

Über die Iteration reeller Funktionen II.

Von BÉLA BARNA (Debrecen)

Dieser Teil II. enthält lediglich zwei Ergänzungen zum Teil I. ¹⁾ Die erste ergänzende Bemerkung bezieht sich auf *die singulären Intervalle* ²⁾; es gilt nämlich die Verallgemeinerung des Satzes 7. (I. p. 32.):

Satz 9. *Gibt es in I ein singuläres Intervall, so existiert ein Intervall $[a, b]$ (in I), welches aus Fixpunkten gleicher Ordnung besteht.*

BEWEIS. Es folgt aus dem singulären Charakter eines Punktes x (s. I. p. 28.), daß in der Iterationsfolge (x_n) nur endlich viele verschiedene Punkte auftreten. Es gibt also Indexpaare mit $x_m = x_n$, d. h.

$$(1) \quad f_m(x) = f_n(x) \quad (m \neq n).$$

In einem singulären Punkt x nehmen also — für gewisse m und n — die Funktionen f_m und f_n denselben Wert an. Umgekehrt, es folgt aus (1), daß x ein singulärer Punkt ist ³⁾.

Es sei jetzt $[C, D]$ ein singuläres Intervall, und bezeichnen wir mit $M_1, M_2, \dots, \dots, M_v, \dots$ die Mengen der Gleichungswurzeln (1) in irgendeiner Reihenfolge. Ist M_1 nirgends dicht in $[C, D]$, so existiert in diesem ein Teilintervall $[C_1, D_1]$, welches keinen Punkt aus M_1 enthält. Ist M_2 nirgends dicht, so hat $[C_1, D_1]$ einen Teil $[C_2, D_2]$, welcher keinen Punkt aus M_2 enthält. So fortfahrend erhalten wir eine unendliche Folge von geschlossenen Intervallen:

$$I \supseteq [C, D] \supseteq [C_1, D_1] \supseteq \dots [C_v, D_v] \supseteq \dots$$

Gehört ein Punkt dem (nicht-leeren) Durchschnitt dieser Intervalle an, so folgt aus der Konstruktion, daß er kein singulärer Punkt ist. Dies steht aber im Gegensatz zu dem singulären Charakter des Intervalls $[C, D]$. Es gibt also unter den Mengen M_v wenigstens eine, die nicht nirgends dicht ist, d. h. es existiert in $[C, D]$ ein Teilintervall Δx , in dem eins dieser M_v , z. B. $M_{\bar{v}}$ überall dicht ist. Da aber $M_{\bar{v}}$ — wegen

¹⁾ B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I. *Publ. Math. Debrecen* 7 (1960), 16—40. — Die bei Teil I. eingeführten Bezeichnungen (s. hauptsächlich I. p. 17, Fußnote 7) behalten wir in diesem Aufsatz bei.

²⁾ I. p. 30.

³⁾ Dies bedeutet, daß — bei graphischer Darstellung — die Menge der singulären Punkte durch Projizierung der gemeinsamen Punkten der Funktionenkurven $y = f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) auf die Abszissenachse entsteht. — Die Behauptung folgt eigentlich aus der Tatsache, daß die Vereinigung abzählbar vieler, nirgends dichter Mengen auch eine nirgends dichter Menge ist.

der Stetigkeit der Funktionen f_n — eine geschlossene Menge ist, gilt für ein gewisses (dem $\bar{v}$ entsprechenden) Indexpaar m, n

$$f_m(x) = f_n(x)$$

in jedem Punkt des Intervalls Δx . Es sei $f_p(x)$ die erste iterierte Funktion von $f(x)$, die sich in Δx durch Iteration wiederholt, und $f_{p+\mu}(x)$ die erste Wiederholung von $f_p(x)$, d. h.

$$f_{p+1}(x) \neq f_p(x), \dots, f_{p+\mu-1}(x) \neq f_p(x)$$

$$(2) \quad f_{p+\mu}(x) = f_p(x), \quad x \in \Delta x.$$

Hier ist

$$f_{p+\mu}(x) = f_\mu(x_p), \quad f_p(x) = x_p,$$

also gilt

$$f_\mu(x_p) = x_p, \quad \text{wenn } x \in \Delta x, \text{ d. h. wenn } x_p \in (\Delta x)_p.$$

Dies bedeutet, daß

$$(3) \quad f_\mu(x) = x$$

für

$$(4) \quad x \in [a, b] = (\Delta x)_p$$

gilt, d. h. das Intervall $[a, b]$ besteht aus Fixpunkten μ -ter Ordnung.

