

Zur Konstruktion gewisser geordneter Halbmoduln

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

In Fortsetzung und Ergänzung der Resultate in [3] machen wir weitere Aussagen über solche (kommutative) geordnete Halbmoduln $\mathfrak{M}$, welche die Eigenschaft

JIV: Zu $a < b$ existiert $x \in \mathfrak{M}$ mit $a + x = b$

besitzen. Diese Aussagen liefern neben einer näheren strukturellen Beschreibung zugleich Hilfsmittel zur praktischen Bestimmung solcher Halbmoduln.

In [3] hatten wir gezeigt, daß man bis auf o-Isomorphie jeden Halbmodul mit JIV mit der Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$ als „geordnete Schreiersche Erweiterung“ $M = [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1] = \{[\bar{a}, \alpha]: \bar{a} \in \mathfrak{M}, \alpha \in \mathfrak{M}_1\}$ von $\mathfrak{M}_1$ mit einem natürlich geordneten Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit Nullelement $\bar{o}$ erhalten kann, die wie folgt definiert ist:

$$[\bar{a}, \alpha] = [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \text{ und } R(\bar{a}, \alpha, \beta);$$

$$[\bar{a}, \alpha] + [\bar{b}, \beta] = [\bar{a} + \bar{b}, s(\bar{a}, \bar{b}) + \alpha + \beta];$$

$$[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \bar{a} < \bar{b} \text{ oder } \bar{a} = \bar{b}, \alpha < \beta \text{ und } \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta).$$

Dabei ist $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ eine Relation in $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$, die für sich bzw. zusammen mit dem „Summandensystem“ $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$ (mit der Anfangsbedingung $s(\bar{o}, \bar{o}) = o$) gewisse Bedingungen (1)–(6) bzw. (I)–(III) erfüllt¹⁾. Wir vereinfachen zunächst (III):

Satz 1. (III) ist gleichwertig mit der Bedingung:

Aus $\bar{b} + \bar{c} = \bar{c}$ mit $\bar{b} \neq \bar{o}$, folgt $R(\bar{c}, \xi, \eta)$ für alle ξ und η .

BEWEIS. Mit dieser Bedingung ist auch (III) erfüllt; denn aus $\bar{a} < \bar{b}$ und $\bar{a} + \bar{c} = \bar{b} + \bar{c} = \bar{d} \neq \bar{o}$ folgt wegen $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$ die Gleichung $\bar{x} + \bar{d} = \bar{d}$, also stets $R(\bar{d}, \xi, \eta)$. Für die Umkehrung nehmen wir an, es gäbe ξ und η mit $\neg R(\bar{c}, \xi, \eta)$. Wir lösen dann in $\mathfrak{M}_1$ die Gleichungen

$$s(\bar{o}, \bar{c}) + \alpha = \xi \quad \text{und} \quad s(\bar{b}, \bar{c}) + \beta = \eta,$$

¹⁾ Den Inhalt der Aussagen (1)–(6) kann man dem Beweis des nachfolgenden Satzes 2 entnehmen. Übrigens schrieben wir in [3] $\bar{a}\bar{b}$ statt $s(\bar{a}, \bar{b})$; der Vollständigkeit halber seien auch die Aussagen (I)–(III) hier nochmals formuliert:

- (I) $R(\bar{a} + \bar{b}, s(\bar{a}, \bar{b}), s(\bar{b}, \bar{a}))$;
- (II) $R(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, s(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) + s(\bar{b}, \bar{c}), s(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) + s(\bar{a}, \bar{b}))$;
- (III) $\bar{a} < \bar{b}, \bar{a} + \bar{c} = \bar{b} + \bar{c}, \neg R(\bar{a} + \bar{c}, s(\bar{a}, \bar{c}) + \alpha, s(\bar{b}, \bar{c}) + \beta) \Rightarrow s(\bar{a}, \bar{c}) + \alpha < s(\bar{b}, \bar{c}) + \beta$.

woraus aus (III) $\xi < \eta$ folgt. Da aber mit $\neg R(\bar{c}, \xi, \eta)$ gemäß (2) auch $\neg R(\bar{c}, \eta, \xi)$ gilt, erhielte man ebenso $\eta < \xi$. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Wir zeigen nun, daß die Konstruktion aller möglichen geordneten Schreierschen Erweiterungen $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1]$ zu vorgegebenen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ auf die Bestimmung der Kette Σ aller konvexen Untermoduln von $\mathfrak{M}_1$ und die Menge aller ähnlichen Abbildungen ²⁾ von $\mathfrak{M}$ in Σ hinausläuft.

