

Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises

Von WOLFGANG SCHWARZ (Freiburg)¹

1. Einleitung. Sei $E = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitskreis der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, $E^\circ = \{z, |z| < 1\}$ sein Inneres. Die komplexe Zahl $\zeta \in E^\circ$, $\zeta \neq 0$, sei vorgegeben. Dann ist die Abbildung

$$(1.1) \quad \Phi_\zeta(w) = (w - \zeta)(1 - \bar{\zeta}w)^{-1}$$

eine bijektive Abbildung von E auf sich mit der Umkehrabbildung²⁾

$$(1.2) \quad \Phi_\zeta^{-1}(z) = (z + \zeta)(1 + \bar{\zeta}z)^{-1}$$

TURÁN [8] zeigte mit Hilfe des Satzes von Toeplitz—Schur aus der Limitierungstheorie, daß es in E° holomorphe Funktionen f gibt, deren Potenzreihe $\sum a_n z^n$ in $z=1$ konvergiert, wogegen die Taylorreihe $\sum b_n(\zeta)w^n$ von $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ im Punkte

$$w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1) = (1 + \zeta)(1 + \bar{\zeta})^{-1}$$

divergiert.³⁾

Dieser Satz ist überraschend, weil f und f^* — die durch eine konforme Abbildung des Einheitskreises auseinander hervorgehen — in passenden Umgebungen von 1 bzw. w_0 dieselben Werte annehmen; aber trotzdem haben ihre Potenzreihen in 1 bzw. w_0 verschiedenes Konvergenzverhalten. Der Begriff „Konvergenz“ bleibt also bei konformen Abbildungen nicht notwendig invariant.

In mehreren Arbeiten ([1a], [1c], [2]) behandelte ALPÁR ähnliche Probleme, wobei Konvergenz durch (C, k) — Summierbarkeit oder durch absolute Konvergenz ersetzt wurde.

CLUNIE [4] verschärfte Turán's Ergebnis, indem er ein Beispiel einer in E° holomorphen, in ganz E stetigen Funktion f gab, deren Potenzreihe in $z=1$ konvergiert, für die aber die Maclaurinreihe von $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ im Punkte $w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergiert.

In dieser Note soll unter Benutzung der Hilfssätze von Clunie das Ergebnis von Clunie mit Hilfe des Satzes von Banach—Steinhaus hergeleitet werden und

¹⁾ Für kritische Bemerkungen danke ich Herrn DR. J. SPILKER und DR. F. FLOHR.

²⁾ Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir den Index ζ weglassen.

³⁾ HALÁSZ [5] zeigte die Existenz einer solchen Funktion f , für die $\sum b_n(\zeta) \cdot (\Phi^{-1}(1))^n$ für alle $\zeta \in E^\circ$, $\zeta \neq 0$, divergiert.

etwas verschärft werden.⁴⁾ Mit derselben Methode kann auch Turán's Ergebnis gewonnen werden (vgl. § 6).

2. Banachräume. Sei cs der lineare Raum (über C) aller in E° holomorphen Funktionen f , deren Potenzreihe $\sum a_n z^n$ im Punkte 1 konvergiert. Mit der Norm

$$(2.1) \quad \|f\|_{cs} = \sup_N \left| \sum_{n \leq N} a_n \right|$$

wird cs ein Banachraum ([7], S. 201, Problem 1). Weiter sei

$$CA = \{f: E \rightarrow C, f \text{ holomorph in } E^\circ, f \text{ stetig in } E\};$$

unter der Norm der gleichmäßigen Konvergenz

$$(2.2) \quad \|f\|_u = \sup_{|z| \leq 1} |f(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$$

wird CA ein Banachraum ([7], S. 103, e)).

Sei cCA der lineare Raum aller in E stetigen Abbildungen $f: E \rightarrow C$, die in E° holomorph sind und deren Taylorreihe $\sum a_n z^n$ im Punkte $z=1$ konvergiert. Mit der Norm

$$(2.3) \quad \|f\| = \|f\|_u + \|f\|_{cs}$$

wird cCA ein normierter Raum.