Es folgt weiter nach (3) und (4) der

Satz 10. *Gibt es ein singuläres Intervall, so kommt unter den Iterierten der Grundfunktion $f(x)$ — wenigstens in einem Intervall — die Funktion x vor.*

Aus dem vorigen Beweis folgert man noch, daß es in jedem singulären Intervall $[C, D]$ Teilintervalle $[c, d] = \Delta x$ gibt so, daß in jedem solchen Teilintervall — nach (2) —

$$f_{p+k\mu}(x) = f_p(x), \quad x \in [c, d] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

besteht. So folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{p+r+k\mu}(x) = f_{p+r}(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1,$$

d. h. man kann die Iterationsfolge $f_n(x)$ in μ verschiedenen konvergenten Teilfolgen

$$f_{\mu k+r}(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

zerlegen, und eine jede dieser Teilfolgen konvergiert — als eine Folge gleicher Elemente — zu einer der Funktionen $f_{v+r}(x)$. So haben wir bewiesen den

Satz 11. *In einem singulären Intervall gibt es Teilintervalle, in denen der Grenzwert einer beliebigen konvergenten Teilfolge der Iterationsfolge (x_n) von dem Anfangspunkt x_0 abhängt.*

Die zweite Ergänzung bezieht sich auf die Frage, (siehe I. p. 37.) ob es Funktionen gibt, bei denen die Menge der irregulären Punkte ein Intervall besitzt. Auf diese Frage können wir eine bejahende Antwort geben. Wir möchten hier eine Konstruktion für solche Funktionen zeigen.

Nehmen wir in dem Intervall $(0, 1)$ eine beliebige, streng monoton abnehmende Punktfolge

$$1 > A > B_0 > B_1 > \dots > B_{k-1} > B_k > \dots$$

(siehe die beiliegende Figur) und in jedem der $(A, 1)$ und (B_k, B_{k-1}) ($k=1, 2, \dots$) je eine unendliche Folge von disjunkten, geschlossenen Intervallen. Wir wollen die einzelnen Elemente dieser Intervallfolgen mit Ordnungszahlen (Indizes) versehen, und zwar bekommen die von links nach rechts nacheinander folgenden Intervalle

