

Differenzierbarkeitseigenschaften von Lösungen hypoelliptischer Differentialgleichungen

Von ERICH MÜLLER-PFEIFFER (Jena)

Die zu untersuchenden Differentialgleichungen werden als Operatorgleichungen $Au=f$ interpretiert, so daß die Theorie der Differentialoperatoren angewendet werden kann. Der zugrunde liegende Hilbertraum ist $L_2(E_n)$, der Raum der im n -dimensionalen euklidischen Raum E_n definierten und im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbaren Funktionen. A ist der vorgelegten Differentialgleichung entsprechend ein hypoelliptischer Differentialoperator ([5]). Die im folgenden benutzte Methode, um Kenntnisse über Differenzierbarkeitseigenschaften von Lösungen u der Gleichung $Au=f$ in Abhängigkeit von der rechten Seite zu gewinnen, ist, die Funktion $f(x)$, $x=(x_1, \dots, x_n) \in E_n$, als Element gewisser Teilräume von $L_2(E_n)$ aufzufassen. Als solche Teilräume werden Räume verwendet, die als Verallgemeinerungen der bekannten Sobolewschen Räume $W_2^l(E_n)$ ([6]) anzusehen sind. Die durch A bestimmte selbstadjungierte Erweiterung $\bar{A}$ von A bildet ihren Definitionsbereich $D(\bar{A})$ auf einen solchen Teilraum ab und gibt gemäß $\bar{A}u=f$ den Anlaß, sog. „verallgemeinerte Lösungen“ $u \in D(\bar{A})$ zu definieren. $D(\bar{A})$ ist in bestimmten verallgemeinerten Sobolewschen Räumen eingebettet, woraus sich bestimmte Differenzierbarkeitseigenschaften einer Lösung $u(x)$ ableiten. $\bar{A}$ besitzt nur stetiges Spektrum, dessen Lokalisierung durch die Konstruktion von Weylschen Folgen bestimmt wird.

Der euklidische Raum E_n wird als direkte Summe von s paarweise orthogonalen Teilräumen E_{n_j} der Dimensionen n_j dargestellt,

$$E_n = \sum_{j=1}^s \oplus E_{n_j}, \quad n = \sum_{j=1}^s n_j.$$

Entsprechend faßt man die n Komponenten von $x \in E_n$ zu s Teilmenge n zusammen

$$(1) \quad x = (x_1, \dots, x_n) = ({}_1x_1, {}_1x_2, \dots, {}_1x_{n_1}, {}_2x_1, \dots, {}_2x_{n_2}, \dots, {}_sx_1, \dots, {}_sx_{n_s}).$$

Dann ist

$$(2) \quad {}_jx = ({}_jx_1, \dots, {}_jx_{n_j}) \in E_{n_j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^s \oplus {}_jx = x.$$

Analog definiert man einen Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dessen Komponenten α_i nicht

negative ganze Zahlen sind, und benutzt zur Abkürzung Multiindizes ([4, S. 4]):

$$(3) \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = ({}_1\alpha_1, {}_1\alpha_2, \dots, {}_1\alpha_{n_1}, {}_2\alpha_1, \dots, {}_2\alpha_{n_2}, {}_s\alpha_1, \dots, {}_s\alpha_{n_s}),$$

$${}_j\alpha = ({}_j\alpha_1, \dots, {}_j\alpha_{n_j}), \quad |{}_j\alpha| = \sum_{v=1}^{n_j} {}_j\alpha_v.$$

Damit definiert man

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

und die Differentialoperatoren

$$(4) \quad D_{x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n; \quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D^{j\alpha} = D_{jx_1}^{j\alpha_1} \dots D_{jx_{n_j}}^{j\alpha_{n_j}},$$

mit deren Hilfe auf der linearen Menge $C_0^\infty(E_n)$ der in E_n finiten Funktionen folgende Norm gebildet wird ([5]):

$$(5) \quad u \in C_0^\infty(E_n), \quad \|u\|_{[n,l;s]}^2 = \sum_{j=1}^s \sum_{|j\alpha| \leq l_j} \|D^{j\alpha} u\|^2.$$

Dabei sind die l_j nicht negative ganze Zahlen, und $\|\cdot\|$ ist die Norm des Raumes $L_2(E_n)$. Das Symbol $[n, l; s]$ ist eine formale Abkürzung für das Indexbild $\begin{smallmatrix} l_1 & \dots & l_s \\ n_1 & \dots & n_s \end{smallmatrix}$; n und l können also in diesem Zusammenhang auch als Vektoren $n = (n_1, \dots, n_s)$ und $l = (l_1, \dots, l_s)$ interpretiert werden.

