

Шрейерово расширение квазигрупп

Ф. ФЕНЬВЕШ (Дебрецен)*)

§ 1. Введение

В настоящей работе решается проблема шрейерова расширения в случае любых квазигрупп. Работа присоединяется к исследованиям Альберта [2] о расширении луп. В дальнейшем увидим, что полученные результаты можно считать обобщением прежних результатов в этом направлении.

Ниже введём обозначения и понятия, а также основные факты, имеющие место относительно тех понятий, которыми будем пользоваться в работе.

Квазигруппа $(G, \cdot)$ называется I-квазигруппой, если она обладает идемпотентом, т. е. таким элементом p , что $pp = p$. Квазигруппа с единицей называется лупой.

Из перестановок (взаимно однозначные отображения на себя) $(G, \cdot)$ самыми важными будут следующие: при любом $g (\in G)$ обозначим отображения $xL_g \stackrel{\text{def}}{=} g \cdot x$ и $xR_g \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot g$ ($x \in G$) через L_g и R_g . L_g^{-1} и R_g^{-1} означают обратные перестановки к L_g и R_g . Значит, xL_g^{-1} и xR_g^{-1} означают соответственно элементы y и z из G , для которых выполняется соответственно $yL_g = x$ и $zR_g = x$. Для обозначения элементов xL_g^{-1} и xR_g^{-1} будем пользоваться также символами $g \backslash x$ и x/g .

Однозначное отображение φ квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на квазигруппу $(G, \circ)$ называем гомоморфизмом, если для любого элемента $g, h (\in \mathcal{G})$ выполняется $(g \cdot h)\varphi = g\varphi \circ h\varphi$. Ясно, что тогда также $(xL_y^{-1})\varphi = x\varphi L_{y\varphi}^{-1}$ и $(xR_y^{-1})\varphi = x\varphi R_{y\varphi}^{-1}$.

$(K, \circ)$ называется изотопом $(G, \cdot)$ (символически: $(G, \cdot) \simeq (K, \circ)$), если существуют такие взаимнооднозначные отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ квазигруппы $(G, \cdot)$ на квазигруппу $(K, \circ)$, что для всех $x, y (\in G)$ выполняется $x\varphi_1 \circ y\varphi_2 = (x \cdot y)\varphi_3$. Если $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ тогда общее отображение называется изоморфизмом (символически: $(G, \cdot) \cong (K, \circ)$). Другим специальным случаем изотопизма является главный изотопизм, при котором $K = G$ и φ_3 является тождественным отображением.

Если некоторый главный изотоп $(G, \circ)$ квазигруппы $(G, \cdot)$ является I-квазигруппой, то $(G, \circ)$ называется главным I-изотопом.

*) F. Fenyves (Debrecen)

§ 2. Нормальные подквазигруппы

Пусть $(\mathcal{G}, \cdot)$ и $(G, \circ)$ — две квазигруппы и имеет место гомоморфизм $\varphi: (\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow (G, \circ)$. Если $(G, \circ)$ имеет идемпотент p , то множество тех элементов g из $(\mathcal{G}, \cdot)$, для которых выполняется $g\varphi = p$, называется (одним) ядром гомоморфизма φ и обозначим через Γ_p . Если же $(G, \circ)$ не имеет идемпотентов, тогда говорим, что гомоморфизм φ не имеет ядра.

Теорема 1. Пусть φ какое-либо гомоморфное отображение квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на I -квазигруппу $(G, \circ)$. Тогда (любое) ядро Γ_p гомоморфизма φ является такой подквазигруппой квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$, которая для произвольных элементов $x, y \in \mathcal{G}$ и любого фиксированного элемента $h (\in \Gamma_p)$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$(+)\begin{cases} (i) & xR_h^{-1} \cdot \Gamma_p = \Gamma_p \cdot xL_h^{-1}, \\ (ii) & (\Gamma_p \cdot xL_h^{-1})y = \Gamma_p[(xy)L_h^{-1}], \\ (iii) & x(yR_h^{-1} \cdot \Gamma_p) = [(xy)R_h^{-1}]\Gamma_p. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in \Gamma_p$. Тогда $(g_1 g_2)\varphi = (g_1 \varphi) \circ (g_2 \varphi) = p \circ p = p$, то-есть $g_1 \cdot g_2 \in \Gamma_p$. Пусть теперь $g_1 \cdot x = g_2$. Тогда $(g_1 \varphi) \circ (x\varphi) = g_2 \varphi$, то-есть $p \circ (x\varphi) = p$, откуда $x\varphi = p$, значит $x \in \Gamma_p$. Точно так же $y \cdot g_1 = g_2 \Rightarrow y \in \Gamma_p$. Значит $(\Gamma_p, \cdot)$ является подквазигруппой в $(\mathcal{G}, \cdot)$.

Пусть h произвольный фиксированный элемент Γ_p .

