

Ядра неприводимых представлений силовой p -подгруппы S_3 симметрической группы $\mathcal{S}_{p^3}$

К. БУЗАШИ (Дебрецен)*

Одной из важных задач теории групп является задача описания всех нормальных делителей заданной группы.

В работах Л. Калужнина [3], [4] описаны все характеристические подгруппы силовой p -подгруппы симметрической группы $\mathcal{S}_{p^n}$ (p -простое число). В работах А. И. Вейра [5], [7] описываются характеристические подгруппы силовой p -подгруппы классических матричных групп над конечными полями.

Среди нормальных делителей конечной группы особую роль играют ядра неприводимых комплексных представлений, так как любой нормальный делитель группы может быть представлен в виде пересечения некоторых из этих ядер. В работе С. Д. Бермана [1] указан общий алгоритм для построения ядер неприводимых представлений произвольной конечной нильпотентной группы. В его же работе [2] этот метод применяется для построения всех ядер неприводимых представлений для группы G' всех треугольных матриц порядка n над простым полем, что, в свою очередь, позволяет найти всевозможные их пересечения, то есть все нормальные делители группы G' .

Силовые p -подгруппы S_n симметрической группы $\mathcal{S}_{p^n}$, наряду с группой треугольных матриц, являются универсальными p -подгруппами, поэтому большой интерес представляет описание всех нормальных делителей этой группы. Описание ядер всех неприводимых представлений силовой p -подгруппы S_n симметрической группы $\mathcal{S}_{p^n}$ является важным средством для нахождения всех нормальных делителей группы в виде всевозможных пересечений этих ядер.

Настоящая работа решает поставленную задачу для группы $\mathcal{S}_{p^n}$ в случае $n \leq 3$. В работе используется упомянутый выше алгоритм работы [1] и с помощью этого метода даётся описание ядер всех неприводимых комплексных представлений силовой p -подгруппы симметрической группы $\mathcal{S}_{p^n}$ при $n \leq 3$.

*) K. Buzási (Debrecen).

§ 2.

Некоторые замечания о структуре сплетения трёх
циклических групп простого порядка

В этом параграфе даются некоторые соотношения между базисными элементами рассматриваемого класса конечных групп. Исследуются взаимные коммутаторы элементов группы и даются очень важные для дальнейших рассуждений формулы и факты.

Пусть G является силовой p -подгруппой симметрической группы $\mathcal{S}_3$, то есть является сплетением трёх циклических групп простого порядка p , и задаётся определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} a_{11}^p &= e, \dots, a_{1p}^p = e, \quad a_{21}^p = e, \dots, a_{2p}^p = e, \dots, a_{p1}^p = \\ &= e, \dots, a_{pp}^p = e, \quad b_1^p = e, \dots, b_p^p = e, \quad c^p = e \\ (2.1) \quad b_i^{-1} a_{kl} b_i &= \begin{cases} a_{kl}, & \text{если } i \neq k; \\ a_{kl+1}, & \text{если } i = k; \end{cases} \quad (\text{число } l \text{ приводится по mod } p), \\ c^{-1} a_{kl} c &= a_{k+1, l} \quad (l = 1, \dots, p; k \text{ приводится по mod } p), \\ c^{-1} b_i c &= b_{i+1} \quad (i \text{ приводится по mod } p). \end{aligned}$$

Введём новый базис, предложенный Вейром в работе [2]:

Очевидно, элемент $x = cb_1$ имеет порядок p^2 . Определим элементы

$$y_1 = a_{11}; \quad y_i = x^{-1} y_{i-1} x \quad (i = 2, 3, \dots, p^2).$$

Тогда элементы

$$(2.2) \quad \alpha_1 = y_1; \quad \alpha_i = (x, \alpha_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, p^2)$$

образуют базис подгруппы $A = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{pp}\}$, а элементы

$$\beta_1 = b_1; \quad \beta_i = (x, \beta_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, p)$$

— базис подгруппы $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$. Значит вся группа G является полупрямым произведением

$$G = A \cdot B \cdot \{x\}.$$

В обозначениях (2.1) и (2.2) группа G имеет следующий центральный ряд [2]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \{\alpha_{p^2}\} \subset \{\alpha_{p^2}, \alpha_{p^2-1}\} \subset \dots \subset \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_{p+1}\} \subset \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_p\} \cdot \{\beta_p\} \subset \\ \dots \subset \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_2\} \cdot \{\beta_p, \dots, \beta_2\}. \end{aligned}$$

Он является и верхним, и нижним.

Положим

$$A_i = \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_i\}; \quad B_j = \{\beta_p, \dots, \beta_j\}; \quad (i = 2, \dots, p^2)$$

$$A = \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_1\}; \quad B = \{\beta_p, \dots, \beta_1\} \quad (j = 2, \dots, p)$$

Тогда центральный ряд (2.3) можно записать в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A_{p^2} \subset A_{p^2-1} \subset \dots \subset A_{p+1} \subset A_p \cdot B_p \subset A_{p-1} B_{p-1} \subset \dots \subset A_2 B_2 \subset \\ \subset A \cdot B \cdot \{x\} = G. \end{aligned}$$

Между базисными элементами группы A имеют место следующие важные двойственные соотношения (эти соотношения не зависят от числа циклических групп, участвующих в сплетении, и поэтому теорему мы сформулируем и докажем в общем виде).

Теорема 1. Пусть S_n -силовая p -подгруппа симметрической группы $\mathcal{S}_n$ и имеет место $S_{n+1} \cong A^{(n)} S_n$, где $A^{(n)}$ — элементарная абелева группа порядка p^n . Пусть элемент $x \in A^{(n)}$ имеет порядок p^n , а $y_1, y_2, \dots, y_{p^n}$ такие элементы из $A^{(n)}$, что $y_i = x^{-1} y_{i-1} x$ ($i = 2, \dots, p^n$). Тогда в обозначениях $\alpha_1 = y_1$, $\alpha_j = (x, \alpha_{j-1})$ ($j = 2, 3, \dots, p^n$) имеют место двойственные формулы

$$\alpha_i = \prod_{v=1}^i y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-1}^{v-1}}; \quad y_i = \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} C_{i-1}^{v-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, p^n)$$

где C_{i-1}^{v-1} — коэффициенты бинома Ньютона.

Доказательство. Докажем сначала первую формулу. Формула очевидна для $i=1$. Предположим, что она уже доказана для всех натуральных чисел, меньших i ($1 \leq i \leq p^n$), и докажем для i . Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (x, \alpha_{i-1}) = x^{-1} \alpha_{i-1}^{-1} x \alpha_{i-1} = x^{-1} \left(\prod_{v=1}^{i-1} y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-2}^{v-1}} \right)^{-1} x \alpha_{i-1} = \\ &= \prod_{v=1}^{i-1} (x^{-1} \cdot y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-2}^{v-1}} \cdot x)^{-1} \cdot \alpha_{i-1} = \prod_{v=1}^{i-1} (y_{v+1}^{(-1)^{v-1} C_{i-2}^{v-1}})^{-1} \cdot \alpha_{i-1} = \\ &= \prod_{v=2}^i y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-2}^{v-2}} \cdot \prod_{v=1}^{i-1} y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-2}^{v-2}} = y_1 \cdot \prod_{v=2}^{i-1} y_v^{(-1)^{v-1} [C_{i-2}^{v-2} + C_{i-2}^{v-1}]} \cdot y_i^{(-1)^{i-1}} = \\ &= y_1 \cdot \prod_{v=2}^{i-1} y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-1}^{v-1}} \cdot y_i^{(-1)^{i-1}} = \prod_{v=1}^i y_v^{(-1)^{v-1} C_{i-1}^{v-1}}. \end{aligned}$$

В доказательстве мы пользовались определениями (2.1), (2.2) и известным свойством биномиальных коэффициентов

$$C_{i-2}^{v-2} + C_{i-2}^{v-1} = C_{i-1}^{v-1}.$$

Теперь докажем вторую формулу, пользуясь также индуктивным методом.

Формула верна для $i=1$. Тогда, используя предположение индукции, получим

$$\begin{aligned}
 y_i &= x^{-1} y_{i-1} x = x^{-1} \prod_{v=1}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} \cdot x = \prod_{v=1}^{i-1} x^{-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} \cdot x = \\
 &= \prod_{v=1}^{i-1} (x^{-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} x \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}}) \cdot \prod_{v=1}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} = \\
 &= \prod_{v=1}^{i-1} (x, \alpha_v^{-1})^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} \cdot \prod_{v=1}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} = \prod_{v=1}^{i-1} \alpha_{v+1}^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} \prod_{v=1}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} = \\
 &= \prod_{v=2}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} \cdot \prod_{v=1}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-2}^{v-1}} = \alpha_1 \cdot \left(\prod_{v=2}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} [c_{i-2}^{v-1} + c_{i-2}^{v-1}]} \right) \cdot \alpha_i^{(-1)^{i-1}} = \\
 &= \alpha_1 \prod_{v=2}^{i-1} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-1}^{v-1}} \cdot \alpha_i^{(-1)^{i-1}} = \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-1}^{v-1}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим, что условия теоремы всегда выполняются, так как в S_n всегда найдётся такой элемент x , который имеет порядок p^n , а в $A^{(n)}$ всегда можно подобрать элементы $y_1, y_2, \dots, y_n$ удовлетворяющие условиям теоремы.

Таким образом, для группы G имеют место в обозначениях (2. 2) следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 (2. 5) \quad \alpha_i &= \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-1}^{v-1}}; \quad y_i = \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-1}^{v-1}}; \quad (i = 1, 2, \dots, p^2) \\
 \beta_j &= \prod_{v=1}^j b_v^{(-1)^{v-1} c_{j-1}^{v-1}}; \quad b_j = \prod_{v=1}^j \beta_v^{(-1)^{v-1} c_{j-1}^{v-1}}; \quad (j = 1, 2, \dots, p).
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим некоторые свойства взаимных коммутаторов элементов группы G .