Lemma 1. *Unter der Norm (2.3) ist cCA ein Banachraum.*

BEWEIS. Sei $\{f_j\}$ ($j=1, 2, \dots$) mit $f_j(z) = \sum a_{n,j} z^n$ eine $\|\cdot\|$ -Cauchyfolge von Elementen aus cCA ; dann ist $\{f_j\}$ erst recht eine Cauchyfolge bezüglich der Norm (2.1). Wegen der Vollständigkeit des Raumes cs existiert eine in E° holomorphe Funktion g mit

$$(2.4) \quad g(z) = \sum a_n z^n, \quad \sum a_n \text{ konvergent, } \|g - f_j\|_{cs} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist $\{f_j\}$ auch eine $\|\cdot\|_u$ -Cauchyfolge; wegen der Vollständigkeit des Raumes CA existiert eine Funktion f mit

$$(2.5) \quad f \in CA, \quad \|f - f_j\|_u \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Wir zeigen nun, daß für $0 < x \leq \frac{1}{2}$

$$(2.6) \quad f(x) = g(x) \quad (0 < x \leq \tfrac{1}{2}),$$

also $f \in cCA$ ist, und daß

$$(2.7) \quad \|f - f_j\| \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty$$

gilt.

Sei also $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Dann ist mit $d_{n,j} := a_n - a_{n,j}$

$$g(x) - f_j(x) = \sum_n d_{n,j} x^n;$$

⁴⁾ Die Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus wird nahegelegt durch die ins Auge springende Analogie unserer Problemstellung zu Fourierreihen stetiger Funktionen (man vgl. etwa RUDIN [6], S. 98—103).

wegen (2.4) und der Normdefinition (2.1) strebt $\sup_N |\sum_{n \leq N} d_{n,j}|$ gegen Null für $j \rightarrow \infty$. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ist also $|\sum_{n \leq N} d_{n,j}| \leq \varepsilon$ für alle N , wenn nur $j \geq j_0(\varepsilon)$ ist. Abelsche Summation gibt für $0 < x \leq \frac{1}{2}$ und $j \geq j_0(\varepsilon)$:

$$|\sum_n d_{n,j} x^n| = \left| \int_0^\infty \left(\sum_{n \leq u} d_{n,j} \right) \log x \cdot x^u du \right| \leq \varepsilon \int_0^\infty |\log x| \cdot x^u du \leq \varepsilon.$$

Ist also $j \geq j_0(\varepsilon)$, so gilt für alle x mit $0 < x \leq \frac{1}{2}$

$$|g(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon,$$

und

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |g(x) - f_j(x)| \leq \|f - f_j\|_u + \varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

falls j genügend groß ist. Damit ist (2.6) gezeigt; demnach hat nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen f die Taylorentwicklung $f(z) = \sum a_n z^n$, und es ist $f \in cCA$ (wegen (2.4) und (2.5)). Weiter ist für genügend großes j

$$\|f - f_j\| = \|f - f_j\|_u + \|f - f_j\|_{cs} \leq \varepsilon + \|f - f_j\|_{cs}$$

(wegen (2.5)); beachtet man, daß f und g dieselbe Reihenentwicklung haben, so ist $\|f - f_j\|_{cs} = \|g - f_j\|_{cs}$, also ist (nach (2.4)) für genügend großes j

$$\|f - f_j\| \leq 2\varepsilon,$$

und (2.7) ist gezeigt und damit die Vollständigkeit von cCA .

3. Hilfssätze. Der wichtigste Hilfssatz für den Beweis von Satz 1 ist das von Clunie ([4], S. 166) gezeigte

Lemma 2. Sei h eine im Kreise $|z| < R$ (mit $R > 1$) holomorphe Funktion mit $h(1) = 0$. Sei ζ mit $0 < |\zeta| < 1$ gegeben und

$$(3.1) \quad \varphi = \varphi(\zeta) = \arg w_0 = \arg \{(1 + \zeta)(1 + \bar{\zeta})^{-1}\}.$$

Ist m größer als eine nur von h und ζ abhängige Schranke, so sind die Partialsummen der Maclaurinreihe von

$$(\Phi^{-1}(z))^m \cdot h(e^{-i\varphi} \cdot \Phi^{-1}(z))$$

an der Stelle $z = 1$ absolut durch eine nur von ζ abhängige Konstante $M(\zeta)$ beschränkt.