Satz 2. Jede ähnliche Abbildung $\bar{a} \rightarrow \mathfrak{M}_a$ von $\mathfrak{M}$ in Σ mit $\bar{o} \rightarrow (o)$ und

$$(III') \quad \bar{c} \rightarrow \mathfrak{M}_1, \text{ falls } \bar{b} + \bar{c} = \bar{c} \text{ mit } \bar{b} \neq \bar{o}$$

liefert vermöge

$$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \leftrightarrow \alpha \equiv \beta \quad (\mathfrak{M}_a)$$

zusammen mit jedem System $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$, welches die Bedingungen

$$(I') \quad s(\bar{a}, \bar{b}) \equiv s(\bar{b}, \bar{a}) \quad \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$$

$$(II') \quad s(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) + s(\bar{b}, \bar{c}) \equiv s(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) + s(\bar{a}, \bar{b}) \quad (\mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}})$$

erfüllt, eine geordnete Schreiersche Erweiterung $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1]$, und umgekehrt entsteht jede solche Erweiterung auf diese Weise.

BEWEIS. In der Tat gilt für die so definierte Relation:

- (1) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha)$.
- (2) $R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Rightarrow R(\bar{a}, \beta, \alpha)$.
- (3) $R(\bar{a}, \alpha, \beta), R(\bar{a}, \beta, \gamma) \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha, \gamma)$.
- (4) $R(\bar{o}, \alpha, \beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ wegen $\bar{o} \rightarrow (o)$.
- (5) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha'), R(\bar{b}, \beta, \beta') \Rightarrow R(\bar{a} + \bar{b}, \alpha + \beta, \alpha' + \beta')$; denn wegen $\bar{a} \equiv \bar{a} + \bar{b}$ und $\bar{b} \equiv \bar{a} + \bar{b}$ gilt $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \cup \mathfrak{M}_{\bar{b}} \subseteq \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$, also auch $(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') \in \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$.
- (6) $\alpha < \beta, \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta), R(\bar{a}, \alpha, \alpha'), R(\bar{a}, \beta, \beta') \Rightarrow \alpha' < \beta'$; denn wegen $\alpha - \alpha' = \gamma \in \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ und $\beta - \beta' = \delta \in \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ folgt aus $\alpha - \beta \notin \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ auch $\alpha' - \beta' \notin \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ und wegen $\alpha' - \beta' < \delta - \gamma$ weiter $\alpha' - \beta' < o$, da $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ konvex ist.

Ist umgekehrt eine Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ mit den Eigenschaften (1)–(6) vorgegeben, so ist

$$\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \{\gamma : \gamma \in \mathfrak{M}_1, R(\bar{a}, \gamma, o)\}$$

wegen (5) ein Untermodul von $\mathfrak{M}_1$ ³⁾. $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ ist konvex, denn aus $R(\bar{a}, \gamma_1, o)$ und $R(\bar{a}, \gamma_2, o)$ und $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ folgt $R(\bar{a}, \gamma, o)$; wäre nämlich $\neg R(\bar{a}, \gamma, o)$, so lieferte dies wegen $\gamma_1 < \gamma$, $\neg R(\bar{a}, \gamma_1, \gamma)$, $R(\bar{a}, \gamma_1, \gamma_2)$ und $R(\bar{a}, \gamma, \gamma)$ nach (6) den Wider-

²⁾ Mit „ähnlich“ bezeichnen wir (neben eindeutig) die Eigenschaft: Aus $\bar{a} \equiv \bar{b}$ folgt $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}_{\bar{b}}$.