Для доказательства равенства (i) сначала покажем, что $xR_h^{-1} \cdot \Gamma_p \subseteq \Gamma_p \cdot xL_h^{-1}$. Для произвольного элемента $xR_h^{-1} \cdot g (\in xR_h^{-1} \cdot \Gamma_p)$ существует такой $y (\in \mathcal{G})$, что $xR_h^{-1} \cdot g = y \cdot xL_h^{-1}$. Отсюда $(xR_h^{-1} \varphi) \circ (g\varphi) = (y\varphi) \circ (xL_h^{-1} \varphi)$. Так как $g\varphi = p$, то имеет место $(x\varphi R_h^{-1}) \circ p = (y\varphi) \circ (x\varphi L_h^{-1}) \Rightarrow (x\varphi R_p^{-1}) \circ p = (y\varphi) \circ (x\varphi L_p^{-1})$, то-есть $x\varphi = y\varphi \circ (x\varphi L_p^{-1})$, откуда $y\varphi = p$, то-есть $y \in \Gamma_p$. Точно так же получается, что $\Gamma_p \cdot xL_h^{-1} \subseteq xR_h^{-1} \cdot \Gamma_p$, значит $xR_h^{-1} \cdot \Gamma_p = \Gamma_p \cdot xL_h^{-1}$.

(ii) Для произвольного элемента $(g \cdot xL_h^{-1})y (\in (\Gamma_p \cdot xL_h^{-1})y)$ существует такой $z (\in \mathcal{G})$, что выполняется $(g \cdot xL_h^{-1})y = z[(xy)L_h^{-1}]$. Отсюда, переходя к гомоморфному образу $(g \cdot xL_h^{-1})\varphi \circ y\varphi = z\varphi \circ [(xy)L_h^{-1}]\varphi$, $(g\varphi \circ x\varphi L_p^{-1}) \circ y\varphi = z\varphi \circ [(xy)\varphi L_p^{-1}]$, $x\varphi \circ y\varphi = z\varphi \circ [(x\varphi \circ y\varphi)L_p^{-1}] \Rightarrow z\varphi = p$, то-есть $z \in \Gamma_p$. Значит $(\Gamma_p \cdot xL_h^{-1})y \subseteq \Gamma_p[(xy)L_h^{-1}]$. Точно так же можно показать, что $\Gamma_p[(xy)L_h^{-1}] \subseteq (\Gamma_p \cdot xL_h^{-1})y$, так действительно выполняется (ii).

(iii) Для произвольного элемента $x(yR_h^{-1} \cdot g) (\in x(yR_h^{-1} \cdot \Gamma_p))$ существует такой $t (\in \mathcal{G})$, что $x(yR_h^{-1} \cdot g) = [(xy)R_h^{-1}]t$. Отсюда, пользуясь тем, что $h\varphi = p$, получается следующее: $x\varphi \circ (y\varphi R_p^{-1} \circ p) = [(xy)\varphi R_p^{-1}] \circ t\varphi$, $x\varphi \circ y\varphi = [(x\varphi \circ y\varphi)R_p^{-1}]t\varphi \Rightarrow t\varphi = p$, то-есть $t \in \Gamma_p$. Значит $x(yR_h^{-1} \Gamma_p) \subseteq (xy)R_h^{-1} \Gamma_p$. Точно так же получается, что $(xy)R_h^{-1} \Gamma_p \subseteq x(yR_h^{-1} \Gamma_p)$, то-есть выполняется (iii).

Подквазигруппа $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ называется нормальной подквазигруппой, если удовлетворяет условию (+).

Если $(\Gamma, \cdot)$ является нормальной подквазигруппой квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$, то множество $x'\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} xR_h^{-1} \cdot \Gamma (= \Gamma \cdot xL_h^{-1})$, $(x \in \mathcal{G}, h \in \Gamma)$ назовём смежным классом по Γ , порождённым x . Ясно, что все смежные классы по Γ дают раз-

биение $\mathcal{G}$ на непересекающиеся подмножества. Множество $\mathcal{G}/\Gamma$ смежных классов по Γ , которое является I-квазигруппой относительно операции

$$(x'\Gamma) \cdot (y'\Gamma) = (xy)\Gamma$$

(напр. Γ идемпотент), называется факторквазигруппой квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ по нормальной подквазигруппе $(\Gamma, \cdot)$. Имеет место теорема о гомоморфизмах квазигрупп.

Теорема 2. Если $(\Gamma, \cdot)$ нормальная подквазигруппа квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$, тогда $x \rightarrow x'\Gamma$ ($x \in \mathcal{G}$) является (естественным) гомоморфизмом квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на I-квазигруппу $(\mathcal{G}/\Gamma, \cdot)$. Наоборот, если Γ является ядром гомоморфизма φ квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на квазигруппу $(G, \circ)$, тогда $x'\Gamma \rightarrow x\varphi$ ($x \in \mathcal{G}$) является изоморфным отображением факторквазигруппы $(\mathcal{G}/\Gamma, \cdot)$ на $(G, \circ)$.

Доказательство. Ясно, что отображение ψ , заданное равенством $x\psi \stackrel{\text{def}}{=} x'\Gamma$ ($x \in \mathcal{G}$), является гомоморфным отображением квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на факторквазигруппу $(\mathcal{G}/\Gamma, \cdot)$.

С другой стороны, если I-квазигруппа $(G, \circ)$ является гомоморфным образом квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ при отображении φ , и Γ — (одно) ядро отображения φ , то $(\mathcal{G}/\Gamma, \cdot) \cong (G, \circ)$, где изоморфизм определяется отображением $x'\Gamma \rightarrow x\varphi$ ($x \in \mathcal{G}$).