Lemma 3. (vgl. [4], S. 167). Die Fejérpolynome

$$(3.2) \quad h_k(z) := \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k-1} + \dots + \frac{z^k}{1} - \frac{z^{k+2}}{1} - \dots - \frac{z^{2k+1}}{k}$$

haben folgende Eigenschaften:

a) Es existiert eine absolute Konstante M mit $|h_k(z)| \leq M$ für alle $z \in E$ und alle $k = 1, 2, \dots$.

b) $h_k(1) = 0$.

c) Die k -te Partialsumme von $h_k(z)$ bei $z = 1$ ist größer als $\log k$.

b) und c) sind klar; a) folgt aus der Beschränktheit der Partialsummen der Fourierreihe $\sum k^{-1} \sin kx$.

Satz von Banach—Steinhaus (vgl. [6]). Sei F ein Banachraum, Y ein normierter linearer Raum, und A_α ($\alpha \in A$) eine Familie beschränkter linearer Abbildungen von F in Y . Entweder existiert dann eine Konstante $K < \infty$ mit

$$(3.3) \quad \|A_\alpha\| \leq K \quad \text{für alle}^5) \alpha \in A,$$

oder es existiert eine dichte G_δ -Menge $^6) G \subset F$ mit

$$(3.4) \quad \sup_{\alpha \in A} \|A_\alpha f\|_Y = \infty \quad \text{für alle } f \in G.$$

Lemma 4. (vgl. [6]). In einem metrischen Raum ohne isolierte Punkte ist eine dichte G_δ -Menge nicht-abzählbar.

4. Der Satz von Clunie. Sei $f \in cCA$; mit (1. 1) setzen wir

$$(4.1) \quad f^*(w) = f(\Phi(w)) = \sum b_n(\zeta) w^n;$$

diese Potenzreihe konvergiert in E° . Wir bilden mit

$$(4.2) \quad w_0 = \Phi^{-1}(1) = e^{i\varphi}$$

(vgl. (3. 1)) die Partialsummen

$$(4.3) \quad s_N(w_0, f^*) = \sum_{n \leq N} b_n(\zeta) w_0^n$$

und definieren für $N=1, 2, \dots$ die Abbildungen $A_N: cCA \rightarrow C$ durch

$$(4.4) \quad A_N f = s_N(w_0, f^*).$$

Offenbar sind die A_N lineare Abbildungen des Banachraumes cCA in den normierten Raum C . Die A_N sind beschränkt; denn es ist

$$|A_N f| = \left| \sum_{n \leq N} b_n w_0^n \right| = \left| \sum_{n \leq N} (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} f^*(w) w_0^n w^{-n-1} dw \right|,$$

wobei über den Kreis $\gamma: |w| = \frac{1}{2}$ (im positiven Sinn) integriert wird. Wegen $|f^*(w)| = |f(\Phi(w))| \leq \|f\|_u$ und $|w_0| = 1$ ist

$$|A_N f| \leq (2\pi)^{-1} \sum_{n \leq N} \|f\|_u \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} \pi \leq 2^{N+1} \|f\|_u \leq 2^{N+1} \|f\|,$$

also ist

$$(4.5) \quad \|A_N\| \leq 2^{N+1}.$$

Der Satz von Banach—Steinhaus ist damit anwendbar. Es soll noch die Alternative (3. 3) ausgeschlossen werden. Wir betrachten die mit Hilfe der Fejérpolynome (3. 2) gebildete Funktion

$$H_k(z) := h_k(e^{-i\varphi} \cdot \Phi^{-1}(z)) \cdot (\Phi^{-1}(z))^{m(k)},$$

⁵⁾ $\|A\| := \sup_{f \in F, f \neq 0} \{\|f\|_F^{-1} \cdot \|A f\|_Y\}.$

⁶⁾ Eine G_δ -Menge ist Durchschnitt von höchstens abzählbar vielen offenen Mengen.

