# Eine kombinatorische Frage zahlentheoretischer Art

Von E. HARZHEIM (Köln)

## 1. Einleitung

In der Zahlentheorie werden mehrere Funktionen betrachtet, die sich folgendem Begriff einordnen:

*Definition* 1. 1. Es sei $f$ eine Funktion, die über einem Abschnitt $\{1, \ldots, n\}$ der Menge der natürlichen Zahlen oder über der Menge aller natürlichen Zahlen definiert ist. $f$ ordne jeder Zahl $\nu$ seines Definitionsbereiches eine natürliche Zahl $f(\nu) \leqq \nu$ zu. Dann nennen wir $f$ kurz eine $Z$-funktion (über $\{1, \ldots, n\}$ bzw. $\{1, 2, 3, \ldots\}$).

In der Tat: Ist etwa $\varphi(n)$ die Anzahl der zu $n$ teilerfremden natürlichen Zahlen $\leqq n$ (Eulersche Funktion), oder $\tau(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leqq n$, die $n$ teilen, so sind $\varphi$ und $\tau$ $Z$-Funktionen.

Hat man allgemein für jede natürliche Zahl $n$ eine (von $n$ abhängige oder auch unabhängige) Eigenschaft $E_n$ gegeben und setzt man $f(n) =$ Anzahl aller natürlichen Zahlen $\leqq n$, die die Eigenschaft $E_n$ besitzen, so ist $f(n)$ eine $Z$-Funktion, — wofern nur $f(n) \geqq 1$ ist, was keine sonderliche Einschränkung darstellt. Die vorigen Eigenschaften $E_n$, teilerfremd zu $n$ zu sein bzw. $n$ zu teilen, hängen beispielsweise von $n$ ab. Die Eigenschäften, Primzahl, quadratfrei, oder Summe von höchstens zwei Quadraten zu sein, hängen dagegen von $n$ nicht ab.

Es ist klar, daß die Funktionen $f(n)$, die, wie angegeben, zu von $n$ unabhängigen Eigenschaften $E_n$ (also mit $E = E_1 = E_2 = \ldots = E_n = \ldots$) gebildet werden, der Bedingung

$$f(n+1) = f(n) \quad \textit{oder} \quad f(n+1) = f(n) + 1 \tag{1}$$

genügen. Sie sind also über ihrem ganzen Definitionsbereich monoton wachsend, ebenso wie die Funktion $n - f(n)$. (In § 5 werden wir solche Funktionen auch als Galton-Funktionen bezeichnen).

Wir wollen nun untersuchen, was man bei beliebigen $Z$-Funktionen über die Mächtigkeit der Teilmengen monotonen Steigens aussagen kann. Es wird sich hierzu der Satz ergeben, daß, wenn $f$ irgendeine $Z$-Funktion über $\{1, \ldots, 2^n\}$ ist, es immer eine Teilmenge der Mächtigkeit $n+1$ des Definitionsbereichs gibt, über der $f$ monoton steigt (und dazu noch die Funktion $\nu - f(\nu)$). Diese Aussage ist scharf.

Eine Anwendung dieses Satzes auf ein Problem über Auswahlfunktionen wird in der Arbeit [3] vorgenommen.

## 2. Vorbereitungen

*Definition* 2. 1. Es sei $p$ ein beliebiger Punkt der euklidischen Ebene. Der Oktant von $p$, — in Zeichen Okt $(p)$ —, wird definiert als die Menge aller Punkte $x$ der Ebene, die folgende Vektordarstellung haben:

$$x = p + \lambda \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad wo \quad 0 \leqq \lambda < \infty \quad und \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \; ist.$$

Ist nun $f$ eine $Z$-Funktion, so liegt $f$, — anschaulich gesagt —, unstreng zwischen der Geraden $y=1$ und der Geraden $y=x$, also im (ersten) Oktanten des Cartesischen Koordinatensystems zum Ursprungspunkt (0, 0).

Es ist zweckmäßig, für das folgende eine Relation $R$ einzuführen:

*Definition* 2. 2. Es seien $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ zwei Punkte der Ebene. Wir setzen fest: Es gelte $(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ist oder wenn $x_1 \neq x_2$ und $0 \leqq \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leqq 1$ ist.