Die Normen $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$ und $\|\cdot\|$ sind koordiniert ([3]); das bedeutet, daß jede Fundamentalfolge von Funktionen aus $C_0^\infty(E_n)$ in der Metrik der Norm $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$, die Nullfolge in $L_2(E_n)$ ist, sich auch als Nullfolge in der Metrik $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$ erweist. Das zeigt folgende Überlegung.

$$\{u_m\}_{m=1,2,\dots}, \quad u_m \in C_0^\infty(E_n),$$

sei eine Fundamentalfolge in der Metrik $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$, für welche $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\| = 0$ gilt.

Dann ist $\{D^{j\alpha} u_m\}_{m=1,2,\dots}$ wegen

$$\|D^{j\alpha} u\| \leq \|u\|_{[n,l;s]}$$

eine Fundamentalfolge in $L_2(E_n)$, die gegen ein Element $w \in L_2(E_n)$ strebt. Für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(E_n)$ gilt vermöge partieller Integration

$$\int_{E_n} (D^{j\alpha} u_m) \varphi \, dx = (-1)^{|j\alpha|} \int_{E_n} u_m (D^{j\alpha} \varphi) \, dx,$$

woraus durch Grenzübergang $\int_{E_n} w \varphi \, dx = 0$ folgt; das bedeutet aber $w = 0$. Aus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D^{j\alpha} u_m\| = 0$$

folgt dann sofort

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{[n,l;s]} = 0.$$

Die Vervollständigung der Menge $C_0^\infty(E_n)$ in der Norm $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$ kann somit in

den Raum $L_2(E_n)$ eingebettet werden. Die Vervollständigung führt zu dem Hilbertraum $W_{[n,l;s]}(E_n)$,

$$W_{[n,l;s]}(E_n) \subset L_2(E_n),$$

der bei den folgenden Überlegungen als Grundraum gilt.

Gebraucht wird weiterhin die lineare Menge $S(E_n)$ der „schnell fallenden“ Funktionen ([4, S. 18])

$$(6) \quad S(E_n) = \{\varphi | \varphi \in C^\infty(E_n), \sup_{x \in E_n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < \infty\}.$$

In (6) sind α und β beliebige Multiindizes. Es gilt folgender

Hilfssatz 1. $S(E_n)$ liegt im Hilbertraum $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht.

BEWEIS. Es genügt, die Inklusion

$$S(E_n) \subset W_{[n,l;s]}(E_n)$$

zu zeigen, denn es ist $C_0^\infty(E_n) \subset S(E_n)$ und $C_0^\infty(E_n)$ liegt in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht. Wenn $\psi(x) \in S(E_n)$ ist und $\chi(t)$ durch

$$(7) \quad \chi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 2 \leq t \end{cases} \in C^\infty([0, \infty))$$

definiert wird, so bilden die finiten Funktionen

$$\psi_v(x) = \chi\left(\frac{|x|}{v}\right) \psi(x), \quad v = 1, 2, \dots,$$

eine Fundamentalfolge im Raum $W_{[n,l;s]}(E_n)$, was im folgenden gezeigt wird.

$$(8) \quad \|D^{j\alpha} \psi_v(x) - D^{j\alpha} \psi_\mu(x)\| = \left\| \sum_{j\varrho + j\sigma = j\alpha} c_{j\varrho} D^{j\varrho} \psi(x) \cdot D^{j\sigma} \left[\chi\left(\frac{|x|}{v}\right) - \chi\left(\frac{|x|}{\mu}\right) \right] \right\|.$$

In (8) sind bei der Summation alle Möglichkeiten zu berücksichtigen, den Vektor $j\alpha = (j\alpha_1, \dots, j\alpha_{n_j})$ als Summe der Vektoren

$$j\varrho = (j\varrho_1, \dots, j\varrho_{n_j}) \quad \text{und} \quad j\sigma = (j\sigma_1, \dots, j\sigma_{n_j})$$

$$(0 \leq j\varrho_\lambda \leq j\alpha_\lambda, \quad j\varrho_\lambda + j\sigma_\lambda = j\alpha_\lambda; \quad \lambda = 1, \dots, n_j)$$

darzustellen. Auf der rechten Seite der Gleichung (8) verschwindet jeder Summand für $|x| \leq \min(v, \mu)$, so daß für große Indizes v, μ die rechte Seite beliebig klein wird, da $\psi(x)$ zu $S(E_n)$ gehört. Somit folgt

$$\lim_{v, \mu \rightarrow \infty} \|\psi_v - \psi_\mu\|_{[n,l;s]} = 0.$$

In $W_{[n,l;s]}(E_n)$ strebt $\{\psi_v\}$ gegen ein bestimmtes Element ψ^* , welches wegen

$$\|\psi_v - \psi^*\| \leq \|\psi_v - \psi_\mu\|_{[n,l;s]}$$

auch Grenzelement im Raum $L_2(E_n)$ ist. Aus $\lim_{v \rightarrow \infty} \|\psi_v - \psi\| = 0$ folgt dann $\psi = \psi^*$, was $\psi \in W_{[n,l;s]}(E_n)$ ergibt. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Hilfssatz 2. Die Normen $\|u\|_{[n,l;s]}$ und

$$\|u\|_{[n,l;s]}^* = \left(\|u\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|D_{jx_r}^{l_j} u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

sind äquivalent.