Лемма 2. $(b_i, \alpha_m) \in \{\alpha_{p^2}, \alpha_{p^2-1}, \dots, \alpha_{p+1}\}$ для всех $1 \leq i \leq p$ и $1 \leq m \leq p$.

Доказательство. Ввиду (2. 5),

$$(b_i, \alpha_m) = \left(b_i, \prod_{v=1}^m y_v^{(-1)^{v-1} c_{m-1}^{v-1}} \right) = (y_i \cdot y_{p+i}^{-1})^{(-1)^{i-1} c_{m-1}^{i-1}},$$

так как имеет место очевидная формула

$$b_i^{-1} \cdot y_{k+p+r} \cdot b_i = \begin{cases} e, & r \neq i \\ y_{(k+1)p+r}, & r = i, \end{cases}$$

а в запись α_m при $1 \leq m \leq p$ входят только степени элементов $y_1, y_2, \dots, y_m$. Тогда

$$\begin{aligned}
 y_i \cdot y_{p+i}^{-1} &= \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{i-1}^{v-1}} \cdot \prod_{v=1}^{p+i} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{p+i-1}^{v-1}} = \\
 &= \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} [c_{i-1}^{v-1} - c_{p+i-1}^{v-1}]} \cdot \prod_{v=i+1}^p \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{p+i-1}^{v-1}} \cdot \prod_{v=p+1}^{p+i} \alpha_v^{(-1)^{v-1} c_{p+i-1}^{v-1}}.
 \end{aligned}$$

Положим

$$K_1 = \prod_{v=1}^i \alpha_v^{(-1)^{v-1} [C_{i-1}^{v-1} - C_{p+i-1}^{v-1}]}; \quad K_2 = \prod_{v=i+1}^p \alpha_v^{(-1)^{v-1} C_{p+i-1}^{v-1}};$$

$$K_3 = \prod_{v=p+1}^{p+i} \alpha_v^{(-1)^{v-1} C_{p+i-1}^{v-1}}.$$

Имеем

$$C_{i-1}^{v-1} - C_{p+i-1}^{v-1} = \frac{(i-1)(i-2) \cdot \dots \cdot [i-(v-1)]}{(v-1)!} - \frac{[p+(i-1)] \cdot \dots \cdot [p+(i-v+1)]}{(v-1)!} =$$

$$= \frac{-p^{(v-1)} - p^{v-2} R_{v-2} - p^{v-3} \cdot R_{v-3} - \dots - p R_1}{(v-1)!} = \frac{p R}{(v-1)!} \equiv 0 \pmod{p},$$

так как $v \leq p$ при $i \leq p$, поэтому показатель элемента α_v делится на p . Точно так же

$$C_{p+i-1}^{v-1} = \frac{[p+(i-1)] \cdot [p+(i-2)] \cdot \dots \cdot [p+(i-v+1)]}{(v-1)!},$$

ибо при $p \geq v > i$ в числителе содержится более чем $i-1$ множителей, значит один из них должен совпадать с p , а $v \leq p$. Следовательно, элемент

$$y_i \cdot y_{p+i}^{-1} = \prod_{v=p+1}^{p+i} \alpha_v^{(-1)^{v-1} C_{p+i-1}^{v-1}}$$

принадлежит прямому произведению циклических подгрупп, порождённых элементами $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_{p^2}$. Лемма 2. доказана.

Замечание: Для элемента α_m , где $m > p$, лемма 2 также справедлива.

Это непосредственно вытекает из строения центрального ряда (2.4) группы G . Действительно, для любого $m > p$ из того, что A_m/A_{m+1} является центром фактогруппы G/A_{m+1} , следует, что $(b_i, \alpha_m) \in A_{m+1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, p$.

Следствие 3. $(\beta_i, \alpha_m) \in A_{p+1}$ для всех $1 \leq i, m \leq p$.

Доказательство. Рассмотрим элемент

$$(b_v b_\mu, \alpha_m) = b_\mu^{-1} (b_v, \alpha_m) b_\mu (b_\mu, \alpha_m) = (b_\mu, (b_v, \alpha_m)^{-1}) \cdot (b_v, \alpha_m) \cdot (b_\mu, \alpha_m).$$

Так как α_i принадлежит абелевому нормальному делителю A , то

$$(b_\mu, \alpha_i \cdot \alpha_j) = (b_\mu, \alpha_i) \cdot (b_\mu, \alpha_j).$$

По Лемме 2.

$$(b_v, \alpha_m) \in A_{p+1},$$

и значит

$$(b_v, \alpha_m)^{-1} = \alpha_{p^2}^{k_{p^2}} \cdot \dots \cdot \alpha_{p+1}^{k_{p+1}}.$$

Следовательно

$$(b_\mu, (b_v, \alpha_m)^{-1}) = (b_\mu, \alpha_{p^2}^{k_{p^2}} \cdot \dots \cdot \alpha_{p+1}^{k_{p+1}}) = (b_\mu, \alpha_{p^2}^{k_{p^2}}) \cdot \dots \cdot (b_\mu, \alpha_{p+1}^{k_{p+1}}) =$$

$$= (b_\mu, \alpha_{p^2})^{k_{p^2}} \cdot \dots \cdot (b_\mu, \alpha_{p+1})^{k_{p+1}},$$

причём каждый из взаимных коммутаторов, в силу замечания к лемме 2, лежит в A_{p+1} .

Коммутаторы (b_v, α_m) и (b_μ, α_m) по лемме 2 лежат в A_{p+1} . Значит $(b_v \cdot b_\mu, \alpha_m) \in A_{p+1}$ для всех $v, m = 1, 2, \dots, p$.

Применяя этот результат к (β_i, α_m) , имеем:

$$(\beta_i, \alpha_m) = \left(\prod_{v=1}^i b_v^{(-1)^{v-1} c_i^{v-1}}, \alpha_m \right) \in A_{p+1}.$$

Следствие 3. доказано.

Следствие 4. $(\beta_i, \alpha_m) \in A_{p+1}$ для всех $1 \leq i \leq p$ и $1 \leq m \leq p^2$.

Доказательство очевидно, так как ввиду следствия 3 можно рассмотреть только случай $p < m \leq p^2$. Но это уже следует из строения центрального ряда (2. 4) группы G так же, как в доказательстве замечания к лемме 2.

Следствие 5. $(\beta_i^v, \alpha_m) \in A_{p+1}$ для всех $1 \leq i \leq p$, $1 \leq m \leq p^2$ и $1 \leq v < p$.

Доказательство. Применим метод индукции по v . При $v=1$, в силу следствия 4. утверждение верно. Предположим, что $(\beta_i^{v-1}, \alpha_m) \in A_{p+1}$.

Тогда

$$(\beta_i^v, \alpha_m) = (\beta_i \cdot \beta_i^{v-1}, \alpha_m) = (\beta_i^{v-1}(\alpha_m, \beta_i)) \cdot (\beta_i, \alpha_m) \cdot (\beta_i^{v-1}, \alpha_m).$$

Множитель (β_i, α_m) на основании следствия 4 принадлежит подгруппе A_{p+1} , а по предположению индукции $(\beta_i^{v-1}, \alpha_m) \in A_{p+1}$. Осталось показать, что $(\beta_i^{v-1}, (\alpha_m, \beta_i)) \in A_{p+1}$.

По следствию 4 $(\alpha_m, \beta_i) \in A_{p+1}$, и, значит

$$(\alpha_m, \beta_i) = \alpha_{p^2}^{\delta_{p^2}} \cdot \dots \cdot \alpha_{p+1}^{\delta_{p+1}}.$$

Но $\alpha_j \in A_{p+1}$ ($j = p+1, \dots, p^2$), где A_{p+1} — абелев нормальный делитель группы G , поэтому

$$(\beta_i^{v-1}, (\alpha_m, \beta_i)) = (\beta_i^{v-1}, \alpha_{p^2}^{\delta_{p^2}}) \cdot \dots \cdot (\beta_i^{v-1}, \alpha_{p+1}^{\delta_{p+1}}) = (\beta_i^{v-1}, \alpha_{p^2})^{\delta_{p^2}} \cdot \dots \cdot (\beta_i^{v-1}, \alpha_{p+1})^{\delta_{p+1}},$$

где каждый сомножитель лежит уже в A_{p+1} по предположению индукции. Следствие 5 доказано.

Попутно нами доказано

Следствие 6. $(\beta_i^v, a) \in A_{p+1}$ для всех $1 \leq i \leq p$, $1 \leq v \leq p$, $a \in A$.

Используя предыдущие утверждения, можно доказать следующую теорему, которая будет многократно применяться в дальнейших рассуждениях.

Теорема 7. $(b, a) \in A_{p+1}$ для всех $b \in B$, $a \in A$.

Доказательство. Элемент b можно представить в виде

$$b = \beta_p^{\mu_p} \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}} \cdot \dots \cdot \beta_1^{\mu_1}.$$

Доказательство проведём методом индукции по числу множителей $b_i^{\mu_i}$ в выражении элемента b .

Имеем

$$(a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \beta_2^{\mu_2}) = (a, \beta_2^{\mu_2}) \cdot (a, \beta_1^{\mu_1}) \cdot ((a, \beta_1^{\mu_1}), \beta_2^{\mu_2}).$$

По следствию 6., элементы $(a, \beta_2^{\mu_2})$ и $(a, \beta_1^{\mu_1})$ лежат в A_{p+1} , и, следовательно $((a, \beta_1^{\mu_1}), \beta_2^{\mu_2}) \in A_{p+1}$.

Предположим, что

$$(a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}}) \in A_{p+1}.$$

Тогда

$$(a, b) = (a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}} \cdot \beta_p^{\mu_p}) = (a, \beta_p^{\mu_p}) \cdot (a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}}) \cdot ((a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}}), \beta_p^{\mu_p}).$$

Элемент $(a, \beta_p^{\mu_p})$ по следствию 6 лежит в A_{p+1} ; второй множитель по предположению индукции также лежит в A_{p+1} , и, снова применяя следствие 6., получим, что третий множитель принадлежит подгруппе A_{p+1} . Теорема доказана.

