

## Die Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens auf den $n$ -dimensionalen Fall

Von J. SZABÓ (Debrecen)

L. ECKHART [1] hat in 1937 ein in der Praxis sehr schnelles Verfahren für die Konstruktion des axonometrischen Bildes gegeben. Dieses Verfahren nennt man im allgemeinen das Eckhartsche Einschneideverfahren. L. Eckhart hat aus zwei axonometrischen Bildern einer räumlichen Konfiguration ein neues axonometrisches Bild konstruiert. Wir betrachten ein räumliches Gebilde  $K$ .  $K'$  und  $K''$  seinen zwei axonometrische Bilder von  $K$  in derselben Zeichenebene. Seien  $p_1$  zu  $K'$  und  $p_2$  zu  $K''$  ( $p_1 \neq p_2$ ) je ein Parallelstrahlbüschel. Gilt  $P \in K$  und sind  $P'$  und  $P''$  axonometrische Bilder von  $P$ , so ist der Schnittpunkt  $P^s$  von  $\bar{p}_1$  und  $\bar{p}_2$  ein neues axonometrisches Bild des Punktes  $P$ , mit  $P' \in \bar{p}_1 \in p_1$  und  $P'' \in \bar{p}_2 \in p_2$ . Bei den praktischen Anwendungen sind  $K'$  und  $K''$  zwei Monge-Projektionen von  $K$ .

Vor der Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens wollen wir hier einige Begriffe und Sätze erörtern.

### 1. Das axonometrische Bild des $n$ -dimensionalen Raumes

Unsere Definition des axonometrischen Bildes des  $n$ -dimensionalen Raumes ist der Definition für den dreidimensionalen Fall analog. (Siehe [3] S. 133.)

$R_n$  sei ein  $n$ -dimensionaler Raum, charakterisiert durch ein Koordinatensystem  $O(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , wo  $O$  der Nullpunkt ist,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind die Einheitspunkte, die paarweise senkrechten Geraden  $OX_1, OX_2, \dots, OX_n$  sind die Koordinatensachen, und die Strecken  $OX_i$  sind alle gleich lang. Wir bezeichnen die Koordinaten irgendeines Punktes mit  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wir bezeichnen ferner die Zeichenebene (Bildebene) mit  $\alpha'$ , und wir nehmen in  $\alpha'$  den Punkt  $O'$  auf, welcher Nullpunkt  $O$  entspricht, und die Bilder  $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$  sind die Einheitspunkte der axonometrischen Koordinatenachsen. Es seien die Geraden  $O'X'_1, O'X'_2, \dots, O'X'_n$  paarweise voneinander verschieden, und ebenso die Punkte  $O, X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ . Gelten diese Bedingungen nicht, so nennen wir das axonometrische Koordinatensystem degeneriert.

**Definition 1.** Den Punkt  $P'$  nennen wir das axonometrische Bild des Punktes  $P$ , falls für seine axonometrischen Koordinaten  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  die Beziehungen

$$x'_1 = u'_1 x_1 \quad x'_2 = u'_2 x_2 \quad , , , \quad x'_n = u'_n x_n$$

gelten, wo  $u_i = O'X'_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) ist.

Die axonometrischen Koordinaten  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  sind den Strecken  $O'P'_1, O'P'_2, \dots, O'P'_n$  gleich, wo wir die Punkte  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$  axonometrische Koordinatenpunkte nennen. Aus den axonometrischen Koordinaten von  $P'$  erhalten wir den Punkt  $P'$  auf dem Wege

$$O'P'_1, P'_1P'_{12}, P'_{12}P'_{123}, \dots$$

$$\dots P'_{12\dots n-1}P'_{12\dots n} = P'$$

(Siehe für der Fall  $n=4$  Fig. 1.) Wir ordnen dem Punkt  $P'$  einen sogenannten axonometrischen Koordinatenquader zu, welcher die Kanten parallel zu den entsprechenden  $O'X'_i$  und die Kantenlängen gleich den entsprechenden axonometrischen Koordinaten hat. Zum Beispiel ist in Figur 1. der Punkt  $P'$  das Bild von  $P(1, 4, 2, 1) \in R_4$ .

