

Über eine Charakterisierung der Hurwitzschen Zetafunktion

Von HANS-JÜRGEN GLAESKE (Jena)

In Verallgemeinerung der Betrachtungen von MAIER ([2]) wurde für die *Hurwitzsche Zetafunktion* in [1] eine *Integrofunktionalgleichung* hergeleitet. Mit Hilfe einer Funktion des ebenen Halbgitters erhielt man

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{s}{2}\right)} \left\{ a^{-u} b^{u-s} \varphi(u, \alpha) \varphi(s-u, \alpha) - \right. \\ (a+b)^{-u} \left[a^{u-s} \varphi\left(u, \frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right) \varphi\left(s-u, \frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right) \right. \\ \left. \left. + b^{u-s} \varphi\left(u, \frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right) \varphi\left(s-u, \frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right) \right] \right\} du = \frac{\varphi(s, \alpha)}{(a+b)^s} \\ \operatorname{Re} s = \sigma > 2, \quad \left| \operatorname{arc} \frac{b}{a} \right| < \pi, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha$$

wobei immer $\varphi(s, \alpha) = \Gamma(s) \zeta(s, \alpha)$ bedeute. Wir wollen (1) unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen lösen. Es sei noch bemerkt, daß (1) für $\alpha=1$ in die bekannte (s. [2]) *Integralgleichung der Riemannschen Zetafunktion*

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{s}{2}\right)} du \varphi(u) \varphi(s-u) [a^{-u} b^{u-s} - (a+b)^{-u} (a^{u-s} + b^{u-s})] = \frac{\varphi(s)}{(a+b)^s} \\ \sigma > 2, \quad \left| \operatorname{arc} \frac{b}{a} \right| < \pi$$

übergeht und das nur für diese Wahl von α eine Integralgleichung entsteht. Wir werden, wie es die Bauart von (1. 2) nahelegt, nur Lösungen suchen, die sich als Mellin-Transformierte einer Funktion $p(z, \alpha)$ schreiben lassen:

$$(3) \quad p(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\varepsilon)} \varphi(u, \alpha) z^{-u} du, \quad \varepsilon > 0$$

Umgekehrt ist

$$(3') \quad \varphi(u, \alpha) = \int_0^{\infty} p(z, \alpha) z^{u-1} du, \quad \operatorname{Re} u > 1.$$

In (1) führen wir den Weg $(1+\eta)$ ein ($0 < \eta < \sigma - 2$) und wenden den Operator $\frac{1}{2\pi i} \int_{(z+\eta+\varepsilon)} ds$ an. Mit (3) entsteht aus (1) die Funktionalgleichung

$$(4) \quad \begin{aligned} & p(a, \alpha) p(b, \alpha) - p\left(a+b, \frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right) p\left(a, \frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right) \\ & - p\left(a+b, \frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right) p\left(b, \frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right) - p(a+b, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Als Problem bleibt die Lösung von (4). Als identisch konstante Lösungen erhält man $p \equiv 0$ und $p \equiv -1$. Erstere führt zu $\varphi = 0$, letztere liefert kein φ .

Wir betrachten 2 Fälle:

FALL 1. $p(z, \alpha)$ sei eine ganze Funktion in z und in α . In (4) setzen wir $a=b$ und lassen diesen Wert gegen Null streben. Wegen der Stetigkeit von p erhält man mit $p(0, \alpha) = h(\alpha)$

$$(5) \quad h^2(\alpha) - 2h^2\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right) - h(\alpha) = 0$$

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung empfiehlt sich die Taylorentwicklung von h bei $\alpha=1$. Mit $\alpha=1$ folgt

$$h(1) = \begin{cases} 0 & (+) \\ -1 & (++) \end{cases}$$

Differentiation von (5) nach α liefert (" ' " bedeutet Ableitung nach dem Argument)

$$2hh'(\alpha) - \frac{8}{3} hh'\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right) - h'(\alpha) = 0.$$

Für $\alpha=1$ ergibt sich in beiden Fällen $h'(1)=0$. Durch fortgesetzte Differentiation (Induktion!) zeigt man, daß $h^{(n)}(1)=0$ für alle $n > 0$ gilt. Damit wird

$$(6) \quad p(0, \alpha) = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Aus (4) liest man ab, daß $(a = -b)$ im ersten Falle $p(z, \alpha) = 0$ gilt. Im zweiten Falle setze man in (4) $b=0$ und es wird

$$(7) \quad p^2\left(a, \frac{\alpha+1}{2}\right) + p(a, \alpha) = 0$$

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung bietet sich wieder die Entwicklung bei $\alpha = 1$ an. Wir berechnen also $\left. \frac{\partial^n p(a, \alpha)}{\partial \alpha^n} \right|_{\alpha=1}$. Aus (6) ersieht man für $\alpha = 1$

$$p(a, 1) = \begin{cases} 0 & (+) \\ -1 & (++) \end{cases}$$

Differentiation von (7) nach α :