§ 3.

Линейные части характеров неприводимых представлений рассматриваемой группы G

В этом параграфе мы будем пользоваться обозначениями предыдущего параграфа. Найдём полную систему линейных частей характеров неприводимых представлений группы G . Вычисление характеров производится методом продолжения характеров, предложенным С. Д. Берманом в работе [1].

Метод заключается в следующем. Пусть дана конечная нильпотентная группа G_1 . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_r$ — характеры центра Z группы G_1 . Определим ядро H_i для каждого характера x_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Рассмотрим факторгруппу G_1/H_i по подгруппе H_i . Построим такую группу A_i , для которой факторгруппа A_i/H_i является центром факторгруппы G_1/H_i . Характер x_i линейно продолжим (в смысле [1]) в подгруппе A_i . Пусть таким продолжениями характера x_i в группе A_i являются характеры $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$.

Найдём ядро H_{ij} для каждого характера x_{ij} и построим такую группу A_{ij} , для которой факторгруппа A_{ij}/H_{ij} является центром факторгруппы G_1/H_{ij} , затем линейно продолжим характер x_{ij} в группе A_{ij} .

С полученными характерами потом поступим опять так же. И т. д. После конечного числа шагов получим все линейные части характеров комплексных представлений группы G_1 .

В дальнейшем фразу „линейное продолжение” характеров будем понимать в смысле работы [1].

Введём обозначения для характеров:

(k_j) будет означать характер подгруппы A_k , принимающий значение 1 на всех базисных элементах α_i ($i = k+1, k+2, \dots, p^2$) и значение ξ^j на элементе α_k (ξ — первообразный корень p -ой степени из единицы, $j = 0, 1, \dots, p-1$).

(k_i, r_j) — характер подгруппы $A_k B_r$, принимающий значение 1 на всех α_m, β_n ($m = k+1, \dots, p^2$; $n = r+1, \dots, p$), на α_k равный ξ^i , и ξ^j на β_r ($i, j = 0, 1, \dots, p-1$). (k_j^q, r_i) означает характер подгруппы

$$A_k \cdot B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^q \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^q, \dots, \beta_{r-\sigma}^q \alpha_{k-\sigma} \text{ (при нечётном } \sigma) \right. \\ \left. \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^q \text{ (при чётном } \sigma) \right\},$$

равный 1 на всех элементах α_m, β_n ($m = k+1, \dots, p^2$; $n = r+1, \dots, p$),

$$\beta_{r-\mu}^\nu \alpha_{k-\mu} \left(\mu = 1, 3, \dots, \begin{matrix} \sigma - 2 \text{ (нечётн. } \sigma) \\ \sigma - 1 \text{ (чётное } \sigma) \end{matrix} \right),$$

$$\alpha_{k-\lambda} \beta_{r-\lambda}^\nu \left(\lambda = 2, 4, \dots, \begin{matrix} \sigma - 1, (\sigma - \text{нечётное}) \\ \sigma, (\sigma - \text{чётное}) \end{matrix} \right),$$

но на $\alpha_k; \beta_r$ равный $\xi^j; \xi^i$, на $\alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma} - \xi^l$ (при чётном σ) и на $\beta_{r-\sigma} \alpha_{k-\sigma} - \xi^l$ (при нечётном σ), где $i, j = 1, 2, \dots, p-1$; $l = 0, 1, \dots, p-1$.

$(k_i, r_j, 1_l)$ означает характер группы $A_k \cdot B_r \cdot \{x\}$, принимающий значение 1 на всех элементах α_m, β_n ($m = k+1, \dots, p^2$; $n = r+1, \dots, p$), но принимающий значение ξ^i на α_k , значение ξ^j на β_r и значение ξ^l на x ($i, j, l = 0, 1, \dots, p-1$).

При этих обозначениях имеют место следующие факты:

Теорема 8. Характер (k_0) подгруппы A_k имеет продолжения вида $(k-1_j)$ в подгруппе A_{k-1} для всех $p+1 < k \leq p^2$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$).

Доказательство. Ядром характера (k_0) является подгруппа A_k . Согласно (2.4), центром факторгруппы G/A_k является факторгруппа A_{k-1}/A_k ; поэтому подгруппой, в которой характер (k_0) может иметь продолжения, является подгруппа A_{k-1} . В этой подгруппе все продолжения характера (k_0) имеют вид $(k-1_j)$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$).

Теорема 9. Характер (k_j) подгруппы A_k не имеет продолжения ни в одной подгруппе группы G , для всех $p+1 \leq k \leq p^2$ ($j = 1, 2, \dots, p-1$).

Доказательство. Ядром характера (k_j) является подгруппа A_{k+1} . Так как, ввиду (2.4), A_k/A_{k+1} является центром факторгруппы G/A_{k+1} , и подгруппой, в которой характер (k_j) может иметь продолжения, является только A_k , в которой характер (k_j) уже определён. Теорема доказана.

Теорема 10. Характер $(p+1_0)$ подгруппы A_{p+1} имеет линейные продолжения (p_i, p_j) в подгруппе A_p, B_p ($i, j = 0, 1, \dots, p-1$).

Доказательство. Ядром характера $(p+1_0)$ является подгруппа A_{p+1} . Поэтому подгруппой, в которой характер $(p+1_0)$ имеет линейные продолжения, является A_p, B_p . В этой подгруппе все линейные продолжения характера $(p+1_0)$ имеют вид (p_i, p_j) ($i, j = 0, 1, \dots, p-1$).

Теорема 11. Характер вида (k_0, k_0) подгруппы $A_k B_k$ имеет в качестве всех линейных продолжений в подгруппе $A_{k-1} B_{k-1}$ характеры типа $(k-1_i, k-1_j)$ ($i, j = 0, 1, \dots, p-1$) для всех $2 < k \leq p$.

Доказательство. Ядром характера (k_0, k_0) является подгруппа $A_k B_k$, поэтому, из строения центрального ряда (2.4) вытекает, что подгруппой, в которой характер (k_0, k_0) может иметь линейные продолжения, является подгруппа $A_{k-1} \cdot B_{k-1}$. В этой подгруппе все линейные продолжения характера (k_0, k_0) имеют вид $(k-1_i, k-1_j)$ ($i, j = 0, 1, \dots, p-1$). Теорема доказана.

Теорема 12. Все линейные продолжения характера $(2_0, 2_0)$ подгруппы $A_2 \cdot B_2$ в G имеют вид $(1_i, 1_j, 1_l)$ ($i, j, l = 0, 1, \dots, p-1$).

Доказательство: Ядром характера $(2_0, 2_0)$ является подгруппа $A_2 \cdot B_2$, поэтому, утверждение следует из строения центрального ряда (2.4).

Теорема 13. Характер вида (k_0, r_j) подгруппы $A_k \cdot B_r$ имеет в группе $A_{k-1}B_r$ в качестве всех линейных продолжений характеры типа $(k-1_i, r_j)$ ($i = 0, \dots, \dots, p-1, j = 1, \dots, p-1$) для всех $1 < k \leq p, 1 \leq r \leq p$.

Доказательство. Ядром характера (k_0, r_j) является подгруппа $A_k B_{r+1} = R$. Рассмотрим факторгруппу G/R . Она порождается смежными классами

$$\alpha_{k-1}R, \alpha_{k-2}R, \dots, \alpha_1R, \beta_rR, \beta_{r-1}R, \dots, \beta_1R, xR.$$

Покажем, что $\alpha_{k-1}R$ принадлежит центру Z факторгруппы G/R . Действительно, $(\alpha_{k-1}, \alpha_m) = e$ для всех $m = 1, 2, \dots, p^2$. Далее $(\alpha_{k-1}, \beta_n) \in A_{p+1} \subseteq R$ для всех $n = 1, 2, \dots, p$ и $1 < k \leq p$ (по Теореме 7.), а $(x, \alpha_{k-1}) = \alpha_k \in A_k \subseteq R$ по определению элементов α_i (2.2).

Кроме того $\beta_rR \in Z$, так как по Теореме 7., $(\beta_r, \alpha_m) \in A_{p+1} \subseteq R$ для всех $m = 1, 2, \dots, p^2$, и $(x, \beta_r) = \beta_{r+1} \in B_{r+1} \subseteq R$.

Очевидно, другие смежные классы, порождающие факторгруппу G/R , не принадлежат центру Z , так как, например, $(x, \alpha_m) = \alpha_{m+1} \notin R$ для всех $1 \leq m < k-1$, и $(x, \beta_n) = \beta_{n+1} \notin R$ для всех $1 \leq n < r$.

Покажем, что никакое произведение этих смежных классов ($\neq e$) не лежит в Z . В самом деле, для произвольного ($\neq e$) элемента $\alpha_{k-2}^{\sigma_{k-2}} \cdot \dots \cdot \alpha_1^{\sigma_1} \in \{\alpha_{k-2}, \dots, \alpha_1\}$ (σ_i — произвольные целые числа, $i = 1, 2, \dots, k-2$), имеем

$$(x, \alpha_{k-2}^{\sigma_{k-2}} \cdot \dots \cdot \alpha_1^{\sigma_1}) = \alpha_{k-1}^{\sigma_{k-2}} \cdot \dots \cdot \alpha_2^{\sigma_1} \notin R.$$

Точно так же можно показать, что $(x, \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \cdot \dots \cdot \beta_1^{\delta_1}) \notin R$ для любого элемента $\beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \cdot \dots \cdot \beta_1^{\delta_1} \neq e$.