Es ist klar, daß $R$ reflexiv und symmetrisch ist. Der Sinn dieser Definition ergibt sich aus der folgenden einfachen Beziehung:

(I) *Ist $f$ eine reellwertige Funktion, die über den reellen Zahlen $x_1$ und $x_2$ definiert ist, so gilt $(x_1, f(x_1))\,R\,(x_2, f(x_2))$ genau dann, wenn über $\{x_1, x_2\}$ die Funktionen $f(x)$ und $x - f(x)$ zugleich monoton wachsen.*

Interpretiert man die Definition 2. 2 geometrisch, so erhält man offenbar:

(II) *Zwei Punkte der Ebene stehen genau dann in der Relation $R$, wenn einer der beiden Punkte im Oktanten des anderen liegt.*

Wir nennen eine Teilmenge $K$ der Ebene eine *$R$-Kette*, kurz eine Kette, wenn je zwei Elemente von $K$ zu einander in der Relation $R$ stehen. Und eine Teilmenge $A$ der Ebene heiße eine *$R$-Antikette*, kurz *Antikette*, wenn keine zwei verschiedene Elemente von $A$ in der Relation $R$ stehen.

Wir führen noch eine Bezeichnung ein:

*Definition* 2. 3. Ist $f$ irgendeine reellwertige Funktion, die über einer Teilmenge $D$ der reellen Achse definiert ist, so bezeichnen wir die zu $f$ gehörige Punktmenge, also die Menge $\{(x, f(x)) | x \in D\}$, kurz mit $P(f)$.

Wir wollen nun aus dem Beweise des später folgenden Satzes 3. 1 einen Teil vorziehen:

**Lemma 2. 1.** *Es sei $n$ eine natürliche Zahl und $f$ eine $Z$-Funktion über $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$. Man habe in $P(f)$ eine Antikette $A$ von $n$ Punkten. Dann gilt: Jeder Punkt $(2n, y)$ mit $1 \leqq y \leqq 2n$ ist für mindestens einen Punkt $a \in A$ in dessen Oktanten Okt$(a)$ enthalten.*

BEWEIS. Es sei $a_1 = (x_1, y_1)$ derjenige Punkt von $A$, der die kleinste $x$-Koordinate hat. Dann ist $x_1 \leqq n$, da ja sonst $|A| \leqq (2n-1) - n = n - 1$ wäre mit Widerspruch. Man betrachte dann die Punkte $p_i = (x_1, i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, x_1$, die alle auf der Vertikalen durch $a_1$ liegen. Für $i = 1, 2, \ldots, y_1 - 1, y_1 + 1, y_1 + 2, \ldots, x_1 - 1, x_1$ definieren wir eine Halbgerade $H_i$ durch folgende Bedingungen:

1. $H_i$ hat $p_i$ als Anfangspunkt;

2. $H_i$ ist für $i=1, \ldots, y_1-1$ parallel zur $x$-Achse und für $i=y_1+1, y_1+2, \ldots, \ldots, x_1-1, x_1$ parallel zur Geraden $y=x$;
3. $H_i$ liegt in der rechten Halbebene zur Vertikalen durch $a_1$.

Dann liegt auf jedem $H_i$ höchstens ein Element aus $A$, da zwei von dieser Art in der Relation $R$ stünden mit Widerspruch dazu, daß $A$ Antikette ist. Da nun keiner der von $a_1$ verschiedenen Punkte von $A$ in Okt $(a_1)$ fällt, $a_1$ am weitesten links liegt von den Punkten von $A$, und da $|A-\{a_1\}|=n-1 \leqq x_1-1$ ist, müßte nach dem Schubfachschluß auf jedem der $x_1-1$ vielen $H_i$ auch mindestens ein, also dann genau ein Punkt aus $A$ liegen. Hieraus ergibt sich sofort, daß $\cup \mathrm{Okt}(a) | a \in A$ die Strecke umfaßt, die aus den Punkten $(2n, y)$ mit $1 \leqq y \leqq 2n$ besteht.