§ 3. Проблема расширения и её упрощение

Этот параграф содержит с одной стороны основные понятия теории расширений (как напр. расширение, шрейерово расширение, эквивалентное шрейерово расширение, шрейерово произведение), с другой стороны здесь докажем теорему 3., с помощью которой описание расширений можно свести к определению подходящих шрейеровых расширений.

Определение 1. Под расширением квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$ подразумеваем такую квазигруппу $(\mathcal{G}, \cdot)$, для которой $(\Gamma, \cdot)$ является нормальной подквазигруппой и выполняется $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \cong (G, \circ)$.

Определение 2. Если квазигруппа $(\Gamma, \cdot)$ является (одним) ядром некоторого гомоморфного отображения квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на I-квазигруппу $(G, \cdot)$, тогда скажем, что $(\mathcal{G}, \cdot)$ является шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$.

Теорема 3. Пусть $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \circ)$ две квазигруппы. Для того, чтобы квазигруппа $(\mathcal{G}, \cdot)$ была расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$, необходимо и достаточно, чтобы $(\mathcal{G}, \cdot)$ была шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$, где $(G, \cdot)$ является некоторым главным I-изотопом $(G, \circ)$.

Доказательство. Пусть $(\mathcal{G}, \cdot)$ расширение $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$. Тогда из выполнения изотопии $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \cong (G, \circ)$ (так как любой изотоп квазигруппы изоморфен с некоторым главным изотопом квазигруппы) следует изоморфизм $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \cong (G, \cdot)$, где $(G, \cdot)$ вполне определённый I-изотоп квазигруппы $(G, \circ)$. На основании этого изоморфизма и теоремы о гомомор-

физмах квазигрупп уже видно, что $(\mathcal{G}, \cdot)$ является шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$.

Наоборот, пусть $(G, \cdot)$ некоторый главный I-изотоп квазигруппы $(G, \circ)$ и пусть $(\mathcal{G}, \cdot)$ является шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$. Тогда $(\Gamma, \cdot)$ является (одним) ядром гомоморфизма $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$, и так по теореме о гомоморфизмах $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \cong (G, \cdot)$, откуда на основании изотопии $(G, \cdot) \simeq (G, \circ)$ получается $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \simeq (G, \circ)$. Значит $(\mathcal{G}, \cdot)$ является расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$.

Замечание. На основании теоремы 3. ясно, что расширения $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$ ни что иное, как шрейеровые расширения $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$, где $(G, \cdot)$ пробегает все главные I-изотопы квазигруппы $(G, \circ)$.

Значит на основании этого замечания в дальнейших исследованиях достаточно ограничиваться только нахождением шрейеровых расширений квазигруппы I-квазигруппой.

Определение 3. Пусть квазигруппа $(\mathcal{G}, \cdot)$ и $(\mathcal{H}, \circ)$ — шрейеровые расширения квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ I-квазигруппой $(G, \cdot)$. Мы скажем, что эти два расширения эквивалентны между собой, если существует изоморфное отображение $(\mathcal{G}, \cdot)$ на $(\mathcal{H}, \circ)$, которое тождественно на Γ и индуцирует также тождественное отображение G .

Определение 4. Пусть $(G, \cdot)$ и $(\Gamma, \cdot)$ — группоиды. Пусть задана для каждой пары элементов $a, b \in G$ одна (бинарная) операция $\square_{a,b}$ на Γ . Множество всех упорядоченных пар $\langle a, \alpha \rangle$ ($a \in G, \alpha \in \Gamma$), где $\langle a, \alpha \rangle = \langle b, \beta \rangle$ тогда и только тогда, если $a = b$ и $\alpha = \beta$, является группоидом относительно операции

$$\langle a, \alpha \rangle \square \langle b, \beta \rangle = \langle ab, \alpha \square_{a,b} \beta \rangle$$

и называется (одним) шрейеровым произведением $(G, \cdot)$ и $(\Gamma, \cdot)$, и обозначим через $G \square \Gamma$.

Определение 5. Шрейерово произведение $G \square \Gamma$ I-квазигруппы $(G, \cdot)$ и квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ называется шрейеровым произведением с K-свойством, если выполняются следующие условия:

(1) Γ квазигруппа относительно всех операций $\square_{a,b}$, встречающихся в определении $G \square \Gamma$,

(2) для некоторого идемпотента p из $(G, \cdot)$ существует такой элемент $\lambda \in \Gamma$, что для всех элементов $\alpha, \beta \in \Gamma$ выполняется

$$\lambda \backslash (\alpha \beta) = \lambda \backslash \alpha \square_{p,p} \lambda \backslash \beta.$$

Если в дальнейшем будем говорить о шрейеровом произведении $G \square \Gamma$ с K-свойством, то всегда предполагаем, что p и λ из условия (2) вполне определённые фиксированные элемента G и Γ соответственно.