BEWEIS. Offensichtlich gilt

$$\|u\|_{[n,l;s]}^* \leq \|u\|_{[n,l;s]}.$$

Für die Abschätzung in der anderen Richtung genügt es, für einen beliebigen Multiindex $j\alpha$, $|j\alpha| \leq l_j$, und eine beliebige Funktion $u \in S(E_n)$ die Ungleichung

$$(9) \quad \|D^{j\alpha} u\| \leq c_1 \|u\| + c_2 \sum_{r=1}^{n_j} \|D_{jx_r}^{l_j} u\|$$

zu beweisen, wobei es unwesentlich ist, die positiven Konstanten c_1 und c_2 möglichst scharf zu bestimmen. Die Abschätzung (9) kann mit Hilfe der Fouriertransformation

$$(10) \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-i(x,\xi)} \varphi(x) dx$$

leicht nachgewiesen werden. Dazu setzen wir

$$(11) \quad \begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n) = ({}_1\xi_1, \dots, {}_1\xi_{n_1}, {}_2\xi_1, \dots, {}_2\xi_{n_2}, \dots, {}_s\xi_1, \dots, {}_s\xi_{n_s}) \\ {}_j\xi &= ({}_j\xi_1, \dots, {}_j\xi_{n_j}), \quad |{}_j\xi|^2 = \sum_{r=1}^{n_j} |{}_j\xi_r|^2, \quad {}_j\xi^{j\alpha} = \prod_{r=1}^{n_j} {}_j\xi_r^{\alpha_r}. \end{aligned}$$

Für jeden (reellen) Vektor ξ und hinreichend große c_1 und c_2 gilt die Abschätzung

$$(12) \quad \begin{aligned} |{}_j\xi^{j\alpha}| &= |{}_j\xi_1|^{\alpha_1} \dots |{}_j\xi_{n_j}|^{\alpha_{n_j}} \leq |{}_j\xi|^{|j\alpha|} \leq c_1 + |{}_j\xi|^{l_j} \\ &\leq c_1 + (|{}_j\xi_1| + \dots + |{}_j\xi_{n_j}|)^{l_j} \leq c_1 + c_2 (|{}_j\xi_1|^{l_j} + \dots + |{}_j\xi_{n_j}|^{l_j}). \end{aligned}$$

Da die Fouriertransformation (10) eine isometrische Abbildung vermittelt ([1, S. 78]), erhält man mit Hilfe von (12) die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \|D^{j\alpha} u\| &= \|\widehat{D^{j\alpha} u}(\xi)\| = \|{}_j\xi^{j\alpha} \widehat{u}\| \leq c_1 \|\widehat{u}\| + c_2 \sum_{r=1}^{n_j} \|{}_j\xi_r^{l_j} \widehat{u}\| = \\ &= c_1 \|u\| + c_2 \sum_{r=1}^{n_j} \|D_{jx_r}^{l_j} u\|. \end{aligned}$$

Wir haben Anlaß, den Vektor $x \in E_n$ auf eine zweite Art zu zerlegen:

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = ({}_1x_1, \dots, {}_1x_{\bar{n}_1}, {}_2x_1, \dots, {}_2x_{\bar{n}_2}, \dots, {}_tx_1, \dots, {}_tx_{\bar{n}_t}), \\ n &= \bar{n}_1 + \dots + \bar{n}_t, \quad {}_kx = ({}_kx_1, \dots, {}_kx_{\bar{n}_k}). \end{aligned}$$

Entsprechend wird

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \bar{k}\beta = (\bar{k}\beta_1, \dots, \bar{k}\beta_{\bar{n}_k}), \quad D^{\bar{k}\beta} = \prod_{r=1}^{\bar{n}_k} D_{\bar{k}x_r}^{\bar{k}\beta_r}, \\ \zeta &= (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (\bar{1}\zeta_1, \dots, \bar{1}\zeta_{\bar{n}_1}, \bar{2}\zeta_1, \dots, \bar{2}\zeta_{\bar{n}_2}, \dots, \bar{t}\zeta_1, \dots, \bar{t}\zeta_{\bar{n}_t}), \\ (14) \quad \bar{k}\zeta &= (\dots, \bar{k}\zeta_r^{\bar{k}\beta_r}, \dots)_{r=1 \dots \bar{n}_k}, \quad \bar{k}\zeta^{\bar{k}\beta} = \prod_{r=1}^{\bar{n}_k} \bar{k}\zeta_r^{\bar{k}\beta_r}, \\ |\bar{k}\zeta|^2 &= (\bar{k}\zeta_1^2 + \dots + \bar{k}\zeta_{\bar{n}_k}^2), \quad k = 1, 2, \dots, t, \end{aligned}$$