³⁾ Allgemein erhält man aus (5) die beiden gleichwertigen Aussagen

$$(5') \quad R(\bar{a}, \alpha, \alpha') \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha + \eta, \beta + \eta),$$

$$(5'') \quad R(\bar{a}, \alpha, \alpha'), R(\bar{a}, \beta, \beta') \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha + \beta, \alpha' + \beta').$$

spruch $\gamma_2 < \gamma$. Die (eindeutige) Abbildung von $\overline{\mathfrak{M}}$ in Σ vermöge $\bar{a} \rightarrow \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ ist ähnlich, denn zu $\bar{a} \cong \bar{b}$ existiert $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ mit $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$, so daß aus $R(\bar{a}, \gamma, o)$ wegen $R(\bar{x}, o, o)$ gemäß (5) auch $R(\bar{a} + \bar{x}, \gamma, o)$ und damit $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}_{\bar{b}}$ folgt; insbesondere gilt $\bar{o} \rightarrow (o)$ wegen (4). Schließlich erhält man aus (5')

$$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow R(\bar{a}, \alpha - \beta, o) \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathfrak{M}_{\bar{a}}.$$

Die Äquivalenz von (I)—(III) mit (I')—(III') ist offensichtlich.

Folgerung.

a) Für jedes idempotente Element $\bar{a} \neq \bar{o}$ von $\overline{\mathfrak{M}}$ gilt $\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \mathfrak{M}_1$.

b) Jedes $s(\bar{a}, \bar{b})$ mit $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$ kann durch o ersetzt werden; dies gilt insbesondere stets im Falle $\bar{a} = \bar{o}$ oder $\bar{b} = \bar{o}$ und (trivialerweise) im Falle $\mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}} = \mathfrak{M}_1$, speziell also für $\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \mathfrak{M}_1$ oder $\mathfrak{M}_{\bar{b}} = \mathfrak{M}_1$.

Wir wollen den Spezialfall hervorheben, daß als Untermoduln $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ von $\mathfrak{M}_1$ nur der Nullmodul (o) oder $\mathfrak{M}_1$ selbst verwendet werden, wie dies bei jedem o -einfachen (insbesondere also bei jedem archimedischen) Modul $\mathfrak{M}$ notwendigerweise der Fall ist; dann vereinfachen sich nämlich (I') und (II') zu den nachstehend genannten Bedingungen (ii) und (iii), so daß wir aus Satz 2 unmittelbar erhalten:

Satz 3. Jede Zerlegung $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{U} \cup \overline{V}$ mit $\overline{U} \triangleleft \overline{V}$, wobei $\overline{V}$ auch leer sein darf, aber jedenfalls jedes $\bar{c} \neq \bar{o}$ aus $\overline{\mathfrak{M}}$ enthält, zu dem ein $\bar{b} \neq \bar{o}$ aus $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\bar{b} + \bar{c} = \bar{c}$ existiert, liefert vermöge

$$\mathfrak{M}_{\bar{u}} = (o) \quad \text{für} \quad \bar{u} \in \overline{U},$$

$$\mathfrak{M}_{\bar{v}} = \mathfrak{M}_1 \quad \text{für} \quad \bar{v} \in \overline{V}$$

zusammen mit jedem System $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$ mit den Eigenschaften

- (i) $s(\bar{a}, \bar{o}) = o$ für alle $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$; $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ für $\bar{a} + \bar{b} \in \overline{V}$,
- (ii) $s(\bar{a}, \bar{b}) = s(\bar{b}, \bar{a})$ für $\bar{a} + \bar{b} \in \overline{U}$,
- (iii) $s(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) + s(\bar{b}, \bar{c}) = s(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) + s(\bar{a}, \bar{b})$ für $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \in \overline{U}$

eine geordnete Schreiersche Erweiterung $[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$. Ist $\mathfrak{M}_1$ o -einfach, so ist jede solche Erweiterung auf diese Weise zu erhalten.

Eine wesentliche Vereinfachung des Problems, alle Halbmoduln mit JIV zu gewinnen, besteht in der Zurückführung auf den Fall $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ mit irreduziblem $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$, die wir unter Verwendung der Cliffordschen Zerlegung natürlich geordneter Halbmoduln erhalten (vgl. [1; Theorem 1]), wobei diese Überlegungen zu weiteren grundsätzlichen Einsichten in die Struktur der Halbmoduln mit JIV führen, die übrigens eine explizite Beschreibung der in [2; Satz 10] geschilderten Verhältnisse darstellen.