in $(A, 1)$ die Indizes $0, 2, 5, 9, 14, \dots$,

in (B_1, B_0) die Indizes $1, 4, 8, 13, \dots$,

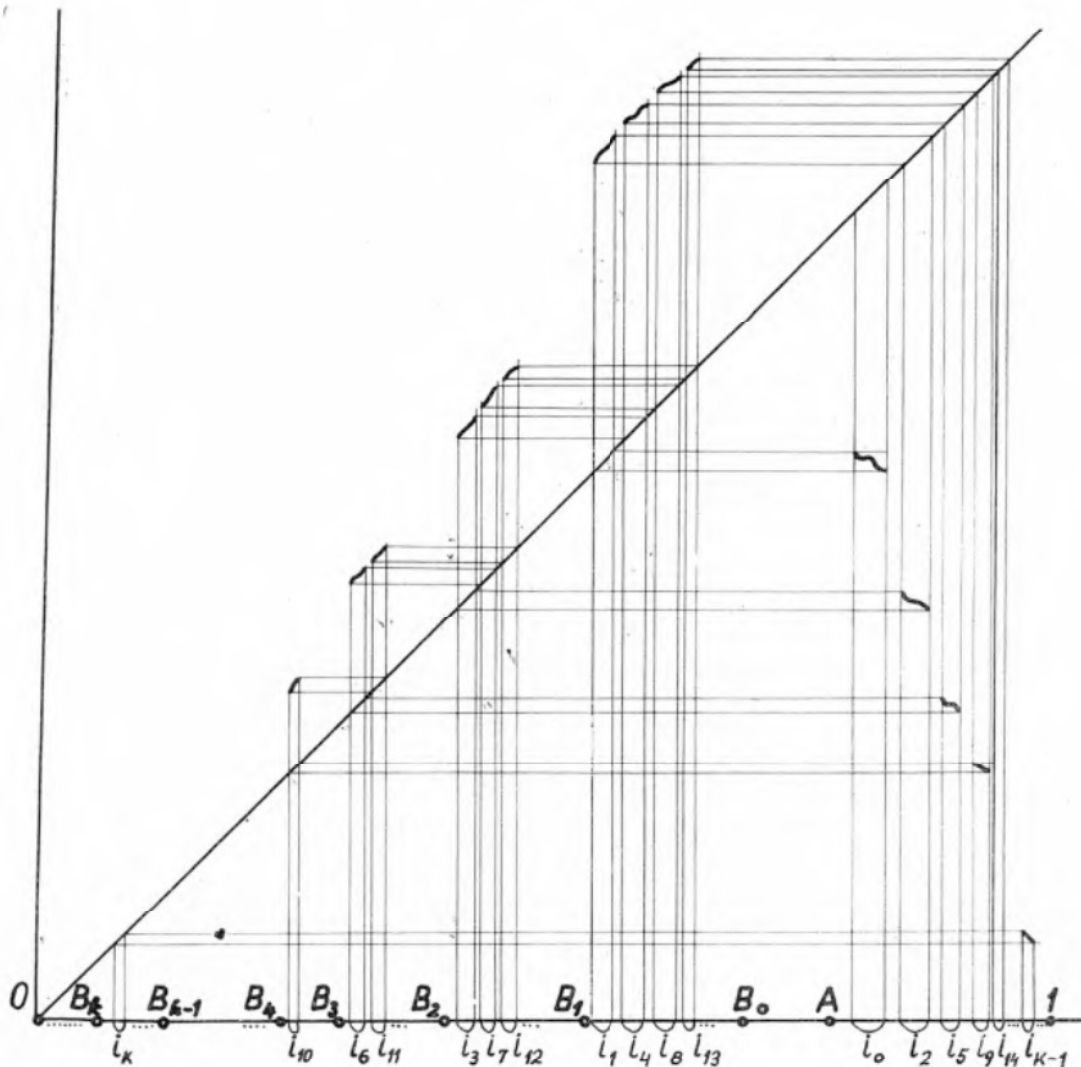
in (B_2, B_1) die Indizes $3, 7, 12, \dots$,

in (B_3, B_2) die Indizes $6, 11, \dots$

.....

in (B_k, B_{k-1}) die Indizes $K, K+k+2, K+2k+5, K+3k+9, \dots$;

$$K = \frac{k(k+1)}{2}.$$



Jetzt definieren wir die Funktion $f(x)$ so, daß durch sie das Intervall i_n auf i_{n+1} abgebildet wird; zwischen den numierten Intervallen können wir $f(x)$ beliebig definieren. Bei der Iteration der so entstehenden Grundfunktion $f(x)$ ist jedes der Intervalle i_n ein irreguläres Intervall.

Um dies einzusehen, bemerken wir, daß i_n die Iterierte n -ter Ordnung von i_0 ist. Da diese iterierten Intervalle keine gemeinsamen Punkte haben, sind die iterierten Punkte x_n eines beliebigen Punktes x_0 ($x_n \in i_n$) paarweise verschiedene Punkte. Es ist also x_0 kein singulärer Punkt. Es liegt ferner in jedem Intervall (B_k, B_{k-1}) eine streng monoton zunehmende unendliche Teilfolge von (x_n) , und diese haben also je einen Häufungspunkt. So gibt es unendlich viele Häufungspunkte der Iterationsfolge (x_n) , woraus folgt, daß x_0 ein irregulärer Punkt ist. Da aber x_0 im Anfangsintervall i_0 beliebig gewählt wurde, ist jeder Punkt dieses Intervalls irregulär. So folgt die Irregularität der Intervalle i_n .

(Eingegangen am 10. August 1965.)