$$pp_\alpha \left(a, \frac{\alpha+1}{2} \right) + p_\alpha(a, \alpha) = 0.$$

Der Fall (+) führt, wie man durch fortgesetzte Differentiation sieht, unmittelbar zu dem schon erledigten Fall $p \equiv 0$. Im Falle (++) , der jetzt nur noch betrachtet werden soll, ergibt sich nichts über $p(a, 1)$; wir setzen

$$p_\alpha(a, 1) = q(a), \quad q(a) \text{ ganz.}$$

Durch n -malige Differentiation von (7) ergibt sich

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k p \left(a, \frac{\alpha+1}{2} \right)}{\partial \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^k} \frac{\partial^{n-k} p \left(a, \frac{\alpha+1}{2} \right)}{\partial \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^{n-k}} + 2^n \frac{\partial^n p(a, \alpha)}{\partial \alpha^n} = 0$$

Diese Formel erlaubt für $\alpha = 1$ den Induktionsbeweis für

$$\left. \frac{\partial^n p(a, \alpha)}{\partial \alpha^n} \right|_{\alpha=1} = (-1)^{n-1} q^n(a)$$

Die nichttrivialen Lösungen von (7) haben also die Gestalt

$$(8) \quad p(z, \alpha) = -e^{(1-\alpha)q(z)}, \quad q(z) \neq 0, \quad \text{ganz, beliebig}$$

$q(z) \equiv 0$ ergibt die triviale Lösung $p \equiv -1$.

Zu untersuchen bleibt die Frage, ob (8) auch eine Lösung von (4) liefert. Das wird zu Einschränkungen der Funktion q führen. Da (4) identisch in α gilt, darf man $\alpha = 0$ wählen:

$$\begin{aligned} p(a, 0)p(b, 0) - p \left(a+b, \frac{a}{2a+b} \right) p \left(a, \frac{a}{2a+b} \right) - p \left(a+b, \frac{b}{2b+a} \right) \\ \cdot p \left(b, \frac{b}{2b+a} \right) - p(a+b, 0) = 0. \end{aligned}$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck unter Verwendung von (8) nach Potenzen von b :

$$e^{q(a)} \left\{ \frac{1}{2} q'(a) - \frac{1}{2a} q(a) + e^{q(0)} \left[\frac{1}{a} q(a) + \frac{1}{a} q(0) - q'(a) \right] \right\} \cdot b + O(b^2) = 0$$

Nun kommt nach (6. 8) nur $q(0)=0$ in Frage. Also gilt

$$e^{q(a)} \left[\frac{q(a)}{a} - q'(a) \right] b + O(b^2) = 0$$

Also muß gelten:

$$aq'(a) - q(a) = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$q(a) = ca, \quad c \text{ beliebig komplex.}$$

Man verifiziert sofort, daß (8) mit dieser Funktion q die Funktionalgleichung (4) erfüllt.

Damit haben wir

Satz 1. *Die nichtverschwindenden bezüglich z und α ganzen Lösungen von (4) haben die Gestalt*

$$p(z, \alpha) = -e^{c(1-\alpha)z}.$$

Durch Bestimmung der Mellintransformierten (3') ergibt sich

Satz 1'. *Die einzigen nichtverschwindenden Lösungen $\varphi(u, \alpha)$ von (1), die Mellintransformierte (3') einer bezüglich z und α ganzen Funktion $p(z, \alpha)$ sind, haben die Gestalt*

$$\varphi(u, \alpha) = -\Gamma(u)[(\alpha-1)c]^{-u}, \quad \operatorname{Re}[c(\alpha-1)] > 0.$$

FALL 2. $p(z, \alpha)$ ganz bezüglich α , meromorph bezüglich z . Wir berechnen vorerst $p(z, 1) = p(z)$. Nach (4) gilt mit $\alpha = 1$:

$$(9) \quad p(a+b)[p(a)+p(b)+1] - p(a)p(b) = 0.$$

Es interessieren nur die nichtkonstanten Lösungen. Für diese gilt $p(z) \neq 0, -1$, wie man aus (9) sofort abliest. Deshalb kann man (9) nach $p(a+b)$ auflösen und erhält durch Anwendung des Operators $\frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial b}$ die Differentialgleichung

$$p'(a) + \lambda p(a)(1+p(a)) = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Die Integration ergibt

$$p(z) = \frac{1}{Ae^{\lambda z} - 1}.$$

Durch Einsetzen in (9) erhält man $A=1$.