Satz 4. Es sei $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ eine geordnete Schreiersche Erweiterung und

$$\overline{\mathfrak{M}} = \bigsqcup_{\tau \in T} \overline{\mathfrak{M}}_{\tau}$$

die Cliffordsche Zerlegung des natürlich geordneten Halbmoduls $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$ als geordnete Summe natürlich geordneter irreduzibler Unterhalbmoduln $\overline{\mathfrak{M}}_{\tau}$.

a) Existiert in der Zerlegung von $\overline{\mathfrak{M}}$ kein erster irreduzibler Bestandteil, so gilt (bis auf ähnliche Isomorphie)

$$M = \mathfrak{M}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{M}}.$$

b) Ist dagegen $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_0 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}$ mit einem irreduziblen natürlich geordneten Unterhalbmodul $\overline{\mathfrak{M}}_0$ von $\overline{\mathfrak{M}}$, so gilt mit $\overline{\mathfrak{M}}_0 = \{\bar{o}\} \cup \overline{\mathfrak{M}}_0$ (bis auf ähnliche Isomorphie)

$$M = [\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1] \subseteq \overline{\mathfrak{B}}.$$

Umgekehrt entsteht auf diese Weise sets ein Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV mit der Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$ und dem Faktorhalbmodul $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$.

Korollar. Der positiv geordnete Halbmodul $M_2 = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ aus der geordneten Zerlegung von $M = M_1 \cup M_2$ (mit $M_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_1$) besitzt die folgende Cliffordsche Zerlegung als geordnete Summe positiv geordneter irreduzibler Unterhalbmoduln S_τ :

$$M_2 = \bigsqcup_{\tau \in T} S_\tau \quad \text{mit} \quad S_0 = [\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1], \quad S_\tau = \overline{\mathfrak{M}} \quad \text{für} \quad \tau \neq 0.$$

M_2 ist genau dann sogar natürlich geordnet (und damit dann $M = M_1 \subseteq M_2$), wenn dies für S_0 zutrifft, was wiederum gleichwertig mit $S_0 \xrightarrow{\sim} \overline{\mathfrak{M}}_0$ (und damit $M_2 \xrightarrow{\sim} \overline{\mathfrak{M}}$) ist.

BEWEIS. a) Wegen (III') gilt $\mathfrak{M}_{\bar{c}} = \mathfrak{M}_1$ für alle $\bar{c} \in \overline{\mathfrak{M}}$ und damit $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ für alle $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathfrak{M}}$ gemäß Folgerung b). Daraus folgt die Behauptung gemäß [2, Satz 4].

b) In der Zerlegung

$$M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1] = [\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1] \cup [\overline{\mathfrak{B}}, \mathfrak{M}_1]$$

sind beide Bestandteile jedenfalls Unterhalbmoduln von M , und es gilt $[\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1] < [\overline{\mathfrak{B}}, \mathfrak{M}_1]$. Aus $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ und $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{B}}$ folgt $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b}$ und damit $\mathfrak{M}_{\bar{b}} = \mathfrak{M}_1$, also $[\bar{b}, \xi] = [\bar{b}, o]$ für alle $\xi \in \mathfrak{M}_1$; mithin gilt

$$[\bar{a}, \alpha] + [\bar{b}, \beta] = [\bar{b}, \beta]$$

für alle $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ und $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{B}}$. Schließlich gilt

$$\overline{\mathfrak{B}} \xrightarrow{\sim} [\overline{\mathfrak{B}}, \mathfrak{M}_1] \quad \text{vermöge} \quad \bar{b} \mapsto [\bar{b}, o].$$

Die behauptete Umkehrung des Satzes ist offensichtlich. Für das Korollar begnügen wir uns mit dem Nachweis, daß S_0 ein (positiv geordneter) irreduzibler Unterhalbmodul von M_2 ist. Wäre dies nicht der Fall, so würde eine Zerlegung

$$S_0 = U \subseteq V$$

in positiv geordnete Unterhalbmoduln U und V existieren. Wenn es dabei für ein festes $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ ein $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ mit $[\bar{a}, \alpha] \in U$ gibt, so gilt sogar $[\bar{a}, \gamma] \in U$ für alle $\gamma \in \mathfrak{M}_1$. Wäre nämlich $[\bar{a}, \delta] \in V$ für ein $\delta \in \mathfrak{M}_1$, so folgte aus $[\bar{a}, \alpha] + [\bar{a}, \delta] = [\bar{a}, \delta]$ einerseits $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a}$, also $\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \mathfrak{M}_1$, aber im Widerspruch dazu aus $[\bar{a}, \alpha] < [\bar{a}, \delta]$ andererseits $\alpha \neq \delta$ ($\mathfrak{M}_{\bar{a}}$). Daher zerfällt $\overline{\mathfrak{M}}_0$ in die beiden Teilmengen

$$\overline{\mathfrak{U}} = \{\bar{u}: [\bar{u}, \alpha] \in U\} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{V}} = \{\bar{v}: [\bar{v}, \beta] \in V\}.$$