wobei $m(k)$ noch passend bestimmt wird. Wegen (3. 2) ist H_k eine rationale Funktion von z , die holomorph in E ist. Damit ist $H_k \in cCA$. Wegen Lemma 3, a) ist, unabhängig von $m(k)$,

$$(4. 6) \quad \|H_k\|_u = \|h_k\|_u \leq M;$$

wird $m(k)$ größer als eine nur von k und ζ abhängige Schranke gewählt, so ist nach Lemma 2 mit einer nur von ζ abhängigen Konstanten $M(\zeta)$

$$(4. 7) \quad \|H_k\|_{cs} \leq M(\zeta).$$

Nach (4. 6) und (4. 7) ist (mit den Konstanten aus Lemma 2 und 3)

$$\|H_k\| \leq M + M(\zeta).$$

Beachtet man nun, daß

$$H_k^*(w) := H_k(\Phi(w)) = w^{m(k)} \cdot h_k(e^{-i\varphi} w)$$

st, so erhält man mit (4. 4), (4. 2) und Lemma 3, c) die Abschätzung

$$\frac{|A_{k+m(k)} H_k|}{\|H_k\|} \leq \frac{|s_{k+m(k)}(e^{i\varphi}, H_k^*)|}{M + M(\zeta)} \leq \frac{\log k}{M + M(\zeta)}.$$

Somit ist $\sup_k \|A_k\| = \infty$, und im Satz von Banach—Steinhaus trifft die zweite Alternative (3. 4) zu. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. Zu jedem ζ mit $0 < |\zeta| < 1$ existiert eine in cCA dichte G_δ -Menge $G(\zeta) \subset cCA$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $f \in G(\zeta)$ ist die Potenzreihe $\sum b_n(\zeta) w^n$ für $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ an der Stelle $w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergent⁷⁾, wogegen die entsprechende Potenzreihe $\sum a_n z^n$ für f an der Stelle 1 konvergiert.

Bemerkung. Für jedes $f \in G(\zeta)$ ist der Punkt 1 eine singuläre Stelle. Wäre nämlich f holomorph in 1, so auch f^* in $w_0 = \Phi^{-1}(1)$; da $\sum |b_n(\zeta)|^2 \leq \|f^*\|_u^2 = \|f\|_u^2$ ist, also $b_n(\zeta) \rightarrow 0$ geht (für $n \rightarrow \infty$), müßte nach dem Satz von M. RIESZ [vgl. etwa E. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Göttingen 1929, § 18] die Reihe $\sum b_n(\zeta) \cdot w_0^n$ konvergieren.

Zusatz. Geht man vom Banachraum $c_0CA = \{f \in cCA \text{ mit } f(1) = 0\}$ (mit der Norm (2. 3)) aus, so gilt Satz 1 wörtlich, wenn man in der Formulierung von Satz 1 jeweils cCA durch c_0CA ersetzt.

5. Eine Verschärfung. Satz 1 kann leicht verschärft werden. Man gebe sich höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Punkte $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots \in E^\circ$ vor; weiter wähle man abzählbar viele von Null verschiedene Punkte $\zeta''_1, \zeta''_2, \dots \in E^\circ$, die in der durch den gewöhnlichen Absolutbetrag gegebenen Topologie dicht in E liegen⁸⁾; die Vereinigung der beiden Folgen ist die abzählbare Folge $\zeta_1, \zeta_2, \dots$. Zu jedem dieser ζ_n existiert nach Satz 1 eine dichte G_δ -Menge $G_n \subset cCA$ mit der Eigenschaft,

⁷⁾ Genauer ist $\sup_N \sum_{n \geq N} |b_n(\zeta) \cdot w_0^n| = \infty$.

⁸⁾ Man nehme etwa die Punkte $z = x + iy \neq 0$ aus E° mit rationalen Koordinaten x, y .

daß die Potenzreihe für $f_{\zeta_n}^* = f \circ \Phi_{\zeta_n}$ für alle $f \in G_n$ an der Stelle $\Phi_{\zeta_n}^{-1}(1)$ divergiert. Wir bilden die Menge

$$(5.1) \quad G = \bigcap_1^\infty G_n.$$

Bekanntlich ist G als Durchschnitt von abzählbar vielen dichten G_δ -Mengen wieder eine dichte G_δ -Menge (man vgl. etwa [6], S. 97). Für jedes $f \in G$ ist nach Satz 1, wobei φ durch (3.1) definiert ist,

$$(5.2) \quad S(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*) := \sup_n |s_n(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*)| = \infty$$

für alle $\zeta = \zeta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Sei nun $f \in G$ und

$$(5.3) \quad Q_f := \{\zeta \in E \text{ mit } S(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*) = \infty\}.$$