## 3. Hauptteil

Der zentrale Satz dieser Arbeit besagt nun:

**Satz 3. 1.** *Es sei n eine natürliche Zahl und f eine Z-Funktion über* $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$. *Dann gibt es eine Teilmenge der Mächtigkeit* $n+1$ *von* $\{1, \ldots, 2^n\}$, *über der* $f(v)$ *und zugleich* $v-f(v)$ *monoton steigen.*

Anders ausgedrückt (indem man an (I) anknüpft): Es gibt in $P(f)$ eine $R$-Kette der Mächtigkeit $n+1$.

Wir setzen fest: Ist $K$ eine endliche $R$-Kette, so nennen wir denjenigen Punkt von $K$, der die größte $x$-Koordinate hat, das Ende von $K$.

Bevor wir den Satz 3. 1 selbst angehen, bringen wir das entscheidende

**Lemma 3. 1.** *Unter der Voraussetzung, daß* Satz 3. 1 *für eine festes n richtig ist, folgt:*

*Ist v eine ganze Zahl mit* $0 \leqq v \leqq 2^n-1$ *und f eine Z-Funktion über* $\{1, \ldots, 2^n+v\}$, *zu der es keine R-Kette der Länge* $n+2$ *gibt, dann gibt es zu f mindestens* $v+1$ *Enden von R-Ketten der Länge* $n+1$.

Beweis. Für $v=0$ trifft dies zu nach Voraussetzung. Es gelte nun die Aussage von Lemma 3. 1 für ein festes $v<2^n-1$. Sie ist dann noch für $v+1$ nachzuweisen.

Es sei also $f$ eine $Z$-Funktion über dem Abschnitt $\{1, 2, \ldots, 2^n+v+1\}$, zu der es keine $R$-Kette der Länge $n+2$ gibt. Dann gibt es zu dem auf $\{1, \ldots, 2^n+v\}$ eingeschränkten $f$ nach Voraussetzung $v+1$ Enden von $R$-Ketten der Länge $n+1$. Dies seien etwa $e_1, e_2, \ldots, e_{v+1}$, wobei diese Punkte so indiziert seien, daß die $x$-Koordinaten der $e_i$ mit $i$ monoton wachsen. Es gilt:

Für jedes $i=1, 2, \ldots, v+1$ liegen in Okt $(e_i)$ keine von $e_i$ verschiedenen Kurvenpunkte der Funktion $f$, $\{1, \ldots, 2^n+v+1\}$.

Denn sonst gäbe es über $\{1, \ldots, 2^n+v+1\}$ $R$-Ketten der Länge $(n+1)+1$ mit Widerspruch.

Man konstruiert nun eine Abbildung $A$ von $P(f)-\{e_1\}$ auf eine Menge, die wieder die Kurve einer $Z$-Funktion sein wird:

Es sei $p \in P(f)-\{e_1\}$; $p=(p_x, p_y)$, $e_1=(e_{1x}, e_{1y})$. Ist dann $p_x<e_{1x}$, so sei $A(p)=p$. Ist $p_x>e_{1x}$, so bilde man wie folgt ab: Ist $p_y<e_{1y}$, so sei $A(p)=(p_x-1, p_y)$, und ist $p_y>e_{1y}$, so sei $A(p)=(p_x-1, p_y-1)$, — wegen $p \notin \mathrm{Okt}(e_1)$ ist ja $p_y \neq e_{1y}$, also sind alle Fälle erfaßt —. (Es wird also $p$ im ersten Unterfall des letzten Falles