Offenbar sind $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\overline{\mathfrak{V}}$ sogar Unterhalbmoduln von $\overline{\mathfrak{M}}_0$ und erfüllen $\overline{\mathfrak{U}} < \overline{\mathfrak{V}}$. Ferner folgt aus $[\bar{u}, \alpha] + [\bar{v}, \beta] = [\bar{v}, \beta]$ auch $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v}$ für alle $\bar{v} \in \overline{\mathfrak{V}}$ und $\bar{u} \in \overline{\mathfrak{U}}$ und hieraus

schließlich noch, daß $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{M}}_0$ natürlich geordnet sind. Dies steht aber im Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{M}}_0$.

Abschließend behandeln wir die Frage, wann Schreiersche Erweiterungen $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ und $M' = [\overline{\mathfrak{M}'}, \mathfrak{M}'_1]$ o-isomorph sind. Nun ist zunächst festzustellen, daß bei jedem o-Isomorphismus ω von M auf M' die Komponenten in den geordneten Zerlegungen

$$M = M_1 \cup M_2 \quad \text{und} \quad M' = M'_1 \cup M'_2$$

jeweils für sich o-isomorph aufeinander abgebildet werden; denn die Eigenschaft, ein Entgegengesetztes zu besitzen, gilt für Original- und Bildelement gleichzeitig, und M_1 bzw. M'_1 ist jeweils gerade die Menge aller Elemente von M bzw. M' mit dieser Eigenschaft. Dann sind aber auch die Faktorhalbmoduln M/M_1 und M'/M'_1 und damit $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}'}$ o-isomorph. Damit kann man die Frage dahingehend einschränken, wann Paare R, s und R', s' zu o-isomorphen Halbmoduln $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ und $M' = [\overline{\mathfrak{M}'}, \mathfrak{M}'_1]$ führen. Wir geben hierfür ein Kriterium, das routinemäßig zu beweisen ist:

Satz 5. *Es seien $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ und $M' = [\overline{\mathfrak{M}'}, \mathfrak{M}'_1]$ Schreiersche Erweiterungen von $\mathfrak{M}_1$ mit $\overline{\mathfrak{M}}$, jeweils festgelegt durch das Paar R, s bzw. R', s' , wobei $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ und $s'(\bar{a}, \bar{b}) = o$ im Falle $\bar{a} = \bar{o}$ oder $\bar{b} = \bar{o}$ gewählt sei. Besteht dann zwischen M und M' ein o-Isomorphismus*

$$M \xrightarrow{\sim} M' \quad \text{vermöge} \quad [\bar{a}, \alpha] \rightarrow \omega[\bar{a}, \alpha]$$

und setzt man

$$\omega[\bar{o}, \alpha] = [\varphi(\bar{o}), \psi(\alpha)],$$

$$\omega[\bar{a}, o] = [\varphi(\bar{a}), \chi(\bar{a})],$$

so gilt ⁴⁾:

- (1) $\alpha \rightarrow \psi(\alpha)$ ist ein o-Automorphismus von $\mathfrak{M}_1$;
- (2) $\bar{a} \rightarrow \varphi(\bar{a})$ ist ein o-Automorphismus von $\overline{\mathfrak{M}}$;
- (3) $\bar{a} \rightarrow \chi(\bar{a})$ ist eine (eindeutige) Abbildung von $\overline{\mathfrak{M}}$ in $\mathfrak{M}_1$ mit $\chi(\bar{o}) = o$;
- (4) $R(\bar{a}, \alpha, \beta) \leftrightarrow R'(\varphi(\bar{a}), \psi(\alpha), \psi(\beta))$;
- (5) $R'(\varphi(\bar{a} + \bar{b}), \chi(\bar{a}) + \chi(\bar{b}) + s'(\varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{b})), \chi(\bar{a} + \bar{b}) + \psi(s(\bar{a}, \bar{b})))$;
- (6) $\omega[\bar{a}, \alpha] = [\varphi(\bar{a}), \chi(\bar{a}) + \psi(\alpha)]$.