gesetzt und der Differentialoperator

$$(15) \quad A_k = \sum_{|\bar{k}\beta| \equiv 2m_k} a_{\bar{k}\beta} D^{\bar{k}\beta}, \quad D(A_k) = S(E_n),$$

definiert. $D(A_k)$ ist das Definitionsgebiet von A_k . Die Koeffizienten $a_{\bar{k}\beta}$ sind reelle Konstanten und so gewählt, daß für jeden reellen Vektor $\bar{k}\zeta$ die Bedingung

$$(16) \quad \sum_{|\bar{k}\beta| \equiv 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \bar{k}\zeta^{\bar{k}\beta} \equiv c_k |\bar{k}\zeta|^{2m_k}, \quad c_k > 0, \quad k = 1, \dots, t,$$

erfüllt ist. Nach F. E. BROWDER ([2, S. 28]) heißt ein solcher Operator gleichmäßig stark elliptisch.

Unser eigentliches Interesse gilt aber dem hypoelliptischen Differentialoperator ([5])

$$(17) \quad A = \sum_{k=1}^t A_k, \quad D(A) = S(E_n),$$

der für alle (reellen) Vektoren ζ die Bedingung

$$(18) \quad A(\zeta) = \sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \equiv 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \bar{k}\zeta^{\bar{k}\beta} \equiv c_0 > 0$$

erfüllen möge. Dann gilt folgender

Satz 1. A ist positiv definit in $W_{[n,l;s]}(E_n)$.

$$\begin{aligned} \text{BEWEIS. } (Au, u)_{[n,l;s]} &= \sum_{j=1}^s \sum_{|j\alpha| \equiv l_j} (AD^{j\alpha}u, D^{j\alpha}u) = \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{|j\alpha| \equiv l_j} \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \equiv 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \bar{k}\zeta^{\bar{k}\beta} \overline{D^{j\alpha}u}, \overline{D^{j\alpha}u} \right) \equiv \\ &\equiv c_0 \sum_{j=1}^s \sum_{|j\alpha| \equiv l_j} \|D^{j\alpha}u\|^2 = c_0 \|u\|_{[n,l;s]}^2. \end{aligned}$$

Satz 2. A ist auf $S(E_n)$ wesentlich selbstadjungiert.

BEWEIS. Dazu zeigen wir, daß der Wertebereich $R(A)$ von A in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht liegt. Nach Hilfssatz 1 liegt $S(E_n)$ in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht, so daß Satz 2 bewiesen ist, wenn nachgewiesen werden kann, daß die Lösung u der Differentialgleichung $Au=f$ in $S(E_n)$ liegt, sofern f zu $S(E_n)$ gehört. Das läßt sich mit Hilfe der Fouriertransformation leicht verifizieren. Die Fouriertransformierte $\tilde{f}$ von f liegt in $S(E_n)$, da diese Menge bei der Fouriertransformation auf sich abgebildet wird. Die Inverse der Fouriertransformation, die durch

$$(19) \quad \tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi$$

definiert wird, hat dieselbe Eigenschaft, so daß mit f auch $\tilde{f}$ und deshalb wegen (18) auch $\tilde{u} = \frac{\tilde{f}}{A(\xi)}$ in $S(E_n)$ liegt. Aus $A(\xi)\tilde{u} = \tilde{f}$ entsteht durch Fouriertransformation $A\tilde{u} = f$, womit gezeigt ist, daß die Lösung $u = \tilde{u}$ ebenfalls in $S(E_n)$ liegt.

Der aus A durch Abschließung entstehende Operator $\bar{A}$ ist also selbstadjungiert; sein Wertebereich $R(\bar{A})$ ist mit $W_{[n,l;s]}(E_n)$ identisch,

$$R(\bar{A}) = W_{[n,l;s]}(E_n).$$

Der Definitionsbereich $D(\bar{A})$ von $\bar{A}$ entsteht aus $D(A) = S(E_n)$ durch Abschließung in der Metrik der energetischen Norm

$$(20) \quad |u|^2 = \|u\|_{[n,l;s]}^2 + \|Au\|_{[n,l;s]}^2.$$

$D(\bar{A})$ soll im folgenden näher bestimmt werden. Zu diesem Zweck beweisen wir den

Hilfssatz 3. Aus den Bedingungen (16) und (18) folgt

$$(21) \quad A_k(\xi) = \sum_{|\bar{k}\beta| \leq 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \xi^{\bar{k}\beta} \cong c'_k |\bar{k}\xi|^{2m_k}, \quad c'_k > 0; \quad k = 1, \dots, t.$$