Рассмотрим теперь произведение ba , где $b, a \neq e$,

$$a \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}\}, \quad b \in \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}\}.$$

Тогда

$$(x, ba) = (x, a) \cdot (x, b) \cdot ((x, b), a).$$

По теореме 7, множитель $((x, b), a) \in A_{p+1}$, где A_{p+1} — абелев нормальный делитель группы G . Поэтому найдётся такой элемент $a_{p+1} \in A_{p+1}$, что $(x, b) \cdot ((x, b), a) = a_{p+1}(x, b)$. Тогда

$$(x, ba) = a_{p+1}(x, a) \cdot (x, b).$$

Но $(x, b) \in \{\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_r\}$, и поэтому элемент (x, ba) не может принадлежать ядру $R = A_k B_{r+1}$.

Остаётся заметить, что произвольный элемент из G имеет вид $a_1 b_1 x$, но найдутся такие элементы a' и b' ($a_1, a' \in A, b_1, b' \in B$), что $a_1 b_1 x = x a' b'$. Тогда

$$(x, a_1 b_1 x) = (x, x a' b') = (x, a' b').$$

Здесь выполняется только $a' \in A$, $b' \in B$. Однако можно записать $a' = a_2 a_3$ и $b' = b_2 b_3$, где

$$a_3 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}\}, \quad b_3 \in \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}\}.$$

Значит в выражении

$$a'b' = a_2 a_3 b_2 b_3 = a_3 (a_2 b_2) b_3$$

элемент $a_2 b_2$ порождает смежный класс центра Z , следовательно, элемент $a'b'$ порождает смежный класс, принадлежащий Z тогда и только тогда, если $a_3 b_3 R \in Z$.

Таким образом, центром факторгруппы G/R является факторгруппа $A_{k-1} \cdot B_r / R$. Значит характер (k_0, r_j) линейно продолжается в подгруппе $A_{k-1} \cdot B_r$. Очевидно, все эти линейные продолжения имеют вид $(k-1_i, r_j)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p-1$). Теорема доказана.

Теорема 14. Характер типа (k_j, r_0) подгруппы $A_k \cdot B_r$ ($1 \leq j < p$) имеет в качестве всех линейных продолжений в подгруппе $A_k \cdot B_{r-1}$ характеры типа $(k_j, r-1_i)$ ($i = 0, 1, \dots, p-1$) для всех $1 < r \leq p$ и $r \leq k \leq p$.

Доказательство. Ядром характера (k_j, r_0) является подгруппа $A_{k+1} B_r = R$.

Очевидно, факторгруппа G/R порождается смежными классами $\alpha_k R$, $\alpha_{k-1} R, \dots, \alpha_1 R$, $\beta_{r-1} R, \beta_{r-2} R, \dots, \beta_1 R, xR$. Так же, как в доказательстве теоремы 13, можно показать, что классы $\alpha_k R$ и $\beta_{r-1} R$ принадлежат центру Z факторгруппы G/R , но $\alpha_{k-1} R, \dots, \alpha_1 R$ и никакое их произведение ($\neq R$), а также $\beta_{r-2} R, \dots, \beta_1 R$ и никакое их произведение ($\neq R$) не принадлежат Z . Далее можно показать, что произвольный элемент вида ba , где $b, a \neq e$

$$a \in \{\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \dots, \alpha_1\}, \quad b \in \{\beta_{r-2}, \beta_{r-3}, \dots, \beta_1\},$$

не может порождать смежный класс центра Z .

Отсюда уже следует теорема 14.

Теорема 15. Характер $(1_0, r_j)$ подгруппы $A \cdot B_r$ не имеет линейного продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < r \leq p$, $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Доказательство. Ядром характера $(1_0, r_j)$ является подгруппа $A \cdot B_{r+1} = R$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 13, можно показать, что центром факторгруппы G/R является $A \cdot B_r / R$, то есть подгруппой, в которой характер $(1_0, r_j)$ может иметь линейные продолжения, является подгруппа $A \cdot B_r$, в которой характер $(1_0, r_j)$ уже определён. Теорема доказана.

Точно так же доказывается следующая

Теорема 16. Характер $(k_j, 1_0)$ подгруппы $A_k B$ не имеет линейного продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < k \leq p$, $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Теорема 17. Характер $(k_i, 1_j)$ подгруппы $A_k B$ не имеет линейного продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < k \leq p$, $i, j = 1, 2, \dots, p-1$.

Доказательство. Рассмотрим характер (k_i, l_j) с фиксированными индексами k, i, j . Очевидно, ядром этого характера является подгруппа $A_{k+1} \cdot B_2\{\alpha_k \beta_1^v\}$ при $i+j \equiv 0 \pmod{p}$. Действительно,

$$(k_i, l_j)[\alpha_k \beta_1^v] = (k_i, l_j)[\alpha_k] \cdot [(k_i, l_j)[\beta_1]]^v = \xi^i \cdot [\xi^j]^v = \xi^{i+jv} = e.$$

Обозначим ядро через R и рассмотрим факторгруппу G/R . Очевидно, она порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \alpha_{k-1} R, \dots, \alpha_1 R, \beta_1 R, xR.$$

Легко показать, что смежные классы $\alpha_k R$ и $\beta_1 R$ принадлежат центру Z факторгруппы G/R , но ни другие смежные классы, порождающие G/R , ни их любое произведение ($\neq R$) не принадлежат центру Z .

Таким образом, факторгруппа $A_k B/R$ — центр факторгруппы G/R , значит подгруппой, в которой характер (k_i, l_j) может иметь линейные продолжения, является сама подгруппа $A_k \cdot B$, в которой характер (k_i, l_j) уже определен. Теорема 17 доказана.

Точно так же доказывается следующая

Теорема 18. Характер (l_i, r_j) подгруппы $A \cdot B_r$ не имеет линейные продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < r \leq p$; $i, j = 1, 2, \dots, p-1$.

Теорема 19. Характер вида (k_i, r_j) подгруппы $A_k \cdot B_r$ имеет в подгруппе $A_k \cdot B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}\}$ линейные продолжения вида $(k_i^{(l)}, r_j)$ ($l = 0, 1, \dots, p-1$) для всех $1 < k, r \leq p$, $1 \leq i, j < p$ при условии $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$.

Доказательство. Фиксируем индексы k, r, i, j . Тогда ядром характера (k_i, r_j) является подгруппа $A_{k+1} \cdot B_{r+1}\{\alpha_k \beta_r^v\} = R$ при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$.

Рассмотрим факторгруппу G/R . Она порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \alpha_{k-1} R, \dots, \alpha_1 R, \beta_r R, \beta_{r-1} \beta_1 R, xR.$$

Очевидно, смежные классы $\alpha_k R$ и $\beta_r R$ принадлежат центру Z факторгруппы G/R .

Покажем, что смежный класс $\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1} R$ также лежит в Z . Действительно

$$\begin{aligned} (x, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}) &= (x, \alpha_{k-1}) \cdot (x, \beta_{r-1}^v) \cdot ((x, \beta_{r-1}^v), \alpha_{k-1}) = \\ &= \alpha_k \beta_r^v ((x, \beta_{r-1}^v), \alpha_{k-1}) = a_{p+1} \alpha_k \beta_r^v \in R, \end{aligned}$$

так как по теореме 7 $((x, \beta_{r-1}^v), \alpha_{k-1}) \in A_{p+1}$, а A_{p+1} является нормальным делителем в G , поэтому найдётся такой элемент $a_{p+1} \in A_{p+1}$, что

$$\beta_r^v ((x, \beta_{r-1}^v), \alpha_{k-1}) = a_{p+1} \beta_r^v.$$

Покажем, что эти смежные классы порождают центр Z . Очевидно, смежные классы

$$\alpha_{k-1} R, \alpha_{k-2} R, \dots, \alpha_1 R, \beta_{r-1} R, \beta_{r-2} R, \dots, \beta_1 R, xR$$

не лежат в Z , также $\alpha_1^{v_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{k-1}^{v_{k-1}} R (\neq R) \notin Z$ и $\beta_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} R (\neq R) \notin Z$. Рассмотрим теперь произвольный смежный класс baR , где $b \in B, a \in A$, и покажем, что он принадлежит центру Z только тогда, если является некоторым произведе-

нием смежных классов $\alpha_k R$, $\beta_r R$, $\beta_{r-1}^\vee \alpha_{k-1} R$. Действительно, пусть $a \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}\}$, $b \in \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}\}$.

Покажем сначала, что если имеет место

$$b = \beta_1^{\delta_1} \beta_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}},$$

где хотя бы для одного $1 \leq n < r-1$ выполняется $\delta_n \not\equiv 0 \pmod{p}$, тогда смежный класс baR не лежит в центре Z . В самом деле,

$$b = \beta_n^{\delta_n} \cdot b_1, \quad \text{где} \quad b_1 = \beta_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \beta_{n-1}^{\delta_{n-1}} \cdot \beta_{n+1}^{\delta_{n+1}} \cdot \dots \cdot \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}},$$

значит

$$\begin{aligned} (x, ba) &= (x, \beta_n^{\delta_n} \cdot b_1 \cdot a) = (x, a) \cdot (x, b_1) \cdot (x, \beta_n^{\delta_n}) \cdot ((x, b), a) = \\ &= a'_{p+1}(x, a)(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n} \notin R, \end{aligned}$$

так как по теореме 7 $((x, b), a)$ принадлежит нормальному делителю A_{p+1} , значит найдётся такой элемент $a'_{p+1} \in A_{p+1}$, что

$$(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n} \cdot ((x, b), a) = a'_{p+1}(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n}.$$

Так как

$$(x, b_1) = \beta_2^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \beta_n^{\delta_{n-1}} \cdot \beta_{n+2}^{\delta_{n+1}} \cdot \dots \cdot \beta_r^{\delta_{r-1}},$$

значит произведение $(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n}$ содержит несократимый множитель $\beta_{n+1}^{\delta_n}$, не принадлежащий ядру R . Значит смежный класс baR может принадлежать центру Z только тогда, если имеет вид

$$\beta_{r-1}^\mu aR,$$

где $a \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}\}$.