Umgekehrt wird bei Vorgabe von drei Abbildungen (1), (2), (3), welche den Bedingungen (4) und (5) genügen, durch die Vorschrift (6) stets ein o-Isomorphismus ω von M auf M' geliefert.

Korollar. *Bei vorgegebenem o-Isomorphismus ω ist (4) gleichwertig mit $\psi(\mathfrak{M}_{\bar{a}}) = \mathfrak{M}'_{\varphi(\bar{a})}$.*

Beispiele. Zur Veranschaulichung der vorangehenden Aussagen diskutieren wir als Beispiele einige Fälle, in denen der natürlich geordnete Halbmodul $\overline{\mathfrak{M}}$ aus

⁴⁾ $\chi(\bar{a})$ bezeichne dabei einen festgewählten und damit durch $\bar{a}$ eindeutig bestimmten Repräsentanten aus der Klasse $[\xi]$ aller Elemente $\xi \in \mathfrak{M}_1$ mit $\omega[\bar{a}, o] = [\varphi(\bar{a}), \xi]$.

bis zu vier Elementen besteht; die Struktur solcher (endlichen) Halbmoduln $\overline{\mathfrak{M}}$ ist gemäß Clifford [1] einfach zu überschauen.

1. Besteht $\overline{\mathfrak{M}}$ nur aus einem Element, so gilt offenbar $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\}$ und $M = [\bar{o}, \mathfrak{M}_1] \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_1$.

2. Im Falle zweier Elemente hat man $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}, \bar{1}\} = \{\bar{o}\} \leq \{\bar{1}\}$. Daher gilt hier neben $\mathfrak{M}_0 = (o)$ notwendig $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$, d.h. M_2 besteht nur aus einem Element. Bezeichnen wir dieses mit ∞ , so erhalten wir also $M = M_1 \leq \{\infty\}$.

3. Im Falle dreier Elemente gibt es die beiden Möglichkeiten

(A) $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \leq \{\bar{1}\} \leq \{\bar{2}\}$ und

(B) $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \leq \{\bar{1}, \bar{2}\}$ (mit $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$).

Im Falle (A) gilt notwendig $\mathfrak{M}_0 = (o)$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1$ und damit (in Übereinstimmung mit Satz 4b)

$$M = M_1 \leq M_2 \quad (\text{mit } M_2 \xrightarrow{\sim} \overline{\mathfrak{M}}).$$

Der Fall (B) ist wegen der Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$ der eigentlich interessante Fall; hier steht zunächst nur $\mathfrak{M}_0 = (o)$ und $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1$ fest (also wieder $[\bar{2}, \alpha] = [\bar{2}, 0] = \infty$ für alle $\alpha \in \mathfrak{M}_1$).

Daraus ergibt sich jedenfalls gemäß Folgerung c), daß $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ für alle $\bar{a}$ und $\bar{b}$ aus $\overline{\mathfrak{M}}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist. Dagegen gibt es für $\mathfrak{M}_1$ prinzipiell drei Möglichkeiten:

(B₁) $\mathfrak{M}_1 = (o)$. Dann gilt $M = M_1 \cup ([\bar{1}, \mathfrak{M}_1] \cup \{\infty\})$, wobei M gerade die in [3; §3] beschriebene Struktur besitzt.

(B₂) $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1$. Dann gilt wegen $M_2 \xrightarrow{\sim} \{\bar{1}, \bar{2}\} = \overline{\mathfrak{M}}$ gemäß Satz 3b (vgl. auch [2; Satz 4]) $M = M_1 \leq M_2$.

(B₃) $\mathfrak{M}_1$ ist ein nichttrivialer (d.h. von (o) und $\mathfrak{M}_1$ verschiedener) konvexer Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}_1$. In diesem Falle kann man natürlich nähere Aussagen nur bei konkreter Kenntnis von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{U}$ machen. Als Beispiel wählen wir $\mathfrak{M}_1$ als den Modul $\mathbb{Z}$ der komplexen Zahlen, wobei diese lexikographisch nach Real- bzw. Imaginärteil geordnet sind. Als (einziger) nichttrivialer konvexer Untermodul existiert hier der Modul $\mathfrak{U}$ aller reinimaginären Zahlen (einschließlich $0 = 0i$). Setzt man also $\alpha = a_1 + a_2i$, $\beta = b_1 + b_2i$ (a_k, b_k reell), so erhält man

$$R(\bar{1}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta(\mathfrak{U}) \Leftrightarrow a_1 = b_1$$

bzw.