§ 4. Описание шрейеровых расширений

В этом параграфе докажем, что шрейеровые произведения $G \square \Gamma$ с К-свойством исчерпывают все шрейеровые расширения $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$, где расширения сами являются квазигруппами. Естественно, для того, чтобы шрейеровые произведения можно было считать шрейеровым расширением, понадобится одно отображение вложения, то-есть одно подходящее гомоморфное отображение. Наша теорема формулируется так:

Теорема 4. Пусть $(G, \cdot)$ I-квазигруппа и $(\Gamma, \cdot)$ произвольная квазигруппа. Тогда шрейерово произведение $G \square \Gamma$ с К-свойством является (одним) шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$, по вложению $\alpha \rightarrow \langle p, \lambda \backslash \alpha \rangle$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ в $G \square \Gamma$ и гомоморфизму $\langle a, \alpha \rangle \rightarrow a$ квазигруппы $G \square \Gamma$ на $(G, \cdot)$. Любое шрейерово расширение $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$ эквивалентно с шрейеровым расширением, полученным из некоторого шрейерового произведения $G \square \Gamma$ с К-свойством.

Доказательство. Рассмотрим уравнение вида $\langle a, \alpha \rangle \square \langle x, \xi \rangle = \langle b, \beta \rangle$. Пусть x является решением уравнения $ax = b$ и пусть ξ — решение уравнения $\alpha \square_{a, x} \xi = \beta$. Тогда для этих x и ξ выполняется

$$\langle a, \alpha \rangle \square \langle x, \xi \rangle = \langle ax, \alpha \square_{a, x} \xi \rangle = \langle b, \beta \rangle,$$

то-есть рассматриваемое уравнение разрешимо в $G \square \Gamma$. Ясно, что это уравнение имеет единственное решение в $G \square \Gamma$. Действительно, если

$$\langle a, \alpha \rangle \square \langle x_1, \xi_1 \rangle = \langle b, \beta \rangle$$

и

$$\langle a, \alpha \rangle \square \langle x_2, \xi_2 \rangle = \langle b, \beta \rangle,$$

тогда имеет место

$$ax_1 = b; \quad ax_2 = b$$

и

$$\alpha \square_{a, x_1} \xi_1 = \beta; \quad \alpha \square_{a, x_2} \xi_2 = \beta,$$

откуда следует $x_1 = x_2$ и $\xi_1 = \xi_2$. Точно так же можно доказать, что любое уравнение вида

$$\langle y, \eta \rangle \square \langle a, \alpha \rangle = \langle b, \beta \rangle$$

имеет в $G \square \Gamma$ одно и только одно решение. Значит $G \square \Gamma$ действительно является квазигруппой.

Очевидно, $\alpha \rightarrow \langle p, \lambda \backslash \alpha \rangle$ является изоморфным отображением квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ на шрейерово произведение $G \square \Gamma$ с К-свойством, и $\langle a, \alpha \rangle \rightarrow a$ является гомоморфным отображением $G \square \Gamma$ на $(G, \cdot)$, далее элементам вида $\langle p, \alpha \rangle$ и только им соответствует идемпотент p I-квазигруппы $(G, \cdot)$. Значит, $G \square \Gamma$ является одним шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$.

Пусть теперь дано одно шрейерово расширение $(\mathcal{G}, \cdot)$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ I-квазигруппой $(G, \cdot)$. Докажем, что это расширение эквивалентно с шрейеровым расширением, полученным из некоторого шрейерового произведения $G \square \Gamma$ с К-свойством.

Для любого элемента $a \in G$ рассмотрим такой элемент $g_a \in \mathcal{G}$, образом которого при гомоморфизме $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ является a (образ элемента $g \in \mathcal{G}$ в G обозначим через g'). Пусть далее p означает образ $(\Gamma, \cdot)$.

Операции $\square_{a,b}$ ($a, b \in G$), необходимые для образования шрейерова произведения $G \square \Gamma$ с К-свойством, определяем следующим соотношением:

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}(\alpha \square_{a,b} \beta), \quad (\alpha, \beta \in \Gamma).$$

Ясно, что $\alpha \square_{a,b} \beta \in \Gamma$, потому что из-за $ab = (g_{a/p}\alpha)'(g_{b/p}\beta)' = [(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta)]' = [g_{(ab)/p}(\alpha \square_{a,b} \beta)]' = (g_{(ab)/p}(\alpha \square_{a,b} \beta))' = [(ab)/p](\alpha \square_{a,b} \beta)'$ имеет место $(\alpha \square_{a,b} \beta)' = p$. Покажем, что так получим шрейерова произведения $G \square \Gamma$ с К-свойством. Прежде всего убедимся, что Γ является квазигруппой относительно любой операции $\square_{a,b}$. Действительно, для любого γ и α имеет решение $\gamma = \alpha \square_{a,b} \beta$ относительно β в Γ . Пусть g — решение уравнения $(g_{a/p}\alpha)g = g_{(ab)/p}\gamma$ и пусть β — решение уравнения $g_{b/p}\beta = g$. Тогда $\beta \in \Gamma$, потому что из-за $(g_{a/p}\alpha)g = g_{(ab)/p}\gamma$, переходя к гомоморфному образу по $ag' = ab$, имеет место $g' = b$, так $\beta \in \Gamma$. Далее $(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}\gamma$, то-есть $\gamma = \alpha \square_{a,b} \beta$. $\gamma = \alpha \square_{a,b} \beta$ имеет единственное решение относительно β , для этого нужно показать, что существует только один такой элемент β , для которого