BEWEIS. Für hinreichend große $|\bar{k}\xi|$ ($|\bar{k}\xi| \geq \varrho_k$) gilt

$$\left| \sum_{|\bar{k}\beta| \leq 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \xi^{\bar{k}\beta} \right| \leq \frac{c_k}{2} |\bar{k}\xi|^{2m_k}.$$

Für solche Vektoren $\bar{k}\xi$ gilt dann auch

$$\sum_{|\bar{k}\beta| \leq 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \xi^{\bar{k}\beta} \cong \frac{c_k}{2} |\bar{k}\xi|^{2m_k}.$$

In der Kugel $|\bar{k}\xi| \leq \varrho_k$ ist nach der Bedingung (18) $A_k(\xi) \cong c_0$. (man setze in (18) alle Komponenten von ξ bis auf $\xi_1, \dots, \xi_{\bar{n}_k}$ gleich Null). Wählt man also

$$c'_k = \min \left(\frac{c_k}{2}, c_0 \varrho_k^{-2m_k} \right),$$

so folgt die Behauptung.

Wenn $\min_k c'_k = C$ gesetzt wird, folgt aus (21) durch Summation über k

$$(22) \quad A(\xi) \cong C \sum_{k=1}^t |\bar{k}\xi|^{2m_k}, \quad C > 0.$$

(22) wird in der folgenden Abschätzung benutzt. Wir verabreden an dieser Stelle, daß positive Konstanten, deren numerische Bestimmung unwesentlich ist, generell mit C bezeichnet werden sollen. In diesem Sinne gilt die folgende Abschätzung, wobei $u \in S(E_n)$ sei:

$$(23) \quad \begin{aligned} |u|^2 &= \|u\|_{[n,l;s]}^2 + \|Au\|_{[n,l;s]}^2 \cong C \{ \|u\|_{[n,l;s]}^{*2} + \|Au\|_{[n,l;s]}^{*2} \} \cong \\ &\cong C \left\{ \|u\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|D_{jx_r}^{l_j}(Au)\|^2 \right\} = \\ &= C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| j^{\zeta l_j} \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \cong 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \zeta^{\bar{k}\beta} \hat{u} \right) \right\|^2 \right\} \cong \\ &\cong C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| j^{\zeta l_j} \left(\sum_{k=1}^t |\bar{k}\xi|^{2m_k} \right) \hat{u} \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Es folgt die Abschätzung nach oben, wobei wieder Hilfssatz 2 verwendet wird

$$(24) \quad \begin{aligned} |u|^2 &\cong C \{ \|u\|_{[n,l;s]}^{*2} + \|Au\|_{[n,l;s]}^{*2} \} = \\ &= C \left\{ \|u\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|D_{jx_r}^{l_j} u\|^2 + \|Au\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|D_{jx_r}^{l_j}(Au)\|^2 \right\} \cong \\ &\cong C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|j^{\zeta l_j} \hat{u}\|^2 + \left\| \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \cong 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \zeta^{\bar{k}\beta} \right) \hat{u} \right\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| j^{\zeta l_j} \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \cong 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \zeta^{\bar{k}\beta} \right) \hat{u} \right\|^2 \right\} \cong \\ &\cong C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|j^{\zeta l_j} \hat{u}\|^2 + \left\| \left(\sum_{k=1}^t |\bar{k}\xi|^{2m_k} \right) \hat{u} \right\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| j^{\zeta l_j} \left(\sum_{k=1}^t |\bar{k}\xi|^{2m_k} \right) \hat{u} \right\|^2 \right\} \cong C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| j^{\zeta l_j} \left(\sum_{k=1}^t |\bar{k}\xi|^{2m_k} \right) \hat{u} \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation (10) und ihre Inverse (19) werden durch lineare Operatoren F bzw. F^{-1} ausgeführt. Beide Operatoren sind zunächst auf $S(E_n)$ erklärt. Schließt man sie ab, so fällt ihr Definitionsgebiet jeweils mit dem Hilbertraum $L_2(E_n)$ zusammen. In diesem Sinne kann also jedes Element $u \in L_2(E_n)$ der Fouriertransformation unterworfen werden. Vergleicht man die Abschätzungen (23) und (24), so kann folgender Satz ausgesprochen werden.

Satz 3. *u gehört genau dann zu $D(\bar{A})$, wenn*

$$j \zeta_r^{lj} \left(\sum_{k=1}^t |\zeta_k|^{2m_k} \right) \hat{u} \in L_2(E_n)$$

für alle $j(1 \leq j \leq s)$ und $r(1 \leq r \leq n)$ gilt.