um eins nach links und im zweiten um eins nach links und zugleich um eins nach unten geschoben). Man verifiziert, daß $A(P(f)-\{e_1\})$ wieder Kurve einer $Z$-Funktion $f'$, $\{1, \ldots, 2^n+\nu\}$, ist. Speziell gilt dabei, daß es zu $f'$, $\{1, \ldots, 2^n+\nu\}$, keine $R$-Kette der Länge $n+2$ gibt, da es sonst auch eine zu $f$ gäbe, wie man sich klarmacht. (Hierzu ist eine geometrische Skizze nützlich). Nach Induktionsannahme gibt es zu $f'$, $\{1, \ldots, 2^n+\nu\}$ mindestens $\nu+1$ Enden von $R$-Ketten der Länge $n+1$, etwa $e_1', \ldots, e_{\nu+1}'$. Aus der Konstruktion folgt dann: $A^{-1}(e_i')$ ist Ende einer $R$-Kette der Länge $n+1$ zu $f$, $\{1, \ldots, 2^n+\nu+1\}$ für jedes $i=1, \ldots, \nu+1$. Da aber alle diese Punkte $A^{-1}(e_i')$ von $e_1$ und von einander verschieden sind (da ja in Okt $(e_i')$ außer $e_i'$ kein weiteres Ende einer $R$-Kette der Länge $n+1$ liegen kann), gibt es zu $f$, $\{1, \ldots, 2^n+\nu+1\}$ mit $e_1$und den $A^{-1}(e_i')$ insgesamt mindestens $1+(\nu+1)$ Enden von $R$-Ketten der Länge $n+1$, womit die Behauptung also auch für $\nu+1$ gilt. Damit ist Lemma 3. 1 bewiesen.

Beweis von Satz 3. 1: Für $n=1$ ist die Behauptung sofort ersichtlich. Es gelte also der Satz für ein festes $n \geqq 1$, und es sei eine $Z$-Funktion $f$ über $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1}\}$ gegeben.

Wir nehmen den Fall an, daß es zu $f$, $\{1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ keine $R$-Kette der Länge $n+2$ gibt, da sonst nichts mehr zu zeigen wäre. Setzt man $\nu=2^n-1$, so ist $f$, $\{1 \ldots, 2^{n+1}-1\}$ eine $Z$-Funktion über $\{1, \ldots, 2^n+\nu\}$ und folglich gibt es nach Lemma 3. 1 mindestens $(2^n-1)+1=2^n$ Enden von $R$-Ketten der Länge$n+1$ über $\{1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$. Da sie eine Antikette $A$ bilden müssen (−man könnte sonst an Hand zweier von ihnen eine $R$-Kette der Länge $n+2$ konstruieren —), können wir Lemma 2. 1 anwenden, und es folgt:

Jeder Punkt $(2^{n+1}, y)$ mit $1 \leqq y \leqq 2^{n+1}$ ist für mindestens ein $a \in A$ in dessen Oktanten Okt $(a)$ enthalten.

Wie auch immer also $f(2^{n+1})$ definiert ist, der Punkt $(2^{n+1}, f(2^{n+1}))$ steht zu einem der Enden $\in A$ in der Relation $R$; er verlängert also die dort endende $R$-Kette der Länge $n+1$ zu einer solchen der Länge $n+2$. Damit ist Satz 3. 1 induktiv bewiesen.

*Bemerkung.* Den Begriff $Z$-Funktion kann man noch etwas abändern, so daß er für gewisse Zwecke handlicher wird (vgl. die Einleitung!). Ist $f$ eine Funktion, die über einem Abschnitt $A$ der Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen definiert ist und $0 \leqq f(\nu) \leqq \nu$ für $\nu \in A$ erfüllt, so heiße $f$ eine $Z'$-Funktion. Aus Satz 3. 1 ergibt sich dann fast unmittelbar:

**Satz 3. 1′.** *Ist $f$ eine $Z'$-Funktion über $\{0, 1, \ldots, 2^n-1\}$, so gibt es $n+1$ viele Zahlen des Definitionsbereiches, über deren Menge $f(\nu)$ und $\nu-f(\nu)$ monoton steigen.*

Zum Beweise braucht man nur die Kurvenpunkte zu $f$ um 1 nach rechts und zugleich um 1 nach oben zu verschieben. Auf das „verschobene" $f$ läßt sich dann Satz 3. 1 anwenden. Geht man wieder zurück, nach $f$, so erhält man Satz 3. 1′.