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}\gamma.$$

Предположим, что такому условию удовлетворяют β_1 и β_2 . Тогда

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta_1) = g_{(ab)/p}\gamma$$

и

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta_2) = g_{(ab)/p}\gamma,$$

так $g_{b/p}\beta_1 = g_{b/p}\beta_2$, то-есть $\beta_1 = \beta_2$. Точно так же можно показать, что операция $\square_{a,b}$ обратима также и слева. Теперь убедимся, что при удобном $\lambda (\in \Gamma)$ и для всех элементов $\alpha, \beta \in \Gamma$ выполняется

$$\lambda \backslash (\alpha \beta) = (\lambda \backslash \alpha) \square_{p,p} (\lambda \backslash \beta).$$

Действительно, в качестве λ можно выбрать g_p , так как из-за $\alpha \beta = [g_p(g_p \backslash \alpha)][g_p(g_p \backslash \beta)] = g_p[(g_p \backslash \alpha) \square_{p,p} (g_p \backslash \beta)]$ будет $g_p \backslash (\alpha \beta) = (g_p \backslash \alpha) \square_{p,p} (g_p \backslash \beta)$.

Теперь элементу $g_{a/p}\alpha$, ($\alpha \in \Gamma$) поставим в соответствие пару $\langle a, \alpha \rangle$. Покажем, что сопоставление $g_{a/p}\alpha \rightarrow \langle a, \alpha \rangle$ является изоморфным отображением $(\mathcal{G}, \cdot)$ на $G \square \Gamma$. Ясно, что каждый элемент из $\mathcal{G}$ имеет образ, ибо если $g \in \mathcal{G}$ и $g' = a$, то элемент α из соотношения $g = g_{a/p}\alpha$ является элементом Γ (так как из-за $g' = (g_{a/p}\alpha)' = g'_{a/p}\alpha'$ будет $\alpha' = p$), так $g \rightarrow \langle a, \alpha \rangle$. Далее, если образом $g (\in \mathcal{G})$ является $\langle a_i, \alpha_i \rangle$ ($i = 1, 2$), тогда $g' = a_1$ и $g' = a_2$, так $a_1 = a_2$, поэтому из соотношения $g_{a_1/p}\alpha_1 = g_{a_2/p}\alpha_2$ следует $\alpha_1 = \alpha_2$, значит рассматриваемое отображение однозначно. Очевидно, любая пара $\langle a, \alpha \rangle$ является образом одного и только одного элемента из $\mathcal{G}$ (именно $g_{a/p}\alpha$). Так же легко убедиться, рассматриваемое отображение сохраняет операцию, так как если $g \rightarrow \langle a, \alpha \rangle$ и $h \rightarrow \langle b, \beta \rangle$, тогда $g = g_{a/p}\alpha$ и $h = g_{b/p}\beta$ ($g' = a$, $h' = b$), так $gh = (g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}(\alpha \square_{a,b} \beta) \rightarrow \langle ab, \alpha \square_{a,b} \beta \rangle = \langle a, \alpha \rangle \square \langle b, \beta \rangle$.

Наконец покажем, что изоморфизм $g \rightarrow \langle a, \alpha \rangle$ является эквивалентностью. С одной стороны изоморфизм $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow G \square \Gamma$ идентичен на Γ , ибо после вложения $\alpha \rightarrow \langle p, \lambda \alpha \rangle$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ в $G \square \Gamma$ заменим α парой $\langle p, \lambda \alpha \rangle$, и $\langle p, \lambda \alpha \rangle$ при изоморфизме $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow G \square \Gamma$ является образом α (так как тогда $\alpha = g_p(g_p \backslash \alpha) \rightarrow \langle p, g_p \backslash \alpha \rangle$). С другой стороны, изоморфизм $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow G \square \Gamma$ индуцирует тождественное отображение также для G , так как при гомоморфизме $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ элементу $g = g_{a/p} \alpha$ соответствует a и элементу g , сопоставленному при изоморфизме $(\mathcal{G}, \cdot) \rightarrow G \square \Gamma$ элементу $\langle a, \alpha \rangle$, при гомоморфизме $G \square \Gamma \rightarrow (G, \cdot)$ соответствует также a .

Этим теорема 4. доказана.

Для того, чтобы шрейерово расширение $G \square \Gamma$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$ обладало единицей, необходимо, чтобы $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \cdot)$ также обладали единицей, то есть были лупами.

Определение 6. Шрейерово произведение $G \square \Gamma$ с К-свойством лупы $(G, \cdot)$ и лупы $(\Gamma, \cdot)$ (единицы обозначим соответственно через e и ε) назовём обладающим L -свойством, если элемент $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \backslash \varepsilon$ при любом $a (\in G)$ относительно операций $\square_{e,a}$ является левой, а относительно операций $\square_{a,e}$ является правой единицей.

Теорема 5. Пусть $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \cdot)$ — лупы. Любое шрейерово расширение в лупу лупы $(\Gamma, \cdot)$ лупой $(G, \cdot)$ эквивалентно с шрейеровым расширением, полученным из некоторого шрейерового произведения с L -свойством. (Альберт [2], Theorem 6.)