$$[\bar{1}, x] = [\bar{1}, \xi] \quad \text{für alle } \xi = x + yi \quad (x, y \text{ reell}).$$

Daher ist hier $[\bar{1}, \mathbb{Z}]$ ähnlich zur Menge $\mathbb{A}$ der reellen Zahlen, d.h.

$$M = \mathbb{Z} \cup ([\bar{1}, \mathbb{A}] \cup \{\infty\}).$$

4. Legt man $\overline{\mathfrak{M}}$ mit vier Elementen zugrunde, so gibt es folgende Möglichkeiten:

(A) $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \leq \{\bar{1}\} \leq \{\bar{2}\} \leq \{\bar{3}\}$ oder $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \leq \{\bar{1}\} \leq \{\bar{2}, \bar{3}\}$.

Dann ist notwendig $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1$ und damit gemäß Satz 4b

$$M = M_1 \leq M_2 \quad (\text{mit } M_2 \xrightarrow{\sim} \overline{\mathfrak{M}}).$$

(B) $\mathfrak{M} = \{\bar{o}\} \subseteq \{\bar{1}, \bar{2}\} \subseteq \{\bar{3}\}$. Über diesen Fall weiß man auf Grund von Satz 4b Bescheid, wenn man den Fall (3. B) beherrscht, nämlich gemäß $M = M_1 \cup (\dots \subseteq [3, o])$.

(C) $\mathfrak{M} = \{\bar{o}\} \subseteq \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (mit $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$, sonst $\bar{a} + \bar{b} = \bar{3}$ für $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}$). Dies ist wieder der eigentlich interessante Fall, wobei es auf die Auswahl von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ als konvexe Untermoduln von $\mathfrak{M}_1$ ankommt. Setzt man z.B. $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = (o)$, so gilt

$$M = M_1 \cup ([\bar{1}, \mathfrak{M}_1] \cup [\bar{2}, \mathfrak{M}_1] \cup [\bar{3}, o]),$$

wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ für $\bar{a} \neq \bar{1}$, $\bar{b} \neq \bar{1}$ angenommen werden kann, während (gemäß Satz 3) für jede Wahl von $s(\bar{1}, \bar{1})$ jedesmal ein anderes M entsteht. Alle diese Halbmoduln M sind aber untereinander o-isomorph; wählt man nämlich für zwei solche Halbmoduln M und M' (mit $R = R'$, $s(\bar{1}, \bar{1}) = o$, $s'(\bar{1}, \bar{1}) \neq o$)

- (1) $\psi(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathfrak{M}_1$,
- (2) $\varphi(\bar{a}) = \bar{a}$ für alle $\bar{a} \in \mathfrak{M}$,
- (3) $\chi(\bar{o}) = o$, $\chi(\bar{1}) = o$, $\chi(\bar{2}) = s'(\bar{1}, \bar{1})$, $\chi(\bar{3}) = o$.

so sind die Bedingungen (4) und (5) aus Satz 5 erfüllt, so daß

$$[\bar{a}, \alpha] \rightarrow [\bar{a}, \chi(\bar{a}) + \alpha]$$

einen o-Isomorphismus ω von M auf M' liefert. Wählt man dagegen eine andere Relation R' , etwa mit $\mathfrak{M}_2' \neq (o)$, so entstehen weitere Halbmoduln M' , die nicht o-isomorph zu den eben betrachteten sind, denn sonst müßte es ja (wegen $\varphi(\bar{a}) = \bar{a}$ für alle $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ auf Grund der Endlichkeit von $\mathfrak{M}$) einen o-Automorphismus ψ von $\mathfrak{M}_1$ mit $\psi(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_2'$ geben im Widerspruch zu $\mathfrak{M}_2 = (o)$.

Literatur

- [1] A. H. CLIFFORD, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 631—646.
- [2] H. LUGOWSKI, Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 23—31.
- [3] H. LUGOWSKI, Die Charakterisierung gewisser geordneter Halbmoduln mit Hilfe der Erweiterungstheorie, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 237—248.

(Eingegangen am 11. December 1966.)