Für Zitierwecke notieren wir nochmals die in Satz 3. 1 enthaltene Teilaussage:

**Satz 3. 2.** *Eine $Z$-Funktion über $\{1, \ldots, 2^n\}$ steigt monoton über einer $(n+1)$-elementigen Teilmenge.*

## 4. Schärfebetrachtungen

Es ergibt sich nun die Frage, ob die Sätze 3. 1 und 3. 2 scharf sind. Das ist in der Tat der Fall, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 4. 1.** *$n$ sei eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine Z-Funktion $f$ über $\{1, \ldots, 2^n-1\}$, zu der es keine Teilmenge der Mächtigkeit $n+1$ gibt, über der $f$ monoton steigt (geschweige denn $f(\nu)$ und die Funktion $\nu-f(\nu)$).*

BEWEIS. Es sei $F$ wie folgt definiert: Ist $m$ eine nicht-negative ganze Zahl, so sei $F(2^m+\nu)=2^m-\nu$ für $\nu=0, 1, 2, \ldots, 2^m-1$. Dann ist $F$ eindeutig über der Menge der natürlichen Zahlen definiert. Ist $f$ die auf $\{1, \ldots, 2^n-1\}$ eigenschränkte Funktion $F$, so genügt $f$ offenbar der Aussage des Satzes.

Damit hat sich insbesondere folgende überraschende Tatsache ergeben: Sind $z(n)$ (bzw. $z^*(n)$) die kleinsten natürlichen Zahlen, so daß es zu jeder $Z$-Funktion $f$ über $\{1, \ldots, z(n)\}$ (bzw. über $\{1, \ldots, z^*(n)\}$) immer eine Teilmenge des Definitionsbereichs von $f$ von der Mächtigkeit $n$ gibt, über der $f(\nu)$ (bzw. $f(\nu)$ und $\nu-f(\nu)$) monoton steigen, so sind $z(n)$ und $z^*(n)$ dieselben Funktionen. Daß $z(n) \leqq z^*(n)$ ist, ist zwar trivial. Daß aber sogar Gleichheit gilt, kommt unerwartet, da für $z^*(n)$ mehr gefordert wird als für $z(n)$. Die Sätze 3. 1, 3. 2 und 4. 1 bestimmen die Funktionen $z(n)$, $z^*(n)$ zu

$$z(n)=z^*(n)=2^{n-1}.$$

Übrigens kann man den Satz 4. 1 noch wie folgt verschärfen:

**Satz 4. 2.** *Es gibt genau eine Z-Funktion $f$ über $\{1, \ldots, 2^n-1\}$, zu der es keine Teilmenge der Mächtigkeit $n+1$ gibt, über der $f$ monoton steigt. Also ist $F$, $\{1, \ldots 2^n-1\}$ die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft.*

BEWEIS. Für $n=1$ ist dies klar. Die Behauptung treffe nun zu für ein $n \geqq 1$. Ist jetzt $f$ eine $Z$-Funktion über $\{1 \ldots, 2^{n+1}-1\}$, die über keiner $(n+2)$-elementigen Teilmenge monoton steigt, so folgt

(III) *Es gibt $2^n$ verschiedene Punkte in $P(f)$, die jeweils Ende einer R-Kette der Länge $n+1$ sind.*

Denn wenn $f$ über keiner $(n+2)$-elementigen Teilmenge monoton steigt, gibt es in $P(f)$ erst recht keine $R$-Kette der Länge $n+2$, und dann folgt (III) sofort aus Lemma 3. 1 (mit $\nu=2^n-1$).

Weiter ergibt sich: Von je $2^n$ Punkten, die (III) genügen, darf keiner im rechten oberen Quadranten eines anderen solchen Punktes liegen. Sonst ließe sich ja an Hand einer Kette der Länge $n+1$, die den am weitesten links liegenden der zwei Punkte als Ende hätte, und dem zweiten Punkt eine Teilmenge der Mächtigkeit $(n+1)+1$ konstruieren, über der $f$ monoton steigend wäre mit Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich sind $2^n$ Punkte, die (III) erfüllen, „fallend angeordnet", und man hat:

