

**Bemerkung zur Arbeit von V. S. Fedulov
„Über die Summierbarkeit der doppelten Orthogonalreihen.“**

Von L. CSERNYÁK (Miskolc)

Man nennt doppelte Orthogonalreihe die Reihe

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y),$$

wobei $\{a_{k,l}\}$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen und $\varphi_{k,l}(x, y)$ ($k, l = 1, 2, \dots$) auf $R = [a, b, c, d]$ definierte Funktionen sind, für die

$$\iint_R \varphi_{i,j}(x, y) \varphi_{k,l}(x, y) dx dy = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = i \text{ und } l = j, \\ 0, & \text{wenn } k \neq i \text{ oder } l \neq j \end{cases}$$

gültig ist. Man bezeichne mit $S_{m,n}(x, y)$ die m, n -te Teilfolge von (1), d.h.

$$S_{m,n}(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y).$$

Man nennt die Reihe (1) $(C, 1, 1)$ -summierbar zu $S(x, y)$, wenn

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}(x, y) = S(x, y)$$

auf R fast überall gilt, wobei

$$\sigma_{m,n}(x, y) = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n S_{k,l}(x, y)$$

ist.

V. S. FEDULOV ¹⁾ hat den folgenden Satz mitgeteilt.

Satz A. Erfüllen die Koeffizienten der doppelten Orthogonalreihe (1) die Bedingung,

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 < \infty,$$

dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung der $(C, 1, 1)$ -Summierbarkeit in R fast überall, daß die Teilfolge $\{S_{2^m, 2^n}(x, y)\}$ ($m, n = 1, 2, \dots$) der Partialsummen von (1) auf R fast überall konvergent ist.

¹⁾ В. С. Федулов, 0 (C,1,1)-суммируемости двойного ортогонального ряда, Украинский Математический Журнал 7 (1955), 433—442

Mit Hilfe dieses Satzes beweist Fedulov die folgende Behauptung.

Satz B. *Aus der Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 [\log \log(k+3)]^2 [\log \log(l+3)]^2$$

folgt die $(C, 1, 1)$ -Summierbarkeit von (1) auf R fast überall.

Der Beweis des Satzes *A* ist aber falsch. Als auch Fedulov bewiesen hat, ist die $(C, 1, 1)$ -Summierbarkeit von (1) unter der Bedingung (2) äquivalent mit der Konvergenz der Folge

$$\{\sigma_{2^m, 2^n}(x, y)\} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

fast überall. Zur Gültigkeit des Satzes *A* ist es also notwendig (und auch hinreichend), daß aus (2)

$$(3) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} (\sigma_{2^m, 2^n} - S_{2^m, 2^n}) = 0$$

fast überall folgt. Das ist aber in allgemeinen unrichtig (folglich ist auch der Satz *A* falsch).

Es sei nämlich $\{B_k\}$ eine reelle Zahlenfolge und $\{\Phi_k(x)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) ein Orthonormalsystem von Funktionen, für welches

$$(4) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left| \sum_{k=1}^{2^m} B_k \Phi_k(x) \right| = \infty$$

in $[a, b]$ fast überall gilt und

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 < \infty$$

ist. ²⁾ Es existieren offenbar ein Orthonormalsystem $\{\psi_l(y)\}$ ($l = 1, 2, \dots$) in $[c, d]$ und eine reelle Zahlenfolge $\{C_l\}$, für die

$$(5) \quad \left| \sum_{l=1}^{2^n} C_l \psi_l(y) \right| \leq M, \quad 0 < \left| \sum_{l=1}^{2^n} (l-1) C_l \psi_l(y) \right|$$

in $[c, d]$ fast überall gilt und

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l^2 < \infty$$

ist. Es seien weiterhin

$$a_{k,l} = B_k \cdot C_l \quad \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 < \infty \right)$$

und

$$\varphi_{k,l}(x, y) = \Phi_k(x) \psi_l(y) \quad (k, l = 1, 2, \dots).$$

²⁾ Die Existenz solcher Folge $\{B_k\}$ und solches orthonormierten Systems folgt z.B. aus einem bekannten Satz. (Siehe z. B. K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen, I., *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130., Satz I.)