Die Darstellungen von $n = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ und $n = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_t$ von n definieren zwei Zerlegungen

$$E_n = \sum_{j=1}^s \oplus E_{n_j}$$

und

$$E_n = \sum_{k=1}^t \oplus E_{\bar{n}_k}$$

von E_n und entsprechend zwei Zerlegungen

$$(1, n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + \dots + n_s = n)$$

und

$$(1, \bar{n}_1, \bar{n}_1 + \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_1 + \dots + \bar{n}_t = n)$$

des Intervalls $[1, n]$. Die Summe dieser Zerlegungen definiert eine neue Zerlegung

$$(1, \tilde{n}_1, \tilde{n}_1 + \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_1 + \dots + \tilde{n}_p), \quad E_n = \sum_{l=1}^p \oplus E_{\tilde{n}_l}.$$

Das Indexbild

$$\begin{matrix} l_1 & \dots & l_s \\ n_1 & \dots & n_s \end{matrix} = [n, l; s]$$

von $W_{[n, l; s]}(E_n)$ definiert eine Funktion über dem Intervall $[1, n]$, die in den diskreten Punkten $1, 2, \dots, n$ erklärt ist und die s Werte $l_1, \dots, l_s$ annimmt. Entsprechend definiert das Indexbild

$$\begin{matrix} 2m_1 & 2m_2 & \dots & 2m_t \\ \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \dots & \bar{n}_t \end{matrix} = [\bar{n}, 2m; t]$$

eine solche Funktion. Die Summe dieser Funktionen wird durch das Indexbild

$$\begin{matrix} 2m_1 + l_1 & \dots & 2m_t + l_s \\ \tilde{n}_1 & \dots & \tilde{n}_p \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{l}_1 & \dots & \tilde{l}_p \\ \tilde{n}_1 & \dots & \tilde{n}_p \end{matrix} = [\tilde{n}, \tilde{l}; p]$$

dargestellt. Wir schreiben

$$(25) \quad \begin{matrix} l_1 & \dots & l_s \\ n_1 & \dots & n_s \end{matrix} + \begin{matrix} 2m_1 & \dots & 2m_t \\ \bar{n}_1 & \dots & \bar{n}_t \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{l}_1 & \dots & \tilde{l}_p \\ \tilde{n}_1 & \dots & \tilde{n}_p \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad [n, l; s] + [\bar{n}, 2m; t] = [\tilde{n}, \tilde{l}; p].$$

Die so definierte Summe führt zu dem Hilbertraum

$$W_{[n, l; s] + [\bar{n}, 2m; t]}(E_n) = W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n),$$

der in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ eingebettet ist. Setzt man in (23) die Abschätzungen nach unten weiter fort, so erhält man

$$\begin{aligned}
 |u|^2 &\cong C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| j^{\xi_{lj}} \left(\sum_{k=1}^t |\xi_k|^2 m_k \right) \right\|^2 \right\} \cong \\
 (26) \quad &\cong C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \|\tilde{\zeta}_1^{2m_1+l_1} \hat{u}\|^2 + \dots + \|\tilde{\zeta}_{\tilde{n}_1}^{2m_1+l_1} \hat{u}\|^2 + \dots + \|\tilde{\zeta}_{\tilde{n}_p}^{2m_r+l_s} \hat{u}\|^2 \right\} = \\
 &= C \left\{ \|u\|^2 + \|D_{\tilde{\zeta}_1 x_1}^{2m_1+l_1} u\|^2 + \dots + \|D_{\tilde{\zeta}_{\tilde{n}_p} x_{\tilde{n}_p}}^{2m_r+l_s} u\|^2 \right\} \cong C \|u\|_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}^2.
 \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß $D(\bar{A})$ in $W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n)$ enthalten ist. Es gilt darüber hinaus folgender

Satz 4.

$$W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n)$$

ist der Durchschnitt aller W -Räume $W_{[v, \mu; r]}(E_n)$, die $D(\bar{A})$ enthalten, $[v, \mu; r] = \frac{\mu_1 \dots \mu_r}{v_1 \dots v_r}$.

BEWEIS. Jeder Raum $W_{[v, \mu; r]}(E_n)$ kann in der Form $W_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(E_n)$ geschrieben werden, wobei die λ mit den μ und v wie folgt zusammenhängen:

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \lambda_1 &= \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_1, \dots, \quad \lambda_{v_1} = \mu_1, \quad \lambda_{v_1+1} = \mu_2, \dots, \quad \lambda_{v_1+v_2} = \mu_2, \dots, \\
 &\lambda_{n-v_r+1} = \mu_r, \dots, \quad \lambda_n = \mu_r.
 \end{aligned}$$