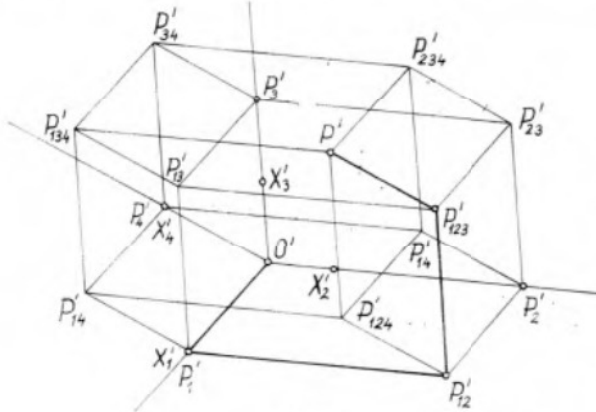


Fig. 1

**Definition 2.**  $R_n = O(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sei ein  $n$ -dimensionaler Raum, und  $R_i = O(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$  sei eine Hyperebene in  $R_n$ . Für  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$  und  $P^*(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in R_i$  nennen wir den Punkt  $P^*$  den Hyperseitenriß von  $P$ , und wir bezeichnen ihn mit  $P_{12\dots i-1, i+1\dots n}$ .

**Definition 3.** Das axonometrische Bild des Punktes  $P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  nennen wir den axonometrischen Hyperseitenriß desselben.

Zum Beispiel sind in Figur 1. die Punkte  $P'_{123}, P'_{124}, P'_{134}, P'_{234}$  axonometrische Hyperseitenrisse des Punktes  $P(1, 4, 2, 1)$ .

**Satz 1.** Gegebenen sei eine Gerade  $g \in R_n = O(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $g \not\parallel OX_i$  und eine Hyperebene  $R_i = O(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \in R_n$ , dann ist die zu  $OX_i$  parallele Projektion von  $g$  auf  $R_i$  wieder eine Gerade.

**BEWEIS.** Die Vektorgleichung von  $R_i$  ist

$$(1) \quad \bar{x} = l_1 e_1 + l_2 e_2 + \dots + l_{i-1} e_{i-1} + l_{i+1} e_{i+1} + \dots + l_n e_n$$

wo  $e_k = \overrightarrow{OX_k}$  ( $k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ) Basisvektoren sind. Die Vektorgleichung von  $g$  ist

$$(2) \quad \bar{x}^* = x_0 + t\alpha = (x_{01} + ta_1)e_1 + \dots + (x_{0i} + ta_i)e_i + \dots + (x_{0n} + ta_n)e_n.$$

Die Ebene, welche mit  $g$  inzidiert und zu  $OX_i$  parallel ist hat die Vektorgleichung

$$(3) \quad \bar{x} = x_0 + t\alpha + ce_i.$$

Aus (1) und (3) folgt die den Schnitt bestimmende Gleichung

$$l_1 e_1 + l_2 e_2 + \dots + l_{i-1} e_{i-1} + l_{i+1} e_{i+1} + \dots + l_n e_n - x_0 - t\alpha - ce_i = 0.$$

Somit haben wir

$$l_1 e_1 + l_2 e_2 + \dots + l_{i-1} e_{i-1} - ce_i + l_{i+1} e_{i+1} + \dots + l_n e_n = x_0 + t\alpha$$

oder ausführlicher

$$\begin{array}{rcl}
 l_1 \cdot 1 & & = x_{01} + ta_1 \\
 l_2 \cdot 1 & & = x_{02} + ta_2 \\
 \dots & & \dots \\
 l_{i-1} \cdot 1 & & = x_{i-1} + ta_{i-1} \\
 -c \cdot 1 & & = x_{0i} + ta_i \\
 l_{i+1} \cdot 1 & & = x_{0i+1} + ta_{i+1} \\
 \dots & & \dots \\
 l_n \cdot 1 & = & x_n + ta_n
 \end{array}
 \quad (4)$$

Das lineare Gleichungssystem (4) ist in  $l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, -c, l_{i+1} + \dots + l_n$  immer auflösbar, weil die Elemente der Matrix die Komponenten der Basisvektoren  $e_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) sind. Diese Lösung ist einparameterig, also eine Gerade.