Доказательство. По теореме 4 достаточно показать, что некоторое шрейеровое расширение $G \square \Gamma$ лупы $(\Gamma, \cdot)$ лупой $(G, \cdot)$ является лупой тогда и только тогда, если $G \square \Gamma$ с L -свойством.

Пусть $G \square \Gamma$ — лупа и обозначим единицу через $\langle e, \eta \rangle$. Тогда для любого элемента $\langle a, \alpha \rangle (\in G \square \Gamma)$ выполняется

$$\langle e, \eta \rangle \square \langle a, \alpha \rangle = \langle ea, \eta \square_{e,a} \alpha \rangle = \langle a, \alpha \rangle$$

и

$$\langle a, \alpha \rangle \square \langle e, \eta \rangle = \langle ae, \alpha \square_{a,e} \eta \rangle = \langle a, \alpha \rangle.$$

Откуда следует с одной стороны $ea = ae = a$, с другой стороны $\eta \square_{e,a} \alpha = \alpha = \alpha \square_{a,e} \eta$. Значит e точно единица лупы $(G, \cdot)$ (и так её единственный идемпотент). η является левой единицей квазигруппы $(\Gamma, \square_{e,a})$, правой единицей квазигруппы $(\Gamma, \square_{a,e})$, в специальном случае η единица для $(\Gamma, \square_{e,e})$. Значит по (2) $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \eta$ является точно единицей $(\Gamma, \cdot)$.

Наоборот, если некоторое шрейерово произведение с К-свойством луп $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \cdot)$ (единица соответственно ε и e) такое, что элемент $\eta = \lambda \backslash \varepsilon$ является левой единицей относительно операций $\square_{e,a}$, правой единицей относительно операций $\square_{a,e}$ ($a \in G$), то $G \square \Gamma$ является лупой и её единица точно $\langle e, \eta \rangle$. Теорема доказана.

§ 5. Критерий эквивалентности

По теореме 4 удалось поставить в соответствие каждому шрейеровому расширению хотя бы одно шрейерово произведение с К-свойством, с которым шрейеровое расширение эквивалентно. (Потому хотя бы одно, что выбор представителей g_a при доказательстве теоремы 4 был произвольным.) Но связь между шрейеровыми расширениями и шрейеровыми произведениями с К-свойством можем сделать взаимно однозначной тем, что, с одной стороны, эквивалентные шрейеровые расширения не будем считать различными, а с другой стороны, между шрейеровыми произведениями с К-свойством установим такое разбиение на классы, при котором те шрейеровые произведения с К-свойством попадают в один класс, которые соответствуют эквивалентным шрейеровым расширениям. Значит, речь идёт о том, чтобы установить необходимое условие того, чтобы два шрейеровых произведения с К-свойством были эквивалентны как шрейеровые расширения. Следующая теорема полностью решает поставленную задачу:

Теорема 6. Пусть $(G, \cdot)$ — I -квазигруппа, а $(\Gamma, \cdot)$ — произвольная квазигруппа. Рассмотрим шрейерово произведение с К-свойством $G \sqcup \Gamma$, соответствующее идемпотенту p из $(G, \cdot)$, как шрейерово расширение $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$, полученное при вложении $\alpha \rightarrow \langle p, \lambda_1 \backslash \alpha \rangle$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ в $G \sqcup \Gamma$ и при гомоморфизме $\langle a, \alpha \rangle \rightarrow a \sqcup \Gamma$ на $(G, \cdot)$ ($i = 1, 2$). Тогда необходимое и достаточное условие эквивалентности шрейеровых расширений $G \sqcup \Gamma$ и $G \sqcup \Gamma$ существование таких отображений $a \rightarrow \gamma_1^a$ и $a \rightarrow \gamma_2^a$ в Γ , для которых при перестановке $\Pi: \xi \rightarrow \xi \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 \backslash (\lambda_2 \xi)$, ($\xi \in \Gamma$) имеют место следующие условия:

1. Для операций $\circledast_i$ ($i = 1, 2$), определённых соотношениями

$$\gamma_i^{(ab)/p} \circledast_i (\alpha \circledast_i \beta) = (\gamma_i^{a/p} \circledast_i \alpha) \circledast_i (\gamma_i^{b/p} \circledast_i \beta),$$

выполняется

$$\alpha \Pi \circledast_i \beta \Pi = (\alpha \circledast_i \beta) \Pi,$$

2. $\gamma_1^p = \gamma_2^p \Pi$.

Дополнение. Если хотя бы для одного отображения $a \rightarrow \gamma_1^a$ существует такое отображение $a \rightarrow \gamma_2^a$, которое удовлетворяет условиям теоремы, тогда для каждого отображения $a \rightarrow \gamma_1^a$ существует такое отображение $a \rightarrow \gamma_2^a$, которое удовлетворяет условиям теоремы.