Der Durchschnitt der Räume $W_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(E_n)$ und $W_{\kappa_1 \dots \kappa_n}(E_n)$ ist offenbar $W_{\sigma_1 \dots \sigma_n}(E_n)$, wobei $\sigma_i = \max(\lambda_i, \kappa_i)$ ist ($i=1, \dots, n$). $W_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(E_n)$ enthalte $D(\bar{A})$, und

$$W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n)$$

sei in $W_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(E_n)$ nicht enthalten. Dann ist der Durchschnitt

$$W_{\lambda'_1 \dots \lambda'_n}(E_n) = W_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(E_n) \cap W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n),$$

der $D(\bar{A})$ ebenfalls enthält, echt in

$$W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n) = W_{\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_p}(E_n)_{\tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_p}$$

enthalten. Es existiert also ein λ'_j ($1 \leq j \leq n$), das größer als die entsprechende Zahl $2m_{\alpha(j)} + l_{\beta(j)}$ ist, woraus folgt, daß $W_{\lambda'_1 \dots \lambda'_n}(E_n)$ die Menge $D(\bar{A})$ nicht enthalten kann, wie folgendes Beispiel zeigt. Wir definieren das Gebiet

$$\Omega_j = \{\xi: |\xi_k| \leq 1 \text{ für } k \neq j \text{ und } 1 \leq \xi_j < \infty\}$$

und die Funktion

$$\hat{U}(\xi) = \begin{cases} \xi_j^{-2m_{\alpha(j)} - l_{\beta(j)} - 1}, & \text{wenn } \xi \in \Omega_j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, gehört die Fourierinverse $F^{-1}[\hat{U}(\xi)] = U(x)$ zu $D(\bar{A})$ (vergl. (26)), dagegen nicht zu $W_{\lambda'_1 \dots \lambda'_n}(E_n)$.

Im Falle $l_1 = \dots = l_s = l$ und $2m_1 = 2m_2 = \dots = 2m_t = 2m$ ist der Sobolewsche Raum $W_l(E_n)$, der üblicherweise mit $W_2^l(E_n)$ bezeichnet wird, der Grundraum, und der Differentialoperator A hat die Gestalt

$$(28) \quad A = \sum_{|\beta| \leq 2m} a_\beta D^\beta.$$

Die Gleichung (25) heißt dann $\frac{l}{n} + \frac{2m}{n} = \frac{2m+l}{n}$, so daß $D(\bar{A}) \subset W_{\frac{2m+l}{n}}(E_n)$ gilt. Andererseits folgt mit Hilfe von (24) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u|^2 &\leq C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{r=1}^n \|\xi_r^l |\xi|^{2m} \hat{u}\|^2 \right\} \leq \\ &C \left\{ \|\hat{u}\|^2 + \sum_{r=1}^n \|\xi_r^{2m+l} \hat{u}\|^2 \right\} \leq C \|u\|_{\frac{2m+l}{n}}^2, \end{aligned}$$

so daß folgender Satz bewiesen ist.

Satz 5. Im Falle $l_1 = \dots = l_s = l$ und $2m_1 = \dots = 2m_t = 2m$ ist

$$D(\bar{A}) = W_{\frac{2m+l}{n}}(E_n).$$

$\bar{A}$ ist selbstadjungiert und nach Satz 1 positiv definit, so daß der Umkehroperator $\bar{A}^{-1}$ existiert. Ist $f \in W_{[n,l;s]}(E_n)$, so folgt aus der Gleichung $\bar{A}u = f$ nach Satz 4 für die Lösung u sofort

$$u \in W_{[n,l;s] + [\bar{n}, 2m;t]}(E_n).$$

Satz 6. Es sei $f \in W_{[n,l;s]}(E_n)$. Die Gleichung $\bar{A}u = f$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung u , die im Raum

$$W_{[n,l;s] + [\bar{n}, 2m;t]}(E_n) = W_{[\tilde{n}, \tilde{l}; p]}(E_n)$$

liegt.

Bemerkung. Nach den Einbettungssätzen von Sobolew ([6]) ist die Lösung u von $\bar{A}u = f$, wobei A der gleichmäßig stark elliptische und positiv definite Operator (28) ist und f zu $W_l(E_n)$ gehört, r mal stetig differenzierbar, sofern r durch $0 \leq r < 2m + l - \frac{n}{2}$ eingeschränkt ist.

Zum Abschluß untersuchen wir das Spektrum $S_{\bar{A}}$ von $\bar{A}$. Die Konstante c_0 in (18) sei das Infimum von $A(\xi)$. Dann gilt

Satz 7. $\bar{A}$ besitzt keine Eigenwerte, und das stetige Spektrum $C_{\bar{A}}$ von $\bar{A}$ stimmt mit dem Wertebereich von $A(\xi)$ überein, $C_{\bar{A}} = [c_0, \infty)$.

BEWEIS. u sei Eigenfunktion von $\bar{A}$ und λ der zugehörige Eigenwert. Aus $\bar{A}u = \lambda u$ folgt durch Fouriertransformation $\widehat{\bar{A}u} = \lambda \hat{u}$, d.h.

$$A(\xi) \hat{u} = \lambda \hat{u}.$$

Daraus folgt aber $\hat{u} = 0$ und daher $u = 0$.