(IV) *Es gibt eine Teilmenge $x_1<x_2<\ldots<x_{2^n}$ von $2^n$ Zahlen des Definitionsbereichs von $f$, über der $f$ streng monoton fällt.*

Nun gilt allgemein, wie man sich leicht klarmacht:

(V) *Wenn man über einem Definitionsbereich $\{1, \ldots, 2k-1\}$ ($k$ nat. Zahl) eine Z-Funktion $f$ hat, zu der es eine $k$-elementige Teilmenge gibt, über der $f$ streng monoton fällt, so folgt notwendig*

$$f(k+\nu) = k-\nu \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

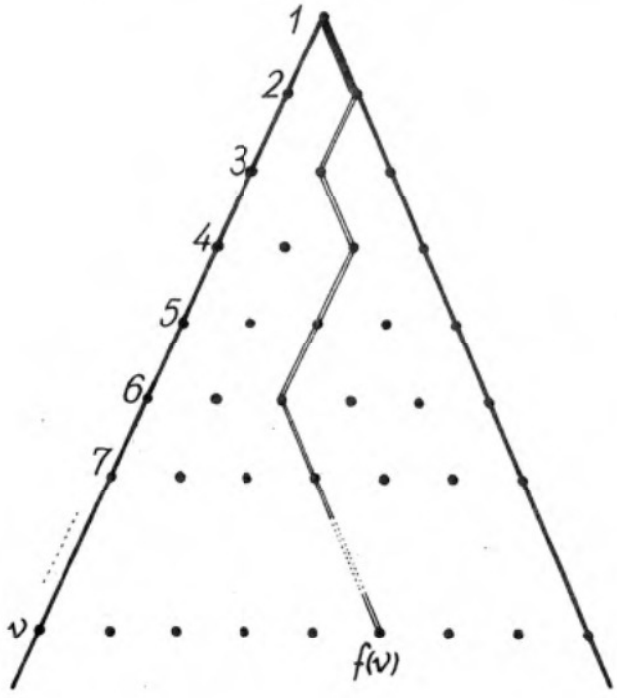
Aus (IV) und (V) ergibt sich dann unmittelbar: Es ist $f=F$ über $\{2^n, 2^n+1, 2^n+2, \ldots, 2^{n+1}-1\}$.

Weiter darf es zu dem auf $\{1, \ldots, 2^n-1\}$ eigeschränkten $f$ keine $(n+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 2^n-1\}$ geben, über der $f$ monoton steigt, da eine solche sonst wegen $f(2^n)=2^n$ durch Hinzunahme des Elementes $2^n$ zu einer $(n+2)$-elementigen Teilmenge von $\{1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ würde, über der $f$ monoton steigt. Nach Induktionsannahme ist dann $f=F$ über $\{1, 2, \ldots, 2^n-1\}$. Also ist schließlich $f=F$ über dem ganzen $\{1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$, was zu zeigen war.

Ein solcher Einzigkeitssatz wie Satz 4. 2 gilt jedoch nicht mehr, wenn man die Monotonie von $f$ und die von $\nu - f(\nu)$ in Betracht zieht. Denn ist z.B. $n=2$ und $f$ definiert durch $f(1)=1$; $f(2)=1$; $f(3)=3$, so ist $f$ eine über $\{1, \ldots, 2^2-1\}$ definierte Funktion, die dort von $F$ verschieden ist, zu der es aber ebenfalls keine $R$-Kette mit einer Länge $>2$ gibt.

## 5. Z-Funktionen und Galtonwege

Man kann die bisherigen Resultate noch etwas illustrieren, indem man Galton-Wege heranzieht. Wir wollen dies anschaulich beschreiben. Wir denken uns ein Galton'sches Brett gegeben, mit dem man die Gauss-sche Glockenkurve $\exp(-x^2)$ experimentell erzeugen kann. Wir identifizieren nun die linke Begrenzungsstrecke $s$ mit einem Stück der positiven $x$-Achse, das bei 1 beginnt. Den Verlauf einer durch das Brett fallenden Kugel, also einen Galton-Weg, kann man nun durch eine Funktion $f(\nu)$ beschreiben, wo diese wie folgt bestimmt ist: In der $\nu$-ten Zeile des



