

Les solutions convexes de l'équation fonctionnelle

$$g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$$

Par M. ROZMUS-CHMURA (Katowice)

C'est l'existence et l'unicité des solutions convexes dans un intervalle $(a, b]$ de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction cherchée, qui font l'objet de cette note.

Le problème de l'unicité des solutions convexes de l'équation (1) dans le cas où l'intervalle (a, b) est infini, a été déjà examiné par Kuczma [3].

Cette étude-ci comprend aussi bien le cas où l'intervalle (a, b) est infini que le cas où il est fini.

L'équation (1) est une généralisation de l'équation d'Abel

$$g[\alpha(x)] - g(x) = l$$

dont les solutions convexes ont été présentées dans l'étude [5].

Supposons que la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux conditions suivantes:

(H₁) $\alpha(x)$ est croissante et concave dans l'intervalle $(a, b]$ $-\infty \leq a < b < \infty$, $a < \alpha(x) < x$ dans $(a, b]$ et que: $\lim_{x \rightarrow a+} \alpha'(x) = 1$

et supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions:

(H₂) $\varphi(x)$ est croissante et concave dans l'intervalle $(a, b]$ et $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = l$ où $|l| < \infty$.

La définition et des propriétés des fonctions convexes et concaves ont été présentées par Bourbaki [1]. En particulier les fonctions concaves et convexes, sont presque partout différentiables.

Les itérées naturelles de la fonction $\alpha(x)$ sont définies par les relations: $\alpha^1(x) = \alpha(x)$, $\alpha^{n+1}(x) = \alpha[\alpha^n(x)]$.

Pour la fonction $\alpha(x)$ qui satisfait aux conditions (H₁) toutes les itérées $\alpha^n(x)$ sont définies, strictement croissantes et concaves dans l'intervalle $(a, b]$. De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(x) = a$ pour chaque $x \in (a, b]$.

Pour un $x \in (a(b), b)$ fixé nous posons: $x_n = \alpha^n(x)$, $b_n = \alpha^n(b)$, ainsi que $\delta_n(x) = b_n - x_n$, $\Delta_n = b_{n-1} - b_n$.

Théorème. Si $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (H₁) et si $\varphi(x)$ satisfait aux conditions (H₂), alors:

$$(2) \quad g(x) = g(b) + \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est la solution convexe unique (à constante additive $g(b)$ près) de l'équation (1).

DÉMONSTRATION. Considerons les équations:

$$(3) \quad g_1[x(x)] - g_1(x) = \varphi_1(x)$$

où $\varphi_1(x) = \varphi(x) - l$

$$(4) \quad g_2[x(x)] - g_2(x) = l.$$

Il résulte des hypothèses (H₂) que $\lim_{x \rightarrow a_+} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} [\varphi(x) - l] = 0$. Par conséquent, à base des résultats des études de Kuczma [4] l'équation (3) possède la solution suivante:

$$g_1(x) = g_1(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi_1(b_k) - \varphi_1(x_k)] = g_1(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]$$

(C'est d'ailleurs la seule solution monotone de cette équation.) La fonction $g_1(x)$ est convexe, car pour chaque k $\varphi(x_k)$ est concave étant une superposition des fonctions concaves et croissantes.

Il résulte du travail de Kuczma [5] que, au cas où $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (H₁), alors la fonction

$$g_2(x) = g_2(b) + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est la solution convexe unique de l'équation (4).

Il résulte de la forme des équations (3) et (4) que la fonction

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = g(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est une solution convexe de l'équation (1).