μ gehöre nicht zum Wertebereich von $A(\xi)$. Da dieser mit $[c_0, \infty)$ zusammenfällt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $A(\xi) - \mu \geq \varepsilon > 0$ für alle ξ gilt und wie folgt abgeschätzt werden kann.

$$\begin{aligned} & \|(\bar{A} - \mu E)u\|_{[n,l;s]}^2 \cong \\ & \cong C \left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \left\| \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \leq 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \xi^{\bar{k}\beta} - \mu \right) j^{\bar{k}\beta} \hat{u} \right\|^2 + \left\| \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \leq 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \xi^{\bar{k}\beta} - \mu \right) \hat{u} \right\|^2 \right\} \cong \\ & \cong C \varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{n_j} \|j^{\bar{k}\beta} \hat{u}\|^2 + \|\hat{u}\|^2 \right\} \cong C \|u\|_{[n,l;s]}^2. \end{aligned}$$

μ ist also ein regulärer Punkt von $\bar{A}$.

Liegt andererseits μ im Wertebereich von $A(\xi)$, so gehört es zum stetigen Spektrum $C_{\bar{A}}$ von $\bar{A}$. Es sei $\mu = A(\xi)$. Um eine Weylsche Folge für μ zu konstruieren, betrachten wir eine Folge von Kugeln K_v im ξ -Raum E_n , die sich nicht schneiden und bei $\xi = \zeta$ häufen. ζ_v sei der Mittelpunkt und ε_v der Radius von K_v ($v = 1, 2, \dots$). Die Funktionen

$$\chi_v(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - \zeta_v| \leq \frac{\varepsilon_v}{2} \\ 0, & |\xi - \zeta_v| > \frac{\varepsilon_v}{2} \end{cases}$$

werden mit Hilfe des Sobolewschen Kerns ([6]) gemittelt, wobei der Mittelungsradius jeweils $\frac{\varepsilon_v}{2}$ betrage. $\hat{u}_v(\xi)$ sei die gemittelte Funktion von $\chi_v(\xi)$; sie verschwindet außerhalb K_v . Für die Fourierinversen $v_v(x)$ der normierten Funktionen

$$\hat{v}_v(\xi) = \hat{u}_v(\xi) \left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{|\alpha| \leq l_j} \|j^{\alpha} \hat{u}_v(\xi)\|^2 \right\}^{-1}$$

gilt dann wegen der Isometrie der Fouriertransformation

$$(v_v(x), v_\mu(x))_{[n,l;s]} = \delta_{v\mu} \quad (\text{Kroneckersymbol}).$$

Die Menge der $v_v(x)$ ist demnach nicht relativ kompakt, und es bleibt zu zeigen, daß

$$\|\bar{A}v_v - \mu v_v\|_{[n,l;s]}$$

für $v \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Nach Konstruktion verschwindet die Funktion $\hat{v}_v(\xi)$ außerhalb der Kugel K_v . Setzt man

$$\max_{\xi \in K_v} |A(\xi) - \mu| = \delta_v,$$

so kann wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} & \| \bar{A}v_v - \mu v_v \|_{[n,l;s]}^2 \leq \\ & \leq C \sum_{j=1}^s \sum_{|j\alpha| \leq l_j} \left\| \left(\sum_{k=1}^t \sum_{|\bar{k}\beta| \leq 2m_k} a_{\bar{k}\beta} \bar{\zeta}^{k\beta} - \mu \right) j^{\bar{\zeta}j\alpha} \hat{v}_v \right\|^2 \leq \\ & \leq C \delta_v^2 \sum_{j=1}^s \sum_{|j\alpha| \leq l_j} \| \bar{\zeta}^{j\alpha} \hat{v}_v \|^2 \leq C \delta_v^2 \| v_v \|_{[n,l;s]}^2 = C \delta_v^2. \end{aligned}$$

Da wegen der Stetigkeit von $A(\bar{\zeta})$ mit $\varepsilon_v \rightarrow 0$ auch $\delta_v \rightarrow 0$ strebt, erweist sich $\{v_v\}$ als Weylsche Folge für μ , so daß der Satz 7 bewiesen ist.

Literatur

- [1] N. J. ACHESER—J. M. GLASMANN, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum, *Berlin*, 1965.
- [2] F. E. BROWDER, On the spectral theory of elliptic differential operators I., *Math. Ann.* **142** (1961), 22—130.
- [3] J. M. GELFAND—G. E. SCHILOW, Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) II. *Berlin*, 1964.
- [4] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, *Berlin*, 1963.
- [5] V. P. IL'IN, Eigenschaften gewisser Klassen differenzierbarer Funktionen mehrerer Veränderlicher, die in einem n-dimensionalen Gebiet vorgegeben sind. (russisch) *Moskva*, 1962.
- [6] S. L. SOBOLEW, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, *Berlin*, 1964.
- [7] H. TRIEBEL, Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren. *Math. Z.* **90** (1965), 325—338.
- [8] K. YOSIDA, Funktional Analysis, *Berlin*, 1965.

(Eingegangen am 13. Juli 1967.)