Für  $g \parallel OX_i$  ergibt sich  $a = \lambda e_i$ , und die Lösung wird ein Punkt.

**Satz 2.** Das axonometrische Bild von  $R_n$  ist geradentreu und teilverhältnistreu.

**Folgerung.** Das axonometrische Bild von  $R_n$  ist paralleltreue, weil dem gemeinsamen unendlichfernen Punkt von zwei parallelen Geraden aus  $R_n$  — wegen der Teilverhältnistreue — im Bild wieder ein unendlichferner Punkt entspricht.

**BEWEIS.** Im Falle  $n=3$  ist der Satz gültig. ([3], S. 134.) Es sei der Satz für  $n=k$  richtig.  $R_i$  sei eine Hyperebene in  $R_{k+1}$ . Es sei eine Gerade  $g \in R_{k+1}$  gegeben, dann ist das orthogonale (Richtung  $OX_i$ ) Bild von  $g$  auf  $R_i$  wieder eine Gerade (Satz 1.), welche wir mit  $\bar{g}$  bezeichnen. Wir bezeichnen das orthogonale (Richtung  $OX_j$ ) Bild von  $g$  auf  $R_j \in R_{k+1}$ , welche wieder eine Gerade ist, mit  $\bar{g}$ . Wir nehmen die Punkte  $A, B, C \in g$  auf, und die entsprechenden orthogonalen Bilder seinen  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \bar{g}$ , bzw.  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \bar{g}$ . Für das Teilverhältnis der Punkte ergibt sich durch Parallelprojektion

$$(5) \quad (\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = (ABC) = (\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}).$$

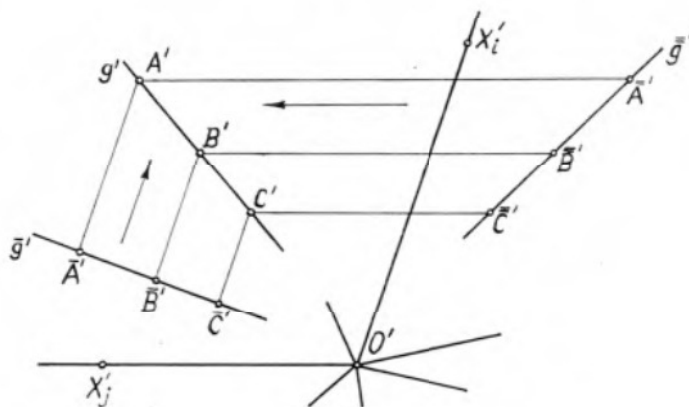


Fig. 2

In Figur 2. entwerfen wir das axonometrische Koordinatensystem von  $R_{k+1}$  und die axonometrischen Bilder von  $\bar{g}$  und  $\bar{g}'$ , die wir mit  $\bar{g}$  und  $\bar{g}''$  bezeichnen. Die axonometrischen Bilder der Punkte  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  auf  $\bar{g}'$  seien  $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$ , und die axonometrischen Bilder der Punkte  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  auf  $\bar{g}$  seien  $\bar{A}'', \bar{B}'', \bar{C}''$ . Nach der Induktionsvoraussetzung gelten die Beziehungen

$$(6) \quad \begin{aligned} (\bar{A} \bar{B} \bar{C}) &= (\bar{A}' \bar{B}' \bar{C}') \\ (\bar{A} \bar{B} \bar{C}) &= (\bar{A}'' \bar{B}'' \bar{C}'') \end{aligned}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(\bar{A}' \bar{B}' \bar{C}') = (\bar{A}'' \bar{B}'' \bar{C}'')$$