Pour prouver l'unicité nous allons nous servir de la fonction $\bar{g}(x) = \frac{g(x+c) - g(c)}{x}$ où c est une constante. Comme $\alpha(x)$ est convexe, la fonction $\bar{g}(x)$ est croissante. Supposons que $x \in (b_1, b)$. Il est facile à prouver que $\delta_n(x) < \Delta_{n+1}$. Par conséquent, quand on admet que $c = b_n$, nous avons:

$$\bar{g}(-\Delta_{n+1}) = \frac{g(b_{n+1}) - g(b_n)}{-b_n + b_{n+1}} \cong \frac{g(x_n) - g(b_n)}{-b_n + x_n} = \bar{g}(-\delta_n(x))$$

c'est à dire

$$(5) \quad \frac{\varphi(b_n)}{\Delta_{n+1}} \cong \frac{g(x_n) - g(b_n)}{\delta_n(x)}.$$

De même

$$\bar{g}(-\delta_n(x)) = \frac{g(x_n) - g(b_n)}{-b_n + x_n} \cong \frac{g(b_{n-1}) - g(b_n)}{b_{n-1} - b_n} = \bar{g}(\Delta_n)$$

c'est à dire

$$(6) \quad \frac{g(x_n) - g(b_n)}{\delta_n(x)} \cong \frac{\varphi(b_{n-1})}{\Delta_n}.$$

Vu conditions (5) et (6) nous avons

$$(7) \quad \frac{\delta_n(x)}{\Delta_n} \varphi(b_{n-1}) \leq g(x_n) - g(b_n) \leq \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \varphi(b_n).$$

Mais

$$\begin{aligned} g(x_n) - g(b_n) &= g(x_n) - g(x) + g(x) - g(b_n) + g(b) - g(b) = \\ &= \sum_{k,0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] + g(x) - \sum_{k,0}^{n-1} [g(b_{k+1}) - g(b_k)] - g(b) = \\ &= g(x) - g(b) - \sum_{k,0}^{n-1} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, il résulte de (7)

$$(8) \quad \begin{aligned} &\frac{\delta_n(x)}{\Delta_n} \varphi(b_{n-1}) - \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \varphi(b_n) \leq \\ &\leq g(x) - \left\{ g(b) + \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \varphi(b) + \sum_{k,0}^{n-1} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

En désignant

$$(9) \quad g_n(x) = g(b) + \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} + \sum_{k,0}^{n-1} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]$$

nous avons

$$(10) \quad \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \left[\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \varphi(b_{n-1}) - \varphi(b_n) \right] \leq g(x) - g_n(x) \leq 0.$$

KUCZMA et SMAJDOR [6] ont prouvé que, au cas où la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (H_1) , alors

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n-1}(x) - \alpha^n(x)}{\alpha^{n-1}(y) - \alpha^n(y)} = 1$$

pour n'importe quels $x, y \in (a, b]$.

En admettant $x = b_1, y = b$ dant (11) nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n+1}}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = 1$$

De plus, par hypothèse $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = l$ où $|l| < \infty$ c'est à dire: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(b_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(b_n) = l$.

A cause de l'inégalité $0 < \delta_n(x) < \Delta_{n+1}$ la séquence $\left\{ \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \right\}$ est limitée. De là et de l'inégalité (10) nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{pour } x \in (b_1, b).$$

Il résulte immédiatement de la form de la séquence (9) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(b) = g(b)$$

C'est à dire pour chaque $x \in (b_1, b]$ la fonction $g(x)$ est la limite de la séquence $g_n(x)$. KORDYLEWSKI et KUCZMA [2] ont prouvé qu'une fonction qui remplit l'équation (1) est déterminée par ses valeurs dans l'intervalle $(b_1, b]$. On a prouvé ainsi l'unicité des solutions dans l'intervalle $(a, b]$.

Bibliographie

- [1] N. BOURBAKI, Les structures fondamentales de l'analyse Livre IV. Fonctions d'une variable¹ réelle, *Paris* 1951.
- [2] J. KORDYLEWSKI—M. KUCZMA, On some linear functional equation *Ann. Polon. Math.* **9** (1960), 119—136.
- [3] M. KUCZMA, On convex solution of the functional equation $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$ *Publ. Math. (Debrecen)* **6** (1959), 40—47.
- [4] M. KUCZMA, Sur une équation fonctionnelle, *Mathematica Cluj*, **3** **26** (1961), 79—87.
- [5] M. KUCZMA, On convex solutions of Abel's functional equation, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys.* **13** (1965), 645—648.
- [6] M. KUCZMA—A. SMAJDOR, Note on iteration of concave functions *Amer. Math. Monthly* (to appear).

(Reçu le 8. december 1966.)