

Beitrag zu der Arbeit „Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III“

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit $\lambda_1 \equiv 1$. $M(\{\lambda_n\})$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$(1) \quad \sum a_n \varphi_n(x)$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ mit

$$(2) \quad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{v(x)} \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \right) dx \equiv 1$$

in $[0, 1]$ fast überall besteht, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit natürlichen Werten gebildet ist. Für eine Folge $\{a_n\}_1^N$ wird

$$I(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) = \sup \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| \right)^2 dx$$

gesetzt, wobei das Supremum für alle in $[0, 1]$ orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) gebildet wird. Für eine unendliche Folge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| = \lim_{N \rightarrow \infty} I(\{\lambda_n\}; a_1, \dots, a_N).$$

Man kann die folgende Behauptung beweisen:

Satz. Es sei $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gilt dann und nur dann, wenn $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| < \infty$.

Aus den Resultaten der im Titel zitierten Arbeit ¹⁾ folgt, daß $M(\{\lambda_n\})$ mit der Norm $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|$ ein Banachraum ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir gewisse Vorbereitungen.

Offensichtlich gilt

$$(3) \quad I(\{\lambda_n\}; c_1 + d_1, \dots, c_N + d_N) \equiv I(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) + I(\{\lambda_n\}; d_1, \dots, d_N).$$

¹⁾ K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 127—157.

Hilfssatz I. Es sei $I(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \cong 8\sqrt{2}$. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen derart, daß

$$\sup \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{v(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{v(x)} \psi_k(x) \psi_k(t) \right| dt \right) dx \leq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit natürlichen Werten $1 \leq v(x) \leq N$ gebildet ist, und

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \psi_i(x) + \dots + c_j \psi_j(x)| \leq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteq [0, 1])$ mit $\text{mes}(E) \geq 1/4$ besteht.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe loc. cit. 1), Hilfssatz X.)

Hilfssatz II. Es sei $I(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \cong 8\sqrt{2}$ und $\alpha > 1$. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\bar{\psi}_n(x)$ ($n=1, \dots, N$) derart, daß

$$\sup \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{v(x)} \bar{\psi}_k(x) \bar{\psi}_k(t) \right| dt \leq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit natürlichen Werten $1 \leq v(x) \leq N$ gebildet ist, und

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \bar{\psi}_i(x) + \dots + c_j \bar{\psi}_j(x)| \leq \sqrt{\alpha}$$

in einer einfachen Menge $\bar{E}(\subseteq [0, 1])$ mit $\text{mes}(\bar{E}) \geq 1/4\alpha$ besteht.

Für die Funktionen

$$\bar{\psi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha} \psi_n(\alpha x) & (0 \leq x \leq 1/\alpha), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, N$) sind alle Bedingungen des Hilfssatzes II erfüllt, wobei $\psi_n(x)$ die im Hilfssatz I erwähnten Funktionen bezeichnen.

Hilfssatz III. Es sei $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Ist für eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ $I(\{\lambda_n\}; \underbrace{0, \dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \cong 8\sqrt{2}$, dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) mit (2) derart, daß

$$(4) \quad \lim_{i, j \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=i}^j a_n \varphi_n(x) \right| = \infty$$

fast überall gilt.

BEWEIS DES HILFSSATZES III. Durch vollständige Induktion definieren wir eine Indexfolge $(0 =) k(0) < \dots < k(i) < \dots$, ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) und eine Folge von einfachen Mengen $F_i(\subseteq [0, 1])$ ($i=1, 2, \dots$) (d. h. F_i ist die Vereinigung endlichvieler Intervalle) mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes i gilt

$$(5) \quad \lambda_{n_{k(i)}+1}^{-1} + \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} (M(j) + 1)\right) \leq 1/8,$$

wobei

$$M(j) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j+1)}+1} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt$$

ist.

Die Mengen F_i sind stochastisch unabhängig und für jedes i gilt

$$(6) \quad \text{mes}(F_i) \geq 1/4i.$$

Es besteht

$$(7) \quad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{v(x)} \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \right) dx \leq 1/8,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit natürlichen Werten $1 \leq v(x) \leq n_{k(1)}$ gebildet ist.

Für jedes i gelten

$$(8) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^r \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt = 1 \quad (n_{k(i)} < r \leq n_{k(i+1)})$$

und

$$(9) \quad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq 3/4,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit natürlichen Werten $n_{k(i)} < v(x) \leq n_{k(i+1)}$ gebildet wird.

Für jedes i gilt

$$(10) \quad \max_{n_{k(i)} < p \leq q \leq n_{k(i+1)}} |a_p \varphi_p(x) + \dots + a_q \varphi_q(x)| \leq \sqrt{i} \quad (x \in F_i).$$

Es sei $n_{k(1)}$ die kleinste positive ganze Zahl mit $\lambda_{n_{k(1)}+1}^{-1} \leq 1/8$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{8} \chi_n(8x) & (0 \leq x \leq 1/8), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, n_{k(1)}$), wobei $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann gilt (7). Es sei $i_0 (\geq 0)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, dass die Indizes $k(i)$ ($i=1, \dots, i_0+1$), die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+1)}$) und die einfachen Mengen F_i ($i=1, \dots, i_0$) schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, (7), weiterhin (5) für $i=1, \dots, i_0+1$, (6), (8), (9) und (10) für $i=1, \dots, i_0$ erfüllt sind.