Очевидно, достаточно рассматривать смежный класс вида $\beta_{r-1}^\vee aR$, где $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$, так как $\beta_{r-1}^\mu aR$ принадлежит центру Z факторгруппы G/R тогда и только тогда, если любой смежный класс вида $(\beta_{r-1}^\mu a)^m R$ ($m = 1, 2, \dots, p$) принадлежит центру Z . Но в циклической группе, порождённой элементом $\beta_{r-1}^\mu a$, найдётся элемент вида $\beta_{r-1}^\vee a'$, где $a' \in A$. Однако, как уже отмечалось, с точки зрения принадлежности смежного класса $\beta_{r-1}^\vee a' R$ центру Z достаточно рассматривать только смежный класс $\beta_{r-1}^\vee aR$, где элемент $a \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}\}$.

Но тогда

$$(x, \beta_{r-1}^\vee a) = (x, a) \cdot \beta_r^\vee \cdot ((x, \beta_{r-1}^\vee), a) = a''_{p+1}(x, a)\beta_r^\vee,$$

где $\beta_r^\vee((x, \beta_{r-1}^\vee), a) = a''_{p+1}\beta_r^\vee$ по теореме 7, (A_{p+1} — нормальный делитель в G), $(x, a) \in \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k\}$. Очевидно, элемент (x, a) можно представить в виде

$$(x, a) = a_1 \cdot \alpha_k,$$

где $a_1 \in \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k\}$ и $\alpha_k \beta_r^\vee \in \{\alpha_k \beta_r^\vee\}$. Имеем

$$(x, \beta_{r-1}^\vee a) = a''_{p+1} a_1 \alpha_k \beta_r^\vee$$

Очевидно, из $a_1 \in \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k\}$ следует, что $(x, \beta_{r-1}^\vee a) \in R$ только тогда, если $a_1 = e$, то есть $\beta_{r-1}^\vee a = \beta_{r-1}^\vee \alpha_{k-1}$, что и требовалось доказать.

Мы получили, что центром факторгруппы G/R является факторгруппа $A_k \cdot B_r \{\beta_{r-1}^\vee \alpha_{k-1}\} / R$ при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$, значит группой, в которой характер

(k_i, r_j) имеет линейные продолжения, является подгруппа $A_k \cdot B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}\}$, в которой все линейные продолжения характера (k_i, r_j) имеют вид (k_i^{il}, r_j) ($l = 0, 1, \dots, p-1$). Теорема 19 доказана.

Теорема 20. Характер $(k_i^{\sigma_0}, r_j)$ подгруппы

$$A_k \cdot B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, \begin{matrix} \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v (\sigma\text{-чётное}) \\ \beta_{r-\sigma}^v \alpha_{k-\sigma} (\sigma\text{-нечётное}) \end{matrix} \right\}$$

имеет в подгруппе

$$A_k \cdot B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, \begin{matrix} \beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1} (\sigma\text{-чётн.}) \\ \alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^v (\sigma\text{-нечётн.}) \end{matrix} \right\}$$

линейные продолжения типа $(k_i^{\sigma+1}, r_j)$ ($l = 0, 1, \dots, p-1$) для всех $1 \leq \sigma \leq p-2$, $\sigma+1 \leq k, r \leq p, 1 \leq i, j < p$.

Доказательство. Предположим, что σ чётное число и будем доказывать только для этого случая (для нечётного σ доказательство проводится точно так же).

Ядром характера $(k_i^{\sigma_0}, r_j)$ является подгруппа

$$A_{k+1} \cdot B_{r+1} \cdot \{\alpha_k \beta_r^v, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v\} = R.$$

Факторгруппа G/R порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \alpha_{k-1} R, \dots, \alpha_1 R, \beta_r R, \dots, \beta_1 R, xR.$$

Легко показать, что смежные классы $\alpha_k R, \beta_r R, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1} R, \dots, \beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1} R$ принадлежит центру Z факторгруппы G/R . Также легко убедиться, что

$$\alpha_{k-1} R, \dots, \alpha_1 R, \beta_{r-1} R, \dots, \beta_1 R, xR \notin Z;$$

$$\alpha_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{k-1}^{\delta_{k-1}} R (\neq R), \beta_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot \beta_{r-1}^{\gamma_{r-1}} R (\neq R) \notin Z.$$

Покажем, что центр Z порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \beta_r R, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1} R, \dots, \beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1} R.$$

В самом деле, рассмотрим произвольный смежный класс baR , где $b \in \{\beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$, $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$.

Покажем сначала, что если $baR \in Z$, то в выражение элемента b через базисные элементы β_n , элементы $\beta_{r-\sigma-2}, \dots, \beta_1$ входят в нулевой степени. Действительно, если бы имело место

$$b = \beta_m^{\gamma_m} \cdot b_1 \cdot a \quad (\beta_m^{\gamma_m} \neq e, 1 \leq m < r-\sigma-1, b_1 \in \{\beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{r-1}\}),$$

то мы получили бы, что

$$(x, ba) = (x, a) \cdot (x, b_1) \cdot \beta_{m+1}^{\gamma_{m+1}}((x, b), a) = a_{p+1}(x, a)(x, b_1) \beta_{m+1}^{\gamma_{m+1}},$$

где $(x, b_1) \in \{\beta_2, \dots, \beta_m, \beta_{m+2}, \dots, \beta_r\}$, $a_{p+1} \in A_{p+1}$, $(x, b_1) \beta_{m+1}^{\gamma_{m+1}}((x, b), a) = a_{p+1}(x, b_1) \beta_{m+1}^{\gamma_{m+1}}$, (так как по теореме 7 элемент $((x, b), a)$ принадлежит абелевому нормальному делителю A_{p+1}). Но $\beta_{m+1}^{\gamma_{m+1}} \neq e$, значит $(x, ba) \notin R$, то есть смежный класс baR не принадлежал бы центру Z .

Получается, что для смежного класса, baR , принадлежащего Z , элемент b имеет вид

$$b = \beta_{r-1}^{\gamma_{r-1}} \cdot \dots \cdot \beta_{r-\sigma-1}^{\gamma_{r-\sigma-1}}.$$

Ввиду того, что $a \in A$, где A нормальный делитель в G , можно записать

$$ba = (\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1})^{\mu_1} \cdot (\alpha_{k-2} \beta_{r-2}^\nu)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (\beta_{r-\sigma-1}^\nu \alpha_{k-\sigma-1})^{\mu_{\sigma+1}} \cdot a_1,$$

где $\nu\mu_1 \equiv \gamma_{r-1} \pmod{p}$, ..., $\nu\mu_{\sigma+1} \equiv \gamma_{r-\sigma-1} \pmod{p}$, $a_1 \in A$. Так как множители $(\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1})^{\mu_1}$, ..., $(\beta_{r-\sigma-1}^\nu \alpha_{k-\sigma-1})^{\mu_{\sigma+1}}$ порождают некоторые смежные классы центра Z , то элемент ba порождает смежный класс центра Z тогда и только тогда, если $a_1 R \in Z$. Однако можно записать

$$a_1 = a_2 a_3, \quad \text{где } a_2 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}, \quad a_3 \in A_k.$$

Здесь $a_3 R \in Z$, значит $ba R \in Z$ только тогда, если $a_2 = e$.

Мы получили, что произвольный смежный класс $ba R$ лежит в центре Z только тогда, если является некоторым произведением смежных классов

$$\alpha_k R, \beta_r R, \beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1} R, \dots, \beta_{r-\sigma-1}^\nu \alpha_{k-\sigma-1} R.$$

Значит

$$Z = A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \beta_{r-2}^\nu, \dots, \beta_{r-\sigma-1}^\nu \alpha_{k-\sigma-1}\} / R,$$

или, в случае нечётного σ :

$$Z = A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^\nu, \dots, \alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^\nu\} / R.$$

То есть подгруппой, в которой характер $(k_i^{\sigma_0} r_j)$ имеет линейные продолжения, является подгруппа

$$A_k B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^\nu, \dots, \begin{matrix} \beta_{r-\sigma-1}^\nu \alpha_{k-\sigma-1} & (\sigma \text{ - чётное}) \\ \alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^\nu & (\sigma \text{ - нечётное}) \end{matrix} \right\},$$

в которой все линейные продолжения характера $(k_i^{\sigma_0} r_j)$ имеют вид: $(k_i^{\sigma_0+l} r_j)$ ($l = 0, 1, \dots, p-1$). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь характер вида $(k_i^{\sigma_l} r_j)$ ($0 < l < p$). Ядром этого характера является подгруппа

$$R = A_{k+1} B_{r+1} \left\{ \alpha_k \beta_r^\nu, \beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \dots, \begin{matrix} \alpha_{k-\sigma+1} \beta_{r-\sigma+1}^\nu, \beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma}), & (\sigma \text{ - нечётное}) \\ \beta_{r-\sigma+1}^\nu \alpha_{k-\sigma+1}, (\alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^\nu) \beta_r^\mu, & (\sigma \text{ - чётное}) \end{matrix} \right\},$$

где $i + \nu j \equiv 0 \pmod{p}$, $l + \mu j \equiv 0 \pmod{p}$.

Для краткости будем рассматривать только случай нечётного σ (случай чётного σ доказывается совершенно аналогично).