Aus Definition 1. folgt nun, daß man das axonometrische Bild von  $g$  als den Schnitt von zwei Parallelstrahlbüschel erhält, welche durch entsprechende Punkte gehen und parallel zu  $O'X'_i$ , bzw. zu  $O'X'_j$  sind. Diese Punkte  $A', B'$  und  $C'$  liegen auf einer Geraden ([3]. S. 135—136.), also gilt

$$(7) \quad (\bar{A}' \bar{B}' \bar{C}') = (A' B' C') = (\bar{A}'' \bar{B}'' \bar{C}'').$$

Aus (5), (6) und (7) folgt

$$(ABC) = (A' B' C').$$

## 2. Die Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens auf den $n$ -dimensionalen Fall

Wir betrachten einen räumlichen Gegenstand  $K$  und ein dazu gebundenes Koordinatensystem  $O(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .  $K'$  und  $K''$  seien auf  $\alpha$  (der Zeichenebene) zwei axonometrische Bilder von  $K$ . Nehmen wir jetzt zwei Parallelstrahlbüschel  $q'$  und  $q''$  zu  $K'$  und  $K''$ . ( $q' \nparallel q''$ ).

**Satz 3.** Es sei irgendein Punkt  $P \in K$  gegeben, also  $P' \in K'$  und  $P'' \in K''$ , ferner  $P' \in q'_p \in q'$ , und  $P'' \in q''_{p''} \in q''$ ; dann ergibt sich durch die Abbildung  $P \rightarrow P^s$ , — wo der Punkt  $P^s$  Schnittpunkt von  $q'_p$  und  $q''_{p''}$  ist —, ein neues axonometrisches Bild von  $K$ .

**BEWEIS.** In Falle, wo das Koordinatensystem  $O(X_1, X_2, X_3)$  ist, heißt der Raum  $R_n$  dreidimensionaler Raum, und der Satz und sein Beweis sind in [1] zu finden.

Es sei der Satz auf  $n=k$  gültig. In der Figur 3. entwerfen wir die axonometrischen Koordinatensysteme  $O'(X'_1, X'_2, \dots, X'_{k+1})$  und  $O''(X''_1, X''_2, \dots, X''_{k+1})$ , dann hat der Punkt  $P \in R_{k+1}$  zwei axonometrische Bilder, welche wir mit  $P'$  bzw. mit  $P''$  bezeichnen. Der Punkt  $P_{12\dots k}$  ist ein Hyperseitenriß von  $P$  in  $R_k$ , und wir fixieren die beiden axonometrischen Bilder des Punktes  $P_{12\dots k}$ , welche wir mit  $P'_{12\dots k}$  bzw. mit  $P''_{12\dots k}$  bezeichnen. Wir nehmen noch die Büschel  $p'$  zu  $O'(X'_1, X'_2, \dots, X'_{k+1})$  und  $p''$  zu  $O''(X''_1, X''_2, \dots, X''_{k+1})$ . Aus der Bedingung folgt, das wir mit dem Einschneideverfahren das axonometrische Bild der Hyperebene  $R_k$  erhalten, also  $P^s_{12\dots k}$  axonometrisches Bild von  $P_{12\dots k}$  in  $O^s(X^s_1, X^s_2, \dots, X^s_k)$  ist. Die Einschneidung der Geraden  $O'X'_{k+1}$  und  $O''X''_{k+1}$  bestimmt eine Gerade  $O^sX^s_{k+1}$  ([3]. S. 135—136.) und es gilt

$$(8) \quad (O'X'_{k+1} P'_{k+1}) = (O^sX^s_{k+1} P^s_{k+1}) = (O''X''_{k+1} P''_{k+1})$$