Доказательство. I. Пусть отображение $\mathcal{E}$ устанавливает эквивалентность $G \sqcup \Gamma \cong G \sqcup \Gamma$. Пусть $a \rightarrow \gamma_1^a$ одно произвольное отображение G в Γ , и пусть γ_2^a является второй компонентой элемента $\langle a, \gamma_1^a \rangle \mathcal{E}$. Докажем, что функции γ_1^a и γ_2^a удовлетворяют условиям теоремы. Для этого сначала отметим, что первая компонента $\langle a, \alpha \rangle \mathcal{E}$ совпадает с a , потому что $\mathcal{E}$ на G индуцирует тождественное отображение. С другой стороны, $\langle p, \lambda_1 \backslash \alpha \rangle \mathcal{E} = \langle p, \lambda_2 \backslash \alpha \rangle$, потому что $\mathcal{E}$ тождественное отображение на Γ . Если подставить $\lambda_1 \alpha$ вместо α , то равенство имеет вид

$$\langle p, \alpha \rangle \mathcal{E} = \langle p, \lambda_2 \backslash (\lambda_1 \alpha) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle p, \alpha \Pi^{-1} \rangle,$$

с помощью этих двух замечаний и принимая во внимание решения ξ уравнения $\gamma_1^{a/p} \overline{1} \xi = \alpha$, получим соотношение

$$\langle a, \alpha \rangle_{\mathcal{E}} = \langle a, \gamma_2^{a/p} \overline{2} \xi \Pi^{-1} \rangle_{a/p, p}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle a, \alpha \rangle_{\mathcal{E}} &= (\langle a/p, \gamma_1^{a/p} \overline{1} \langle p, \xi \rangle \rangle_{\mathcal{E}})_{\mathcal{E}} = \langle a/p, \gamma_1^{a/p} \rangle_{\mathcal{E}} \overline{2} \langle p, \xi \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle a/p, \gamma_2^{a/p} \overline{2} \langle p, \xi \Pi^{-1} \rangle \rangle_{\mathcal{E}} = \langle a, \gamma_2^{a/p} \overline{2} \xi \Pi^{-1} \rangle_{a/p, p}. \end{aligned}$$

Используя только что доказанную формулу, с помощью операции $\textcircled{1}$, определённой соотношением

$$\gamma_1^{(ab)/p} \overline{1} (\alpha \textcircled{1} \beta) = (\gamma_1^{a/p} \overline{1} \alpha) \overline{1} (\gamma_1^{b/p} \overline{1} \beta),$$

на основании того, что $\mathcal{E}$ сохраняет операцию, получим:

$$\begin{aligned} \langle ab, \gamma_2^{(ab)/p} \overline{2} (\alpha \textcircled{1} \beta \Pi) \Pi^{-1} \rangle &= \langle ab, \gamma_1^{(ab)/p} \overline{1} (\alpha \textcircled{1} \beta \Pi) \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle ab, (\gamma_1^{a/p} \overline{1} \alpha \Pi) \overline{1} (\gamma_1^{b/p} \overline{1} \beta \Pi) \rangle_{\mathcal{E}} = (\langle a, \gamma_1^{a/p} \overline{1} \alpha \Pi \rangle \overline{1} \langle b, \gamma_1^{b/p} \overline{1} \beta \Pi \rangle)_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle a, \gamma_1^{a/p} \overline{1} \alpha \Pi \rangle_{\mathcal{E}} \overline{2} \langle b, \gamma_1^{b/p} \overline{1} \beta \Pi \rangle_{\mathcal{E}} = \langle a, \gamma_2^{a/p} \overline{2} \alpha \rangle_{\mathcal{E}} \overline{2} \langle b, \gamma_2^{b/p} \overline{2} \beta \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle ab, (\gamma_2^{a/p} \overline{2} \alpha) \overline{2} (\gamma_2^{b/p} \overline{2} \beta) \rangle, \end{aligned}$$

то-есть

$$\gamma_2^{(ab)/p} \overline{2} (\alpha \textcircled{1} \beta \Pi) \Pi^{-1} = (\gamma_2^{a/p} \overline{2} \alpha) \overline{2} (\gamma_2^{b/p} \overline{2} \beta).$$

Это показывает, что относительно операции $\textcircled{2}$, определённой соотношением

$$\gamma_2^{(ab)/p} \overline{2} (\alpha \textcircled{2} \beta) = (\gamma_2^{a/p} \overline{2} \alpha) \overline{2} (\gamma_2^{b/p} \overline{2} \beta),$$

имеет место

$$\alpha \textcircled{2} \beta = (\alpha \textcircled{1} \beta \Pi) \Pi^{-1},$$

то-есть

$$(\alpha \textcircled{2} \beta) \Pi = \alpha \textcircled{1} \beta \Pi.$$

Значит, для перестановки $\xi \rightarrow \xi \Pi = \lambda_1 \backslash (\lambda_2 \xi)$ выполняется

$$\alpha \textcircled{1} \beta \Pi = (\alpha \textcircled{2} \beta) \Pi.$$

Наконец, по уже раньше доказанной формуле $\langle p, \alpha \rangle_{\mathcal{E}} = \langle p, \lambda_2 \backslash (\lambda_1 \alpha) \rangle$ и по определению γ_2^p ясно, что $\gamma_2^p = \lambda_2 \backslash (\lambda_1 \gamma_1^p)$, то-есть $\gamma_1^p = \gamma_2^p \Pi$.