Покажем, что R — ядро характера $(k_i^{\sigma_l} r_j)$. Действительно, этот характер является продолжением характера $(k_i^{\sigma-1_0} r_j)$ с ядром

$$R' = A_{k+1} B_{r+1} \cdot \{\alpha_k \beta_r^\nu, \beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k-\sigma+1} \beta_{r-\sigma+1}^\nu\}$$

(по теореме 20). Тогда R' является подгруппой ядра R . На элементе $\beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma})$ характер $(k_i^{\sigma_l} r_j)$ обращается в единицу при $l + \mu j \equiv 0 \pmod{p}$. Ясно, что на элементе $(\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma})^{\mu_1} \alpha_k$ при соответствующем выборе μ_1 характер $(k_i^{\sigma_l} r_j)$ также равен 1, однако этот элемент принадлежит подгруппе, порождённой элементами $\alpha_k \beta_r^\nu$ и $\beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma})$. Значит ядро

$$R = R' \cdot \{\beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma})\}.$$

Покажем теперь, что центр Z факторгруппы G/R порождается смежными классами $\alpha_k R$, $\beta_r R$ и $(\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^\nu) \beta_{r-1}^\mu R$. Они, очевидно, принадлежат центру Z , так как

$$(x, \alpha_k) = \alpha_{k+1} \in R, \quad (x, \beta_r) = \beta_{r+1} \in R, \quad (b, \alpha_k) \in A_{k+1} \subset R$$

для всех $b \in B$; и $(a, \beta_r) \in A_{p+1} \subset R$ для всех $a \in A$ (по теореме 7). Точно так же

$$(x, \alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^\nu \beta_{r-1}^\mu) = (x, \beta_{r-\sigma-1}^\nu \beta_{r-1}^\mu) \cdot (x, \alpha_{k-\sigma-1}) \cdot \\ \cdot ((x, \alpha_{k-\sigma-1}), \beta_{r-\sigma-1}^\nu \beta_{r-1}^\mu) = \beta_{r-\sigma}^\nu \beta_r^\mu \alpha_{k-\sigma} a_{p+1} \in R$$

по теореме 7.

Покажем, что все смежные классы центра Z порождаются этими смежными классами.

Пусть $b'a'R \in Z$ -произвольный смежный класс центра Z , где $b' \in B$, $a' \in A$. Очевидно, он представим в виде baR , где $b \in \{\beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$, $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$, так как $\beta_r R \in Z$, $\alpha_k R \in Z$, а $\alpha_m \in R$ для всех $m > k$, также $\beta_n \in R$ для всех $n > r$. Пусть b имеет вид:

$$b = \beta_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}}.$$

Покажем, что в предположении $baR \in Z$ выполняется $\delta_h = 0$ для всех $h < r - \sigma - 1$. Действительно,

$$(x, ba) = (x, a)(x, b) \cdot ((x, b), a) = a_{p+1}(x, a) \beta_2^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \beta_r^{\delta_{r-1}} \in R,$$

так как по теореме 7 $((x, b), a) \in A_{p+1}$, значит найдётся такой элемент a_{p+1} в нормальном делителе A_{p+1} группы G , что имеет место записанное равенство. Это выражение можно записать в виде

$$(x, ba) = a_{p+1} a_1 (\alpha_k \beta_r^\nu)^{\gamma_{r-1}} \cdot (\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1})^{\gamma_{r-2}} \cdot \dots \cdot (\alpha_{k-\sigma+1} \beta_{r-\sigma+1}^\nu)^{\gamma_{r-\sigma}} \cdot \\ \cdot (\beta_r^\mu \beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma})^\gamma \cdot \beta_{r-\sigma-1}^{\delta_{r-\sigma-1}} \cdot \dots \cdot \beta_2^{\delta_1},$$

где $v\gamma \equiv \delta_{r-\sigma-1} \pmod{p}$, $v\gamma_{r-1} + \mu\gamma \equiv \delta_{r-1} \pmod{p}$, $v\gamma_{r-\sigma} \equiv \delta_{r-\sigma} \pmod{p}$, ..., $v\gamma_{r-2} \equiv \delta_{r-2} \pmod{p}$. Но $(x, ba) \in R$ только тогда, если $\beta_{r-\sigma-1}^{\delta_{r-\sigma-1}} \cdot \dots \cdot \beta_2^{\delta_1} \in R$, то есть если $\delta_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots, r - \sigma - 2$. Получим значит, что в выражение элемента b через базис $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ не входят базисные элементы $\beta_1, \dots, \beta_{r-\sigma-2}$. Тогда элемент ba имеет вид

$$ba = \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \cdot \dots \cdot \beta_{r-\sigma-1}^{\delta_{r-\sigma-1}} \cdot a,$$

где $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$. Очевидно, его можно записать в виде

$$ba = (\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1})^{\gamma'_{r-1}} \cdot (\alpha_{k-2} \beta_{r-2}^\nu)^{\gamma'_{r-2}} \cdot \dots \cdot (\alpha_{k-\sigma+1} \beta_{r-\sigma+1}^\nu)^{\gamma'_{r-\sigma+1}} \cdot \\ \cdot [\beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma})]^{\gamma'_{r-\sigma}} \cdot [(\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^\nu) \beta_{r-1}^\mu]^{\gamma'_{r-\sigma-1}} \cdot \beta_r^{-\mu\gamma'_{r-\sigma}} \cdot a_2,$$

где

$$a_2 \in A, \quad v\gamma'_{r-2} \equiv \delta_{r-2}, \dots, v\gamma'_{r-\sigma} \equiv \delta_{r-\sigma}, \quad v\gamma'_{r-1} + \mu\gamma'_{r-\sigma-1} \equiv \delta_{r-1} \pmod{p}.$$

Так как $\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1} \in R$, ..., $\beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^\nu \alpha_{k-\sigma}) \in R$, то элемент ba порождает тот же смежный класс по R , как элемент

$$[(\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^\nu) \beta_{r-1}^\mu]^{\gamma'_{r-\sigma-1}} \cdot \beta_r^{-\mu\gamma'_{r-\sigma}} \cdot a_2.$$

Но

$$(\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^v) \beta_{r-1}^\mu R \in Z, \quad \beta_r R \in Z,$$

и $a_3 R \in Z$, где $a_3 \in \{\alpha_k, \dots, \alpha_{p^2}\}$; значит

$$[(\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^v) \beta_{r-1}^\mu]^{v'_{r-\sigma-1}} \cdot \beta_r^{-\mu v'_{r-\sigma}} \cdot a_2 R \in Z$$

тогда и только тогда, если $a_4 R \in Z$, где $a_2 = a_3 \cdot a_4$ и $a_3 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$. Последнее выполняется только тогда, если $a_4 = e$.

Мы получили, что если $baR \in Z$, то смежный класс baR выражается через смежные классы

$$\alpha_k R, \beta_r R, (\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^v) \beta_{r-1}^\mu R.$$

Следовательно подгруппой, в которой характер $(k_i^{\sigma_i} r_j)$ имеет линейные продолжения, является подгруппа

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, \beta_{r-\sigma}^v \alpha_{k-\sigma}, (\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^v) \beta_{r-1}^\mu\}$$

(при нечётном σ , и подгруппа

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1})\}$$

при чётном σ), в которой характер $(k_i^{\sigma_i} r_j)$ продолжается так: либо на последнем образующем элементе равен единице, либо принимает на ней значение ζ^m ($m \not\equiv 0 \pmod{p}$). Обозначим эти характеры соответственно символами:

0		0
$\vdots$		$\vdots$
0 0		0 0
$\vdots \vdots$		$\vdots \vdots$
0 0		0 0
$k_i \quad r_j$		$k_i \quad r_j$
$0 \left. \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma-1$		$0 \left. \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma-1$
l		l
0		m

то есть, используем схему, введённую в работе [7]. Для нашей группы она имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_{p^2} & & \\ \alpha_{p^2-1} & & \\ \vdots & & \\ \alpha_p & \beta_p & \\ \alpha_{p-1} & \beta_{p-1} & \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_2 & \beta_2 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & x \end{array} \right].$$

В обозначении характеров на место того базисного элемента, (например α_k) на котором данный характер равен единице, пишем знак 0 (иногда для подчёркивания номера базисного элемента пишем знак k_0), на место того базисного элемента, на котором данный характер $= \zeta^v$, ставим знак v (иногда знак k_v). Например характер (k_i, r_0) в такой записи имеет вид

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_i \\ 0 \\ r_0. \end{array}$$

Если характер определён на произведении некоторых степеней базисных элементов из A и B (то есть если характер определяется в такой подгруппе, которая получается расширением группы с помощью такого произведения элементов), то соответствующий знак пишем на середину между столбцами базисных элементов из A и B на номер ниже от нижестоящего базисного элемента из α_k и β_r . Тогда нами доказана следующая

Теорема 21. Характер вида (k_i^σ, r_j) подгруппы

$$A_k B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, \begin{array}{ll} \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v & \sigma \text{ -чётное} \\ \beta_{r-\sigma}^v \alpha_{k-\sigma} & (\sigma \text{ -нечётное}) \end{array} \right\}$$

имеет в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, \begin{array}{ll} \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1} \alpha_{k-\sigma-1}) & (\sigma \text{ -чётное}) \\ \beta_{r-\sigma}^v \alpha_{k-\sigma}, (\alpha_{k-\sigma-1} \beta_{r-\sigma-1}^v) \beta_{r-1}^\mu & (\sigma \text{ -нечётное}) \end{array} \right\}$$

линейные продолжения вида

$$\begin{array}{ccc} 0 & \text{и} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ k_i & r_j & k_i & r_j \\ \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma-1 & & \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma-1 \\ l & & l \\ 0 & & m \end{array}$$

для всех $1 \leq i, j, l, m < p$; $1 \leq \sigma \leq p-1$; $\sigma+1 \leq k$, $r \leq p$ при $l+j\mu \equiv 0 \pmod{p}$.

