $x \in X$ bzw. $x' \in X'$ liegt im geeigneten $Y \in \mathcal{A}_i$ bzw. $Y' \in \mathcal{A}_i$, wobei $f_i(x, x') \in f_i(Y, Y')$, wo $f_i(Y, Y')$ im passenden $\mathcal{A}_j$ -Block liegt. Es genügt also zu beweisen, daß für sämtliche $\mathcal{A}_i$ -Blöcke A, A' , für welche $A \subseteq X$ und $A' \subseteq X'$ gilt, der entsprechende $\mathcal{A}_j$ -Block $S \supseteq f(A, A')$ in R enthalten werden muss: In der Tat, sind A, A' solche $\mathcal{A}_i$ -Blöcke, so gibt es die Bindungen⁵⁾ von $\mathcal{A}_i$ -Blöcken

$$(3) \quad P = F_1, F_2, \dots, F_{r-1}, F_r = A;$$

$$(3') \quad P' = F'_1, F'_2, \dots, F'_{r-1}, F'_r = A'$$

in Bezug auf $\mathcal{B}_i$, mit gleicher Länge r (was o.B.d.A. ist), wobei $F_\alpha = F'_\alpha$; $\alpha = 1, \dots, r$. Dann gibt es eine endliche Folge von $\mathcal{A}_j$ -Blöcken

$$(4) \quad H_1, H_2, \dots, H_{r-1}, H_r$$

daß $f(F_\alpha, F'_\alpha) \subseteq H_\alpha$; $\alpha = 1, \dots, r$, wobei $H_1 = Q$ und $H_r = S$. Wir wollen zeigen, daß (4) eine Bindung von $\mathcal{A}_j$ -Blöcken bezüglich $\mathcal{B}_j$ ist. Tatsächlich, weil (3) und (3') Bindungen bezüglich $\mathcal{B}_i$ sind, gibt es verbindende $\mathcal{B}_i$ -Blöcke $G_1, G_2, \dots, G_{r-1}$ bzw. $G'_1, G'_2, \dots, G'_{r-1}$, für welche $G_\beta \neq G'_\beta$; $\beta = 1, \dots, r-1$ gilt, woraus sich die Existenz von $\mathcal{B}_j$ -Blöcken $K_1, K_2, \dots, K_{r-1}$ ergibt, so daß $f(G_\beta, G'_\beta) \subseteq K_\beta$; $\beta = 1, \dots, r-1$. Aus $F_\beta \delta G_\beta$ und $F'_\beta \delta G'_\beta$ folgt also $f(F_\beta, F'_\beta) \delta f(G_\beta, G'_\beta)$ und weiter $H_\beta \delta K_\beta$; $\beta = 1, \dots, r-1$. Ähnlich bekommt man $K_\beta \delta H_{\beta+1}$ für jedes $\beta = 1, \dots, r-1$. Daraus folgt es, daß (4) die gewünschte Bindung ist.

(Eingegangen am 13. April 1965.)

⁵⁾ Der Begriff der Bindung ist im zitierten Buch von O. BORŮVKA, S. 12. eingeführt.