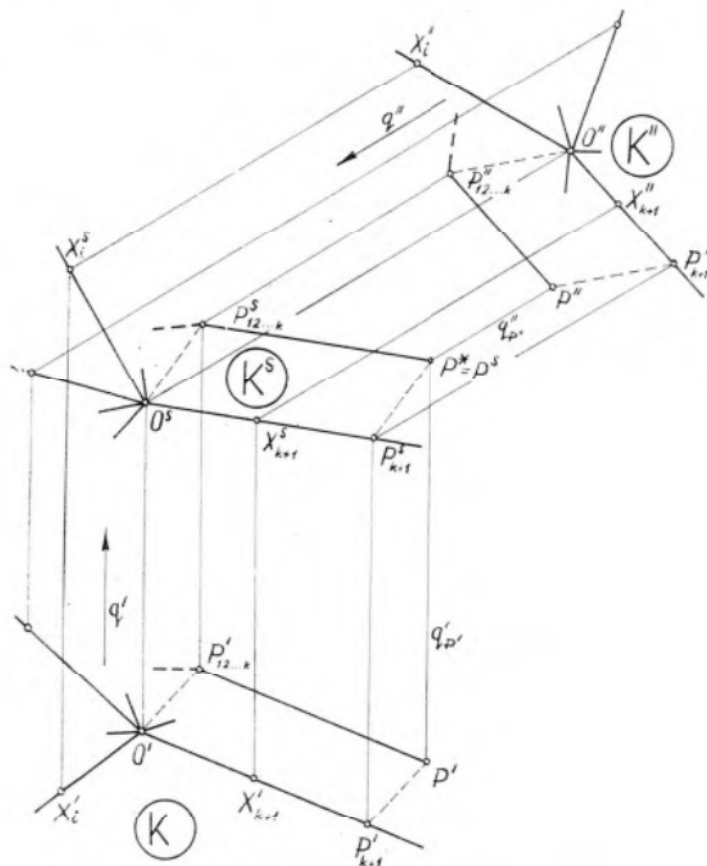


Fig. 3

Für die Koordinate  $x_{k+1}$  von  $P$  folgt aus der Definition 1.

$$(9) \quad O'P'_{k+1} = u'_{k+1}x_{k+1}$$

oder

$$O''P''_{k+1} = u''_{k+1}x_{k+1}.$$

Aus (9) und aus der Einschneidung ergibt sich

$$u'_{k+1}x_{k+1} = O'P'_{k+1}; \quad O'P'_{k+1} \cdot \mu = O^sP^s_{k+1}$$

also

$$\mu u'_{k+1}x_{k+1} = OP^s_{k+1}$$

und folglich gilt

$$u^s_{k+1}x_{k+1} = O^sP^s_{k+1}.$$

Die Strecke  $O^sP^s_{k+1}$  ist also die axonometrische Koordinate von  $P$  auf der Achse  $O^sX^s_{k+1}$ .

Die Abbildung des Einschneideverfahrens ist geradentreu und teilverhältnistreu ([3] S. 136.), also erhalten wir aus dem Parallelogramm  $O'P'_{k+1}P'P'_{12\dots k}$  und aus

dem Parallelogramm  $O''P''_{k+1}P''P''_{12\dots k}$  ein Parallelogramm  $O^sP^s_{k+1}P^sP^s_{12\dots k}$ , und deshalb ist der Punkt  $P^*$  gemäß dem Definition 1. das axonometrische Bild von  $P$ . In Hinblick auf die Konstruktion werden wir für  $P^*P^s$  schreiben.

In diesem speziellen Fall, wenn  $q'$  parallel zu  $O'X'_i$  und  $q''$  parallel zu  $O''X''_i$  ist, ist das axonometrische Bild  $K^s$  ein axonometrischer Hyperseitenriß von  $K$ . Aus dieser Feststellung folgt, daß wenn  $K'$  ein axonometrischer Hyperseitenriß von  $K$  mit  $O'(X'_1, \dots, X'_{i-1}, X'_{i+1}, \dots, X'_n)$  und  $K''$  ein anderer axonometrischer Hyperseitenriß von  $K$  mit  $O''(X''_1, \dots, X''_{j-1}, X''_{j+1}, \dots, X''_n)$  und  $j \neq k$  ist, so ist der aus  $K'$  und  $K''$  hergestellte  $K^s$  ein axonometrisches Bild von  $K$ .