Вообще имеют место следующие факты:

Теорема 22. *Характер вида*

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \vdots \\
 0 \quad 0 \\
 \vdots \quad \vdots \\
 0 \quad 0 \\
 k_i \quad r_j \\
 \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1 \\
 l \\
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_{\lambda-1} \\
 0
 \end{array}$$

подгруппы

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, g\}$$

имеет в подгруппе $A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, g, g'\}$, линейные продолжения вида

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \text{и} & 0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 0 \quad 0 & & 0 \quad 0 \\
 \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\
 0 \quad 0 & & 0 \quad 0 \\
 k_i \quad r_j & & k_i \quad r_j \\
 \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1 & & \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1 \\
 l & & l \\
 x_1 & & x_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 x_{\lambda-1} & & x_{\lambda-1} \\
 0 & & 0 \\
 0 & & n
 \end{array}$$

где при $g = \alpha_{h_1} \beta_{h_2}^{\delta_{h_2}} \cdot \dots \cdot \beta_{h_q}^{\delta_{h_q}}$ имеет место $g' = (\alpha_{h_1-1}^{-1} \cdot \beta_{h_2-1}^{-\delta_{h_2}} \cdot \dots \cdot \beta_{h_q-1}^{-\delta_{h_q}})^{-1}$ для всех $1 \leq i, j, l, x_1, \dots, x_{\lambda-1}, n < p$ и если ни один из номеров $h_1, h_2, \dots, h_q$ не равен единице.

Теорема 23. *Характер вида*

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \vdots \\
 0 \quad 0 \\
 \vdots \quad \vdots \\
 0 \quad 0 \\
 k_i \quad r_j \\
 \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1 \quad (1 \leq x_\lambda < p) \\
 l \\
 x_1 \\
 \vdots \\
 x_{\lambda-1} \\
 x_\lambda
 \end{array}$$

подгруппы

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^\nu, \dots, g\}$$

имеет в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^\nu \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^\nu, \dots, g, \beta_{r-1}^\mu g'\},$$

линейные продолжения вида

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \text{и} & 0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 0 \quad 0 & & 0 \quad 0 \\
 \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\
 0 \quad 0 & & 0 \quad 0 \\
 k_i \quad r_j & & k_i \quad r_j \\
 \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1 & & \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1 \quad (1 \leq x_{2+1} < p) \\
 l & & l \\
 x_1 & & x_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 x_\lambda & & x_\lambda \\
 0 & & x_{\lambda+1}
 \end{array}$$

где при

$$g = \alpha_{h_1} \beta_{h_2}^{\delta_{h_2}} \cdot \dots \cdot \beta_{h_q}^{\delta_{h_q}}$$

выполняется

$$g' = (\alpha_{h_1-1}^{-1} \beta_{h_2-1}^{-\delta_{h_2}} \cdot \dots \cdot \beta_{h_q-1}^{-\delta_{h_q}})^{-1};$$

и $x_\lambda + j\mu \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $1 \leq i, j, l, x_1, \dots, x_2, x_{\lambda+1} \leq p$, и если ни один из номеров $h_1, h_2, \dots, h_q$ не равен единице.

Доказательство двух последних теорем проводим одновременно. Будем пользоваться методом индукции по числу индексов x_η в характерах теорем.

Рассмотрим сначала характер

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \\ k_i \quad r_j \\ \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1. \\ l \\ x_1 \end{array}$$

Он является продолжением характера (k_i, r_j) , значит, (по теореме 21) он определен в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1})\}, \begin{array}{l} i + vj \equiv 0 \\ l + \mu j \equiv 0 \end{array} \pmod{p}$$

(будем рассматривать только случай чётного σ). В зависимости от того, $x_1 = 0$, или $x_1 \neq 0$, ядром характера является подгруппа

$$R_0 = A_{k+1} B_{r+1} \{\alpha_k \beta_r^v, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1})\}, \begin{array}{l} i + vj \equiv 0 \\ l + \mu j \equiv 0 \end{array} \pmod{p},$$

или

$$R_1 = A_{k+1} B_{r-1} \{\alpha_k \beta_r^v, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu [\beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1})]\}, \begin{array}{l} i + vj \equiv 0 \\ l + \mu j \equiv 0 \\ x_1 + \mu j \equiv 0 \end{array} \pmod{p}$$

Как и в доказательстве теоремы 21, можно показать, что факторгруппа G/R_0 порождается смежными классами $\alpha_k R_0, \beta_r R_0$ и $(\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_{r-2}^\mu R_0$, а факторгруппа G/R_1 порождается смежными классами $\alpha_k R_1, \beta_r R_1$ и $(\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_{r-2}^\mu \beta_{r-1}^\mu R_1$. То есть подгруппа, в которой наш характер имеет линейные продолжения, имеет вид

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1}), (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_{r-2}^\mu\} \text{ (при } x_1 = 0),$$

или

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \beta_{r-1}^\mu (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1}), (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_{r-2}^\mu \beta_{r-1}^\mu\} \text{ (при } x_1 \neq 0),$$

где линейные продолжения задаются по теоремам 22 и 23.

Пусть нами уже построен характер

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \\ k_i \quad r_j \\ \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma - 1, \\ I \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{array}$$

и он определён в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^v, \dots, g_1, \dots, g_k\},$$

где элементы $g_1, g_2, \dots, g_k$ построены по индуктивному предположению, согласно теоремам 22 и 23, значит не содержат в своём выражении через базисные элементы множителей β_η с индексами $\eta < r - (\sigma + k)$. Ядром этого характера является подгруппа

$$R'_0 = A_{k+1} B_{r+1} \cdot \{\alpha_k \beta_r^v, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, g_1, \dots, g_k\} \quad \text{при} \quad x_k = 0$$

и

$$R'_1 = A_{k+1} B_{r+1} \{\alpha_k \beta_r^v, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, g_1, \dots, g_k \beta_r^{\mu_k}\} \quad \text{при} \quad x_k \neq 0.$$

(предполагается $g_k = ab, a \in A, b \in B$). Можно показать, что центр факторгруппы G/R'_0 порождается смежными классами $\alpha_k R'_0, \beta_r R'_0$ и $g'_{k-1} R'_0$, а центр факторгруппы G/R'_1 порождается смежными классами $\alpha_k R'_1, \beta_r R'_1$ и $\beta_r^{\mu_k} g'_{k-1} R'_1$, где при

$$g_k = \alpha_{\lambda_1} \beta_{\lambda_2}^{\delta_{\lambda_2}} \dots \beta_{\lambda_q}^{\delta_{\lambda_q}}$$

имеет место

$$g'_{k-1} = (\alpha_{\lambda_1}^{-1} \cdot \beta_{\lambda_2-1}^{-\delta_{\lambda_2}} \dots \beta_{\lambda_q-1}^{-\delta_{\lambda_q}})^{-1},$$

и выполняется $x_k + \mu_k j \equiv 0 \pmod{p}$.

Значит характер имеет линейные продолжения в подгруппе

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, g_1, \dots, g_k, g'_{k-1}\} \quad \text{при} \quad x_k = 0,$$

и

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, g_1, \dots, g_k, \beta_r^{\mu_k} g'_{k-1}\} \quad \text{при} \quad x_k \neq 0,$$

откуда уже теоремы следуют.

Из теорем 22 и 23 непосредственным следствием получается следующая

Теорема 24. *Характеры, приведённые в условиях теорем 22 и 23, не имеют линейных продолжения ни в какой подгруппе группы G , если хотя бы один из померов $h_1, \dots, h_q$ равен единице.*

Следствие очевидно, так как единственно возможные линейные продолжения характеров определены в подгруппах

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, g, g'\},$$

или, в случае теоремы 23,

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, g, \beta_{r-1}^\mu g'\},$$

где элемент g' уже не имеет смысла.

С помощью выше изложенных результатов можно построить полную систему линейных частей характеров группы G . Продолжение характеров проводится по схеме I. Значит, характеры $(p_0^2), \dots, (p+2_0)$ продолжают в подгруппах $A_{p^2-1}, \dots, A_{p+1}$ соответственно, разделяясь на два вида характеров $(p^2-1_0), (p^2-1_i); \dots; (p+1_0), (p+1_i)$ ($i=1, 2, \dots, p-1$), вторые из которых $((p^2-1_i), \dots, (p+1_i))$ дальше не продолжают.

Характер $(p+1_0)$ продолжается в подгруппе $A_p B_p$, разделяясь на четыре вида характеров $(p_0, p_0), (p_i, p_0), (p_0, p_i), (p_i, p_i)$ ($i, j = 1, 2, \dots, p-1$).

Характеры (p_i, p_0) и (p_0, p_i) при фиксированном i продолжают в подгруппах $A_p B_{p-1}$ и $A_{p-1} B_p$ соответственно, расщепляясь на два характера вида $(p_i, p-1_0), (p_i, p-1_j)$ и $(p-1_0, p_i), (p-1_j, p_i)$ соответственно ($j = 1, 2, \dots, p-1$).

Характер же (p_i, p_j) при фиксированных i и j продолжается в подгруппе $A_p B_p \{\beta_{p-1}^v \alpha_{p-1}\}$ при $i+j \equiv 0 \pmod{p}$, расщепляясь на два характера вида $(p_i^{1_0}, p_j), (p_i^{1_1}, p_j)$ ($i = 1, \dots, p-1$).

Вообще, характер „главного типа”, то есть типа (k_0, k_0) продолжается в подгруппе $A_{k-1} B_{k-1}$, где расщепляется на четыре характера типа $(k-1_0, k-1_0), (k-1_i, k-1_0), (k-1_0, k-1_i), (k-1_i, k-1_i)$ ($i, j = 1, 2, \dots, p-1$).

Характеры (k_i, r_0) и (k_0, r_i) при фиксированном i линейно продолжают в подгруппах $A_k B_{r-1}$ и $A_{k-1} B_r$ соответственно, расщепляясь на два характера вида $(k_i, r-1_0), (k_i, r-1_j)$ и $(k-1_0, r_i), (k-1_j, r_i)$ ($j = 1, \dots, p-1$; $1 \leq k, r < p$).

Характер (k_i, r_j) при фиксированных i и j линейно продолжается в подгруппе $A_k B_r \{\beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}\}$ при условии $i+j \equiv 0 \pmod{p}$, распадаясь на два характера типа $(k_i^{1_0}, r_j), (k_i^{1_1}, r_j)$ ($i = 1, \dots, p-1$).