Brettes trifft die fallende Kugel den $f(\nu)$-ten Punkt (von links gezählt). Es ist dann $1 \leqq f(\nu) \leqq \nu$, also $f$ eine $Z$-Funktion. Jedoch gilt noch wesentlich mehr für $f$, nämlich die Bedingung (1) der Einleitung, also

$$f(\nu+1) = f(\nu) \quad \textit{oder} \quad f(\nu+1) = f(\nu)+1 \tag{1}$$

für alle Zahlen $\nu+1$ des Definitionsbereichs von $f$. Also ist $f$ über seinem ganzen Definitionsbereich monoton steigend, und dasselbe gilt für die Funktion $\nu - f(\nu)$. Umgekehrt entspricht jeder (1) genügenden $Z$-Funktion genau ein Galton-Weg.

Man könnte also die $Z$-Funktionen, die über ihrem Definitionsbereich der Bedingung (1) genügen, kurz Galton-Funktionen nennen, und der Satz 3. 1 läßt sich dann auch so formulieren:

**Satz 5. 1.** *Ist $f$ eine $Z$-Funktion über $\{1, \ldots, 2^n\}$, so gibt es stets eine Galton-Funktion über $\{1, \ldots, 2^n\}$, mit der $f$ an mindestens $n+1$ Stellen übereinstimmt.*

Denn es gibt eine Teilmenge $T$ der Mächtigkeit $n+1$ von $\{1, \ldots, 2^n\}$, über der $f$ sowie $\nu - f(\nu)$ monoton steigen, und man kann dann ganz leicht eine $Z$-Funktion $g$ über $\{1, \ldots, 2^n\}$ definieren, die (1) genügt und $g(\nu) = f(\nu)$ über $T$ erfüllt.

## 6. Abschließende Bemerkungen.

Der Satz 3. 1 erinnert etwas an einen Satz von ERDŐS und SZEKERES (vgl. [2]!), welcher sich so formulieren läßt:

*Hat man eine Funktion $f$, die jeder natürlichen Zahl aus $\{1, 2, 3, \ldots, n^2+1\}$ eine beliebige reelle Zahl zuordnet, so gibt es eine $(n+1)$-elementige Teilmenge, über der $f$ monoton ist (steigend oder fallend). Diese Aussage ist scharf.*

Es sei ohne Beweis erwähnt, daß sich diese Aussage auch für den Fall, daß $f$ speziell eine $Z$-Funktion ist, nicht wesentlich verschärfen läßt. Die Größenordnung der Mächtigkeit der „monotonen Teilmengen" ist auch da nicht größer als $\sqrt{n}$, wenn $f$ über $\{1, \ldots, n\}$ gegeben ist.

Schließlich kann man den Fall in Betracht ziehen, wo man Abschnitte der Ordinalzahlreihe statt der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereiche hat. Dazu erhält man, sozusagen als Korollar zu einem Satze von Alexandroff—Urysohn (vgl. [1]!):

**Satz 6. 1.** *Es sei eine Anfangszahl $\omega_{\alpha+1}$ vorgegeben sowie eine Funktion $f$, die jedem $\xi < \omega_{\alpha+1}$ eine Ordinalzahl $f(\xi) \leqq \xi$ zuordnet. Dann gibt es eine Teilmenge $T$ von $\{\xi | \xi < \omega_{\alpha+1}\}$ der Mächtigkeit $|T| = \aleph_{\alpha+1}$, über der $f(\xi) = \xi$ oder aber $f(\xi)$ konstant ist.*

## Literatur

[1] P. ALEXANDROFF und P. URYSOHN, Mémoire sur les espaces topologiques compacts. *Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Sect.* I, **14** (1929), 1—93.

[2] P. ERDŐS und G. SZEKERES, A combinatorial problem in geometry *Comp. Math.* **2** (1935) 463—470.

[3] E. HARZHEIM, Ein kombinatorisches Problem über Auswahlfunktionen.

*(Eingegangen am 5. Januar 1966.)*