Da $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ in Q_f liegen, ist Q_f dicht in E . Weiter ist

$$Q_f = \bigcap_{m=1}^\infty Q_{f,m} \text{ mit } Q_{f,m} := \{\zeta \in E \text{ mit } S(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*) > m\}$$

eine G_δ -Menge; denn jedes $Q_{f,m}$ ist offen, da S als Supremum stetiger Funktionen ⁹⁾ von unten halbstetig ist. Somit gilt der Satz 1 umfassende

Satz 2. *Es seien höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Punkte $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots \in E^\circ$ vorgegeben. Dann existiert eine dichte G_δ -Menge $G \subset cCA$ mit folgender Eigenschaft:*

Zu jeder Funktion $f \in G$ existiert eine in E dichte G_δ -Menge $Q_f \subset E$, die alle Punkte ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) enthält, so daß für alle $\zeta \in Q_f$ die Potenzreihe $\sum b_n(\zeta)w^n$ für $f_\zeta^ = f \circ \Phi_\zeta$ an der Stelle $w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergent ist; hingegen konvergiert die Potenzreihe für f an der Stelle 1.*

Zusatz. cCA und E sind metrische Räume ohne isolierte Punkte; demnach sind (nach Lemma 4) die Mengen G und Q_f überabzählbar.

6. Bemerkungen. Um den in der Einleitung zitierten Satz von Turán ([8]) zu beweisen, genügt es, den Banachraum cs mit der Norm (2.1) zu nehmen.

Geht man vom Banachraum

$$l_1 = \{f: E \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ holomorph in } E^\circ, f(z) = \sum a_n z^n, \sum |a_n| < \infty\}$$

mit der Norm $\|f\|_1 = \sum |a_n|$ aus und benützt man

Lemma 5. (BAJŠANSKI [3], Theorem 3, oder ALPÁR [2], S. 292). *Ist h holomorph in $|z| < R$ (mit $R > 1$), $|h(z)| = 1$ für $|z| = 1$, $h(z) \neq e^{i\theta} \cdot z^k$ und $(h(z))^j = \sum \alpha_{j,n} z^n$, so ist*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_n |\alpha_{j,n}| = \infty,$$

so erhält man eine leichte Verschärfung eines Ergebnisses von ALPÁR ([2]):

⁹⁾ Die Funktionen $s_n(\exp(i\varphi(\zeta)), f_\zeta^*)$ sind in ζ stetig, da die Koeffizienten der Taylorreihe $\sum b_n(\zeta)w^n$ von $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ stetig von ζ abhängen.

Satz 3. Zu vorgegebenen abzählbar vielen von Null verschiedenen Punkten $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots \in E^\circ$ existiert eine in I_1 dichte G_δ -Menge $G \subset I_1$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $f \in G$ existiert eine in E dichte G_δ -Menge $Q_f \subset E$, die alle Punkte ζ'_n enthält, so daß für alle $\zeta \in Q_f$ die Potenzreihe für $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ an der Stelle $\Phi_\zeta^{-1}(1)$ nicht absolut konvergent ist ¹⁰⁾; hingegen konvergiert die Potenzreihe für f an der Stelle 1 absolut.

Literaturverzeichnis

- [1a, b, c] L. ALPÁR, Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence. I, II, III. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **3** (1958), 1—12, **3** (1958), 141—158, **5** (1960), 97—152.
- [2] L. ALPÁR, Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1962), 287—316.
- [3] B. M. BAJŠANSKI, Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler-Borel. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **10** (1956), 131—152.
- [4] J. CLUNIE, On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 165—169.
- [5] G. HALÁSZ, On the behaviour of Taylor series under conformal mappings of the circle of convergence. *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 389—401.
- [6] W. RUDIN, Real and complex analysis. New York, 1966.
- [7] A. E. TAYLOR, Introduction to functional analysis. New York, 1958.
- [8] P. TURÁN, A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence circle. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **12** (1958), 19—26.
- [9] P. TURÁN, Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled „On equivalent power series”. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 171—173.

(Eingegangen am 5. Oktober 1967.)

¹⁰⁾ Nach ALPÁR [2] ist die Potenzreihe für f_ζ^* auf dem ganzen Rande des Einheitskreises (bedingt) konvergent, ja sogar gleichmäßig konvergent.