Последующее продолжение полученных в последнем случае характеров производится по теоремам 22, 23

Линейные части характеров группы G получаются из таких характеров, группа определения которых содержит образующий элемент, в выражение через базисные элементы которого входит хотя бы один из множителей α_1 или β_1 , x в некоторой ($\neq 0$) степени.

Всех характеров получается:

$$\frac{p^2 - p}{2} - \text{не продолжающихся до } A_p, \text{ а после: } 8 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{p-1} = 2 + 3 \cdot 2^p.$$

§ 4.

Ядра неприводимых представлений группы G

В предыдущем параграфе описаны все линейные части характеров комплексных представлений группы G . Так как ядрами неприводимых представлений являются ядра линейных частей характеров представлений группы G , то, используя результаты предыдущего параграфа, можем построить полную

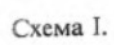


Схема I.

систему ядер неприводимых комплексных представлений рассматриваемой в данной работе группы.

Очевидно, ядрами линейных характеров, не продолжающихся до A_p , будут подгруппы

$$\{e\}, A_{p^2}, A_{p^2-1}, \dots, A_{p+2},$$

где A_μ является ядром характера $(\mu-1_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, p-1$; $\mu = p+2, \dots, p^2$ а $\{e\}$ является ядром характера (p_i^2) .

Также очевидным следствием теорем предыдущего параграфа являются следующие факты, которых приводим без доказательства, так как эти результаты встречаются в доказательствах теорем параграфа 3.:

Теорема 25. Ядром характеров, полученных последним шагом продолжения характеров „главного типа“, являются следующие восемь типов подгрупп группы G : $G, A_2 B\{x\}, AB_2\{x\}, AB, A_2 B_2\{\alpha_1 \beta_1^v\}\{x\}$ (при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$) $A_2 B\{\alpha_1 x^v\}, AB_2\{\beta_1 x^v\}$ (при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$) и $A_2 B_2\{\alpha_1 \beta_1^v, \alpha_1 x^\mu\}$ (при $i + vj \equiv 0, i + \mu j \equiv 0 \pmod{p}$).

Теорема 26. Ядром характеров типа $(k_i, 1_0), (1_0, k_i), (1_i, k_j)$ и $(k_i, 1_j)$ являются подгруппы соответственно $A_{k+1}B, AB_{k+1}, A_2 B_{k+1}\{\alpha_1 \beta_k^v\}$ и $A_{k+1}B_2\{\alpha_k \beta_1^v\}$ при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $1 \leq k \leq p$.

Теорема 27. Ядром характеров типа $(k_i^{\sigma_0}, r_j)$ и $(k_i^{\sigma_1}, r_j)$ (где $1 < k, r \leq p$; $\min(k, r) - \sigma = 1$) являются соответственно подгруппы

$$A_{k+1} B_{r+1} \left\{ \alpha_k \beta_r^v, \beta_{r-1}^v \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, \quad \sigma\text{-чётное} \right. \\ \left. \beta_{r-\sigma}^v \alpha_{k-\sigma}, \quad \sigma\text{-нечётное} \right\}$$

при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}$, и

$$A_{k+1} B_{r+1} \left\{ \alpha_k \beta_r^v, \dots, \beta_{r-\sigma+1}^v \alpha_{k-\sigma+1}, (\alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v) \beta_r^\mu, \quad \sigma\text{-чётное} \right. \\ \left. (\alpha_{k-\sigma+1} \beta_{r-\sigma+1}^v), \beta_r^\mu (\beta_{r-\sigma}^v \alpha_{k-\sigma}), \quad \sigma\text{-нечётное} \right\}$$

при $i + vj \equiv 0 \pmod{p}, i + \mu j \equiv 0 \pmod{p}$ для каждого фиксированного $i, j = 1, 2, \dots, p-1$.

Теорема 28. Ядром характера

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \\ k_i \quad r_j \\ \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sigma \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_q \end{array}$$

(где $\min(k, r) - (\sigma + q) = 1$, $1 < k, r \leq p$) является подгруппа

$$A_{k+1} B_{r+1} \{\alpha_k \beta_r^v, \dots, \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^v, g_1, \dots, g_q\} \quad (\text{для чётного } \sigma),$$

где элементы $g_1, \dots, g_q$ имеют вид

$$g_1 = \begin{cases} \beta_r^{\mu_1} (\beta_{r-\sigma-1}^v \alpha_{k-\sigma-1}), & \delta_1 \neq 0 \\ \beta_{r-\sigma-1}^{v_1} \alpha_{k-\sigma-1}, & \delta_1 = 0 \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} \alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v, & \delta_1 = \delta_2 = 0 \\ (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_{r-1}^{\mu_1}, & \delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0 \\ (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_r^{\mu_2}, & \delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0 \\ (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^v) \beta_{r-1}^{\mu_1} \beta_r^{\mu_2}, & \delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0 \end{cases}$$

и т. д.

при условии

$$\begin{aligned} i + vj &\equiv 0 \\ \delta_1 + \mu_1 j &\equiv 0 \\ \delta_2 + \mu_2 j &\equiv 0 \pmod{p} \\ &\vdots \\ \delta_q + \mu_q j &\equiv 0, \end{aligned}$$

где $0 \leq \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q < p$.

Этим построение ядер всех неприводимых комплексных представлений группы G завершено.

Рассмотрим пример. Пусть $p = 3$.

Характеры, не продолжающиеся дальше A_3 :

$$(9_i), (8_i), (7_i), (6_i), (5_i), (4_i).$$

Характеры, полученные от характеров „главного типа” при последнем шаге продолжения:

$$(1_0, 1_0, 1_0), (1_i, 1_0, 1_0), (1_0, 1_i, 1_0), (1_0, 1_0, 1_i), (1_i, 1_j, 1_0), (1_i, 1_0, 1_j), (1_0, 1_i, 1_j),$$

$$(1_i, 1_j, 1_k) \quad (i, j, k = 1, \dots, p-1).$$

Остальные характеры:

$$(2_i, 1_0), (2_i, 1_j), (1_0, 2_j), (1_i, 2_j), (2_i^{1_0}, 2_j), (2_i^{1_i}, 2_j) \quad (i, j, l, m = 1, \dots, p-1)$$

$$(3_i, 1_0), (3_i, 1_j), (3_i^{1_0}, 2_j), (3_i^{1_i}, 2_j), (1_0, 3_j), (1_i, 3_j), (2_i^{1_0}, 3_j), (2_i^{1_i}, 3_j), (3_i^{2_0}, 3_j),$$

$$(3_i^{2_i}, 3_j).$$

Наконец ещё два характера:

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 3_i & 3_j \\ l & l \\ 0 & m. \end{array}$$

Ядрами найденных характеров будут по порядку следования характеров:

$$\{e\}, A_9, A_8, A_7, A_6, A_5.$$

$$G; A_2 B\{x\}; AB_2\{x\}; AB; A_2 B_2\{\alpha_1 \beta_1^v\}\{x\}; A_2 B\{\alpha_1 x^v\}, AB_2\{\beta_1 x^v\}, A_2 B_2\{\alpha_1 \beta_1^v, \alpha_1 x^\mu\}$$

$$\begin{matrix} i + vj \equiv 0 \\ \text{при} \\ i + \mu k \equiv 0 \end{matrix} \pmod{p}$$

$$A_3 B; A_3 B_2\{\alpha_2 \beta_1^v\}; AB_3; A_2 B_3\{\alpha_1 \beta_2^v\}; A_3 B_3\{\alpha_2 \beta_2^v, \beta_1^v \alpha_1\}; A_3 \beta_3\{\alpha_2 \beta_2^v, \beta_2^\mu(\beta_1^v \alpha_1)\}$$

$$\begin{matrix} i + vj \equiv 0 \\ \text{при} \\ l + \mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod{p}.$$

$$A_4 B; A_4 B_2\{\alpha_3 \beta_1^v\}; A_4 B_3\{\alpha_3 \beta_2^v, \beta_1^v \alpha_2\}; A_4 B_2\{\alpha_3 \beta_2^v, \beta_2^\mu(\beta_1^v \alpha_2)\}; AB_4; A_2 B_4\{\alpha_1 \beta_3^v\}.$$

$$A_3 B_4\{\alpha_2 \beta_3^v, \beta_2^v \alpha_1\} A_3 B_4\{\alpha_2 \beta_3^v, \beta_3^\mu(\beta_2^v \alpha_1)\}; A_4 B_4\{\alpha_3 \beta_3^v, \beta_2^v \alpha_2, \alpha_1 \beta_1^v\}$$

$$A_4 B_4\{\alpha_3 \beta_3^v, \beta_2^v \alpha_2, (\alpha_1 \beta_1^v) \beta_3^\mu\}$$

$$\begin{matrix} i + vj \equiv 0 \\ \text{при} \\ l + \mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod{p}.$$

Литература

- [1] С. Д. Берман, О характерах конечных нильпотентных групп. *Успехи мат. наук* 1959, 14 № 5 (217—218).
- [2] С. Д. Берман, Нормальные делители группы треугольных матриц над конечным полем. *Докл. и сообщ. Ужг. ун-в.* 1960, № 3, (50).
- [3] L. KALOUJNINE, Sur les p -groupes de Sylow du groupe symétrique de degré m . *C. R. Acad. Sci. Paris* 221 (1945), 222—224.
- [4] L. KALOUJNINE, La structure des p -groupes de Sylow des groupes symétriques finis, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 65 (1948), 239—276.
- [5] A. I. WEIR, Sylow p -subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p , *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 529—533.
- [6] A. I. WEIR, The Sylow subgroups of the symmetric group, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 534—541.
- [7] A. I. WEIR, Sylow p -subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic prime to p , *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 454—464.

(Поступило 29. VIII. 1966.)