Dann ist

$$(6) \quad S_{2^m, 2^n}(x, y) - \sigma_{2^m, 2^n}(x, y) = \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^m} a_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y) + \\ + \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} \frac{l-1}{2^n} a_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y) - \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} \frac{(k-1)(l-1)}{2^m 2^n} a_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y) = \\ = \sum_1(m, n; x, y) + \sum_2(m, n; x, y) - \sum_3(m, n; x, y).$$

Aus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \iint_R \left[\sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} \frac{(k-1)(l-1)}{2^m 2^n} a_{k,l} \varphi_{k,l}(x, y) \right]^2 dx dy = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m} 2^{2n}} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} (k-1)^2 (l-1)^2 a_{k,l}^2 \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 k^2 l^2 \sum_{2^m \geq k} \sum_{2^n \geq l} \frac{1}{2^{2m} 2^{2n}} = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 < \infty$$

folgt

$$(7) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_3(m, n; x, y) = 0.$$

Auf Grunde von (5) ergibt sich

$$|\sum_1(m, n; x, y)| = \left| \sum_{k=1}^{2^m} \frac{k-1}{2^m} B_k \Phi_k(x) \right| \left| \sum_{l=1}^{2^n} C_l \psi_l(y) \right| \leq M \left| \sum_{k=1}^{2^m} \frac{k-1}{2^m} B_k \Phi_k(x) \right|.$$

Daraus ist es auf ähnlicher Weise, wie oben ersichtlich, daß

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_1(m, n; x, y) = 0$$

fast überall gilt. Dagegen ist

$$\sum_2(m, n; x, y) = \sum_{k=1}^{2^m} B_k \Phi_k(x) \sum_{l=1}^{2^n} \frac{l-1}{2^n} C_l \psi_l(y)$$

wegen (4) und (5) in R fast überall divergent, d.h. aus der Bedingung (2) folgt (3) nicht.

Es gilt aber der folgende

Hilfsatz. *Im Falle*

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 [\log \log (k+3)]^2 [\log \log (l+3)]^2 < \infty$$

ist notwendige und hinreichende Bedingung für die $(C, 1, 1)$ -Summierbarkeit der doppelten Orthonormalreihe (1) in R fast überall, daß die Folge $\{S_{2^m, 2^n}(x, y)\}$ ($m, n = 1, 2, \dots$) fast überall konvergiert.

Bemerkung. Natürlich ergibt sich die Gültigkeit des Satzes B aus diesem Hilfsatz ebenso wie aus dem Satz A .

Auf Grund der obigen, zum Beweis des Hilfsatzes ist es genügend zu zeigen, daß in (6)

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_i(m, n; x, y) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

auf R fast überall gilt. Es sei

$$a_{k,l}^* = \frac{(k-1)a_{k,l}}{2^{m+1}} \quad (2^m < k \leq 2^{m+1}; m = 0, 1, \dots).$$

Auf Grund von (8) ist

$$(8^*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^{*2} [\log \log (k+3)]^2 [\log \log (l+3)]^2 < \infty.$$

In der zitierten Arbeit hat FEDULOV gezeigt, daß aus (8*) die Konvergenz der Folge

$$S_{2^m, 2^n}^*(x, y) = \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x, y)$$

in R fast überall folgt. Es sei $(x_0, y_0) \in R$ ein beliebiger und in weiteren fester Punkt, wo die Folge $\{S_{2^m, 2^n}^*(x, y)\}$ konvergiert, d.h. für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert eine ganze Zahl v , so daß

$$|S_{2^{m_1}, 2^{n_1}}^*(x_0, y_0) - S_{2^{m_2}, 2^{n_2}}^*(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (m_i, n_i > v \quad (i = 1, 2))$$

und

$$\left| \sum_{k=2^{i+1}}^{2^{i+1}+1} \sum_{l=1}^{2^n} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x_0, y_0) \right| < M(v; x_0, y_0) \quad 0 \leq i \leq v$$

für alle n gilt. Wenn also m genügend groß ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \sum_1(m, n; x_0, y_0) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^m} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x_0, y_0) \right| = \\ &= \frac{1}{2^m} \left| \sum_{i=0}^{m-1} 2^{i+1} \sum_{k=2^{i+1}}^{2^{i+1}+1} \sum_{l=1}^{2^n} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x_0, y_0) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^m} \left| \sum_{i=0}^v 2^{i+1} \sum_{k=2^{i+1}}^{2^{i+1}+1} \sum_{l=1}^{2^n} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x_0, y_0) \right| + \\ &+ \frac{1}{2^m} \sum_{i=v+1}^{m-1} 2^{i+1} \left| \sum_{k=2^{i+1}}^{2^{i+1}+1} \sum_{l=2^{v+1}+1}^{2^n} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x_0, y_0) \right| + \\ &+ \frac{1}{2^m} \sum_{i=v+1}^{m-1} 2^{i+1} \left| \sum_{k=2^{i+1}}^{2^{i+1}+1} \sum_{l=1}^{2^{v+1}} a_{k,l}^* \varphi_{k,l}(x_0, y_0) \right| < \\ &< \frac{2^{v+2} M(v; x_0, y_0)}{2^m} + \frac{\varepsilon}{8} \sum_{i=v+1}^{m-1} 2^{i+1} + \frac{\varepsilon}{8} \sum_{i=v+1}^{m-1} 2^{i+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ähnlicherweise können wir, zeigen, daß

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_2(m, n; x, y) = 0$$

in R fast überall gilt.

(Eingegangen am 2. März 1967.)