### Praktische Anwendungen

In  $R_n$  ist der  $R_{n-1}$  eine Hyperebene ist, ebenso in  $R_{n-1}$  der  $R_{n-2}, \dots$  u.s.w. in  $R_3$  ist der  $R_2$  eine Ebene. Es sei eine Abbildung von  $R_n$  gegeben, z.B. diejenige von Schoute [2]. Dann stellen die  $O(X_1, X_2), O(X_2, X_3), \dots, O(X_{n-1}, X_n)$  je eine

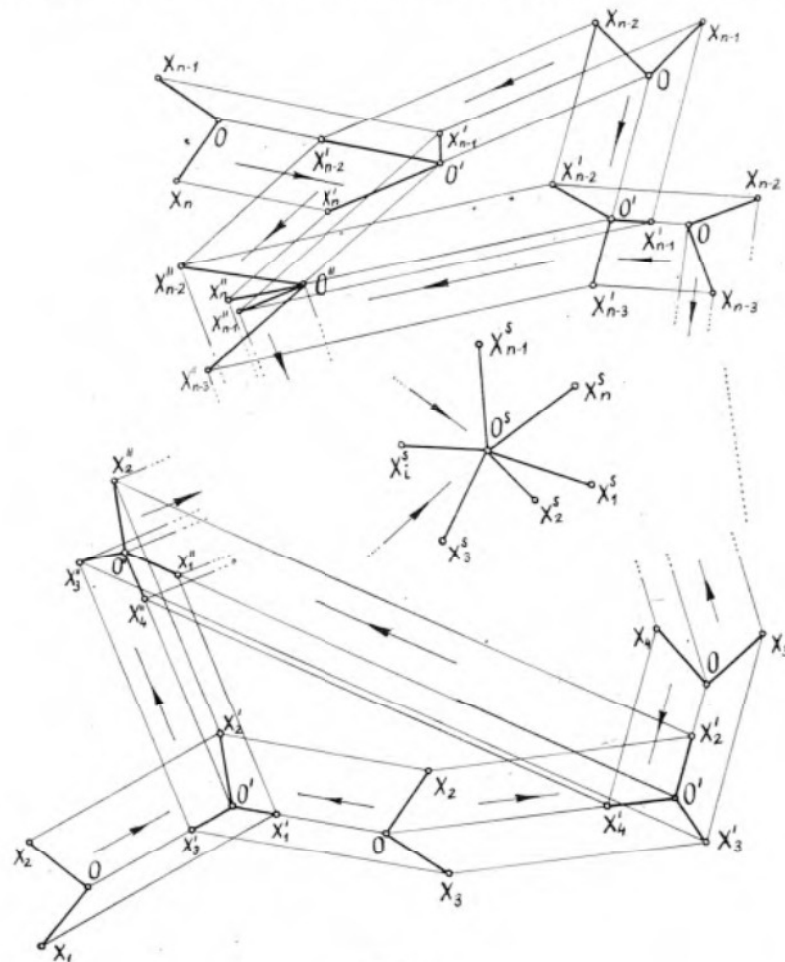


Fig. 4

Bildebene dar, welche wir als spezielle und degenerierte axonometrische Bilder betrachten. Diese Bilder bringen wir auf der Zeichenebene unter, und wir wählen ihnen entsprechend je einen Parallelstrahlbüschel. Aus  $O(X_1, X_2)$  und aus  $O(X_2, X_3)$  erhalten wir das axonometrische Bild  $O'(X'_1, X'_2, X'_3)$ , ..., aus  $O(X_{n-2}, X_{n-1})$  und aus  $O(X_{n-1}, X_n)$  das axonometrische Bild  $O'(X'_{n-2}, X'_{n-1}, X'_n)$ . (Siehe Fig. 4.) Zu diesen axonometrischen Bildern wählen wir wiederum Parallelstrahlbüschel, und aus diesen erhalten wir die Bilder der Räume  $R_4$ , u.s.w. Zuletzt erhalten wir zwei axonometrische Bilder von zwei Hyperebenen, aus welchen wir das axonometrische Bild von  $R_n$  bestimmen können.

### Literatur

- [1] L. ECKHART, Affine Abbildung und Axonometrie, *Sitzungsberichte der Ak. Wien, math. nat. Kl. Abt. II.*, 1937. 51—56.
- [2] P. H. SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil, *Leipzig*, 1902.
- [3] E. STIEFEL, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, *Basel*, 1947.

(Eingegangen am 20. Juni 1967.)