Dann können wir eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle I_s ($s=1, \dots, \sigma$) angeben derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+1)}$) in jedem I_s konstant ist und jede Menge F_i ($i=1, \dots, i_0$) die Vereinigung gewisser I_s ist. Die zwei Hälften von I_s bezeichnen wir mit I'_s bzw. mit I''_s . Wir wenden den Hilfssatz II mit der Folge $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_{k(i_0+1)}+1}$ mit $\alpha = \sqrt{i_0+1}$ und mit den Koeffizienten $0, \dots, 0, a_{n_{k(i_0+1)}+1}, \dots, a_{n_{k(i_0+1)}+1}$ an. Die entsprechenden Funktionen bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\bar{\psi}_n(x)$ ($n = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+1)} + 1$), bzw. mit E . Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)}+l}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I'_s; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I''_s; x)$$

($l=1, \dots, n_{k(i_0+1)}+1 - n_{k(i_0+1)}$) und

$$F_{i_0+1} = \left(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I'_s) \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I''_s) \right),$$

wobei in allgemeinen für ein endliches Intervall $I=[a, b]$

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, und für eine Menge $H(\subseteq [0, 1])$ $H(I)$ die Bildmenge von H bei der Transformation $y=(b-a)x+a$ bedeutet.

Es sei $n_{k(i_0+2)}$ die kleinste natürliche Zahl mit $n_{k(i_0+2)} > n_{k(i_0+1)}$, für die (5) im Falle $i=i_0+2$ besteht. Es sei $J_1, \dots, J_\varrho$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+1)+1}$) in jedem J_r konstant ist. Die zwei Hälften von J_r bezeichnen wir mit J'_r bzw. mit J''_r . Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)}+1+l}(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \chi_l(J'_r; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \chi_l(J''_r; x) \quad (l=1, \dots, n_{k(i_0+2)} - n_{k(i_0+1)} + 1),$$

wobei $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet.

Offensichtlich sind die einfachen Mengen F_i ($i=1, \dots, i_0+1$) stochastisch unabhängig und (6) ist auch für $i=i_0+1$ erfüllt; weiterhin sind für die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($1 \leq n \leq n_{k(i_0+2)}$) (7), (8), (9) und (10) auch für $i=i_0+1$ erfüllt. Die Folge $\{k(i)\}_1^\infty$, das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ und die Mengenfolge $\{F_i\}_1^\infty$ ergibt sich durch Induktion.

Auf Grund von (5), (7), (8) und (9) ergibt sich durch einfache Rechnung (siehe loc. cit. ¹⁾, Beweis des Hilfssatzes XI), daß für das System $\{\varphi_n(x)\}$ (2) erfüllt ist. Auf Grund von (10) erhalten wir, daß (4) in der Menge $\varliminf_{i \rightarrow \infty} F_i$ besteht. Da die Mengen F_i stochastisch unabhängig sind und (6) für jedes i besteht, ergibt sich unter Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\text{mes} \left(\varliminf_{i \rightarrow \infty} F_i \right) = 1$ ist.

Damit haben wir Hilfssatz III bewiesen.

Hilfssatz IV. Es sei $\lambda_n \rightarrow \infty$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gilt dann und nur dann, wenn

$$(11) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} I(\{\lambda_n\}; 0, \underbrace{\dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_N) \right) = 0$$

ist.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe loc. cit. ¹⁾, Hilfssatz XII.)

BEWEIS DES SATZES. Ist $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| = \infty$, dann gibt es auf Grund von (3) eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit $I(\{\lambda_n\}; 0, \underbrace{\dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geq 8\sqrt{2}$

($k=0, 1, \dots$). Unter Anwendung des Hilfssatzes III ergibt sich $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$.

Es sei nun $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| < \infty$. Wäre (11) nicht erfüllt, dann existierte eine positive Zahl σ und eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$I(\{\lambda_n\}; 0, \underbrace{\dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geq \sigma.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\sigma \geq 8\sqrt{2}$ annehmen. Unter Anwendung des Hilfssatzes III ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ mit (2) derart, daß (4) fast überall besteht. Für dieses System ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right) dx = \infty,$$

was aber $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| < \infty$ widerspricht. Also ist (11) erfüllt, woraus $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ folgt.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Auf Grund des Satzes und des Hilfssatzes IV kann man auch die folgende Behauptung beweisen:

Ist $\lambda \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) und $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$, dann gibt es eine positive, nach 0 strebende Folge $\{\mu_n\}$ derart, daß $\{\mu_n a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$ gilt.

(Eingegangen am 27. Dezember 1965.)