II. Пусть $a \rightarrow \gamma_1^a$ и $a \rightarrow \gamma_2^a$ — два таких отображения G в Γ , которые удовлетворяют условиям теоремы. Определим отображение $\langle a, \alpha \rangle \rightarrow \langle a, \alpha \rangle_{\mathcal{E}}$ следующим соотношением:

$$\langle a, \alpha \rangle_{\mathcal{E}} = \langle a, \gamma_2^{a/p} \overline{2} \xi \Pi^{-1} \rangle_{a/p, p},$$

где $\xi \Pi^{-1} = \lambda_2 \backslash (\lambda_1 \xi)$ и ξ является решением уравнения $\gamma_1^{a/p} \overline{1} \xi = \alpha$. Докажем, что $\mathcal{E}$ является изоморфным отображением $G \overline{1} \Gamma$ на $G \overline{2} \Gamma$, а также покажем что $\mathcal{E}$ индуцирует на G тождественное отображение и на Γ является тождественным отображением. Ясно, что $\mathcal{E}$ однозначное отображение $G \overline{1} \Gamma$ в $G \overline{2} \Gamma$, далее любой элемент $\langle a, \alpha \rangle$ из $G \overline{2} \Gamma$ является образом одного и только одного элемента из $G \overline{1} \Gamma$ (именно образ того элемента $\langle a, \delta \rangle$, у которого вторая компонента $\delta = \gamma_1^{a/p} \overline{1} \xi$, где ξ — решение уравнения $\alpha = \gamma_2^{a/p} \overline{2} \lambda_2 \backslash (\lambda_1 \xi)$). $\mathcal{E}$ сохраняет операцию, так как используя решения ϱ, σ и ν уравнений $\gamma_1^{a/p} \overline{1} \varrho = \alpha$, $\gamma_1^{b/p} \overline{1} \sigma = \beta$ и $\gamma_1^{(ab)/p} \overline{1} \nu = \alpha \overline{1} \beta$,

$$\begin{aligned} \langle \langle a, \alpha \rangle \mathcal{E} \rangle \overline{2} \langle \langle b, \beta \rangle \mathcal{E} \rangle &= \langle a, \gamma_2^{a/p} \overline{2} \varrho \Pi^{-1} \rangle \overline{2} \langle b, \gamma_2^{b/p} \overline{2} \sigma \Pi^{-1} \rangle = \\ &= \langle ab, (\gamma_2^{a/p} \overline{2} \varrho \Pi^{-1}) \overline{2} (\gamma_2^{b/p} \overline{2} \sigma \Pi^{-1}) \rangle = \\ &= \langle ab, \gamma_2^{(ab)/p} \overline{2} (\varrho \Pi^{-1} \overline{2} \sigma \Pi^{-1}) \rangle = \\ &= \langle ab, \gamma_2^{(ab)/p} \overline{2} (\varrho \overline{1} \sigma) \Pi^{-1} \rangle = \langle ab, \gamma_1^{(ab)/p} \overline{1} (\varrho \overline{1} \sigma) \rangle \mathcal{E} = \\ &= \langle ab, (\gamma_1^{a/p} \overline{1} \varrho) \overline{1} (\gamma_1^{b/p} \overline{1} \sigma) \rangle \mathcal{E} = \langle ab, \alpha \overline{1} \beta \rangle \mathcal{E} = \\ &= \langle \langle a, \alpha \rangle \overline{1} \langle b, \beta \rangle \rangle \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\mathcal{E}$ на G индуцирует тождественное отображение. С другой стороны, $\mathcal{E}$ на Γ является тождественным отображением, ибо, используя решение ξ уравнения $\gamma_1^p \overline{1} \xi = \lambda_1 \backslash \alpha$ из-за $\gamma_2^p \Pi = \gamma_1^p$,

$$\begin{aligned} \langle p, \lambda_1 \backslash \alpha \rangle \mathcal{E} &= \langle p, \gamma_2^p \overline{2} \xi \Pi^{-1} \rangle = \langle p, \gamma_1^p \Pi^{-1} \overline{2} \xi \Pi^{-1} \rangle = \\ &= \langle p, [\lambda_2 \backslash (\lambda_1 \gamma_1^p)] \overline{2} [\lambda_2 \backslash (\lambda_1 \xi)] \rangle = \langle p, \lambda_2 \backslash [(\lambda_1 \gamma_1^p)(\lambda_1 \xi)] \rangle = \\ &= \langle p, \lambda_2 \backslash [\lambda_1 (\gamma_1^p \overline{1} \xi)] \rangle = \langle p, \lambda_2 \backslash \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Наконец, и дополнение ясно, так как во II части доказательства говорилось о том, что если существуют два таких отображения, которые удовлетворяют условиям теоремы, тогда два расширения эквивалентны, а в I части доказали, что если два расширения эквивалентны, тогда для любого отображения $a \rightarrow \gamma_1^a$ существует такое отображение $a \rightarrow \gamma_2^a$, которое удовлетворяет условиям теоремы.

Литература

- [1] A. A. ALBERT, Quasigroups I., *Trans. Amer. Math. Soc.* **54** (1943), 507—519.
- [2] A. A. ALBERT, Quasigroups II., *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 401—419.
- [3] R. H. BRUCK, A survey of binary systems, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1958.

(Поступило 30. 12. 1965)