Es sei bemerkt, daß (9) das Analogon von (4) für die Integralgleichung (3) der Riemannschen Zetafunktion ist. Man hat also

Satz 2. *Die nichtkonstanten meromorphen Lösungen von (9) haben die Gestalt*

$$(10) \quad p(z) = \frac{1}{e^{\lambda z} - 1}, \quad \lambda \neq 0.$$

Durch Aufsuchen der Mellintransformierten erhält man

Satz 2'. Die Lösungen $\varphi(u)$ von (2), die Mellintransformierte (3) (mit $\alpha=1$) einer meromorphen Funktion $p(z)$ sind, haben die Gestalt

$$\varphi(u) = \Gamma(u) \zeta(u) \lambda^{-u}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Zur Lösung im allgemeinen Fall spezialisieren wir (4) mit $a=b$ und erhalten wieder eine notwendige Bedingung für das Bestehen von (4):

$$p^2(a, \alpha) - 2p\left(2a, \frac{2\alpha+1}{3}\right)p\left(a, \frac{2\alpha+1}{3}\right) - p(2a, \alpha) = 0$$

Wegen der Gleichheit der zweiten Argumente für $\alpha=1$ empfiehlt sich wieder eine Potenzreihenentwicklung um $\alpha=1$, die wir wegen (10) in der Form

$$p(a, \alpha) = \frac{1}{e^{\lambda a} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(a)}{n!} (1-\alpha)^n$$

ansetzen. Es bleibt die Bestimmung der meromorphen Funktionen $h_n(a)$. Setzt man die Reihe in die Funktionalgleichung ein, so ergibt sich nach Cauchyscher Produktbildung:

$$(*) \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{h_{n-k}(a)}{k!(n-k)!} \left[(e^{\lambda a} + 1) h_k(a) - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n h_k(2a) \right] - (e^{\lambda a} - 1) \frac{h_n(2a)}{n!} \right\} = 0$$

Für $n=0$ erhalten wir

$$[h_0(a)(e^{\lambda a} + 1) - 2h_0(2a)]h_0(a) - (e^{\lambda a} - 1)h_0(2a) = 0.$$

Der Ansatz $h_0(a) = \sum_{m=-k}^{\infty} a_m a^m$ liefert als Koeffizient der Potenz a^{-2k}

$$a_{-k}^2 (1 - 2^{-k}) = 0$$

Damit wird $a_{-k} = 0$ und, da k beliebig war, $a_{-m} = 0$ ($m = 1, 2, \dots, k$); d. h. $h_0(a)$ ist regulär bei $a=0$. Die weiteren Koeffizienten ergeben sich aus der Bemerkung,

daß $\frac{h_0(a)}{e^{\lambda a} - 1} = p(a, 1)$ gilt und (10). Damit wird

$$h_0(a) = 1$$

Für $n=1$ erhält man die Funktionalgleichung

$$h_1(2a) = 2h_1(a).$$

Ein Potenzreihenansatz wie im Falle $n=0$ liefert sofort

$$h_1(a) = \mu a, \quad \mu \neq 0 \quad \text{beliebig komplex.}$$

Für $n=2$ erhält man aus (*)

$$h_2(a) \left[\frac{5}{9} + e^{\lambda a} \right] + h_2(2a) \left[\frac{1}{18} - \frac{e^{\lambda a}}{2} \right] + a^2 \mu^2 \left[e^{\lambda a} - \frac{7}{9} \right] = 0$$

Hier liefert ein entsprechender Ansatz

$$h_2(a) = \mu^2 a^2.$$

Das legt die Vermutung nahe:

$$h_m(a) = \mu^m a^m \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Den Beweis führt man durch vollständige Induktion. Damit haben wir

$$(11) \quad p(z, \alpha) = \frac{e^{(1-\alpha)\mu z}}{e^{\lambda z} - 1}, \quad \lambda, \mu \neq 0$$

Man verifiziert sofort, daß diese Lösungen auch (4) erfüllen. Das liefert den

Satz 3. Die bezüglich z meromorphen und bezüglich α ganzen Lösungen von (4) sind von der Form (11).

Durch Mellinsche Integralumkehr ergibt sich

Satz 3'. Die Lösungen $\varphi(u, \alpha)$ von (1), die Mellintransformierte (3') einer bezüglich α ganzen und bezüglich z meromorphen Funktion $p(z, \alpha)$ sind, haben die Gestalt

$$\varphi(u, \alpha) = \Gamma(u) \zeta \left(u, 1 - \frac{(1-\alpha)\mu}{\lambda} \right) \lambda^{-u}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} \frac{1-\alpha}{\lambda} \mu > 0.$$

In diesem Sinne kann die Integrofunktionalgleichung (1) zur Charakterisierung von $\zeta(u, \alpha)$ Verwendung finden. Die Lösung $\varphi(u, \alpha) = \Gamma(u) \zeta(u, \alpha)$ erhält man etwa durch Vorschreiben der Residuen bei $u=0$ und $u=1$; d. h. durch die Forderungen

$$\varphi(u, \alpha) = \frac{1}{u-1} + O(1) \quad \text{für } u \rightarrow 1$$

$$\varphi(u, \alpha) = \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{u} + O(1) \quad \text{für } u \rightarrow 0.$$

Dann werden $\lambda = \mu = 1$.

Literatur

- [1] H. J. GLAESKE, Über Funktionalgleichungen von Gitterfunktionen, *Math. Nachr.* **32** (1966) 95—105.
- [2] W. MAIER, Gitterfunktionen der Zahlenebene, *Math. Ann.* **113** (1936), 363—379.

(Eingegangen am 9. Juli 1965.)