

Über die Funktionalgleichung $f(xy) + f(x + y - xy) = f(x) + f(y)$

Herrn Prof. Dr. O. Varga zum 60. Geburtstag gewidmet

Von Z. DARÓCZY (Debrecen)

0. Es bezeichne R die Menge der reellen Zahlen und es sei $f: R \rightarrow R$ eine Funktion, die der Funktionalgleichung

$$(1) \quad f(xy) + f(x + y - xy) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in R$ genügt. In einem Vortrag ¹⁾ hat M. HOSSZÚ das Problem der stetigen Lösungen von (1) aufgeworfen. In der Arbeit [3] hat H. ŚWIATAK das folgenden Ergebnis bewiesen: Ist $f(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung (1), die im Punkt $x=0$, oder im Punkt $x=1$, oder in den Punkten $x=a$ ($a \neq 0$) und $x = a + \frac{1}{a} - 1$ stetig ist, so gilt die Darstellung $f(x) = Ax + B$ ($x \in R$), wobei A und B konstante Werte sind. In der Arbeit [1] hat sich I. FENYŐ mit solcher Lösungen der Funktionalgleichung (1) befaßt, die Distributionen sind.

In dieser Arbeit werden wir uns mit den (L) -integrierbaren ²⁾ Lösungen der Funktionalgleichung (1) auf dem Intervall $(0, 1)$ beschäftigen. In unseren Untersuchungen werden wir drei Fälle unterscheiden:

A. Die Funktionalgleichung (1) gilt für alle $x, y \in (0, 1)$, ($f: (0, 1) \rightarrow R$);

B. Die Funktionalgleichung (1) gilt für alle $x, y \in [0, 1]$, ($f: [0, 1] \rightarrow R$);

C. Die Funktionalgleichung (1) gilt für alle $x, y \in R$, ($f: R \rightarrow R$).

Wir bemerken, daß die Größen xy und $x + y - xy$ in dem Intervall $(0, 1)$ bzw. $[0, 1]$ liegen, wenn x und y aus $(0, 1)$ bzw. $[0, 1]$ gewählt sind. In 1. betrachten wir die Fälle A. und B. In 2. behandeln wir den Fall C.

1. Erstens betrachten wir die Funktionalgleichung

$$(1. A) \quad f(xy) + f(x + y - xy) = f(x) + f(y) \quad x, y \in (0, 1),$$

wobei $f: (0, 1) \rightarrow R$ eine unbekannte Funktion ist.

¹⁾ Kolloquium über die Funktionalgleichungen, Zakopane, 1967.

²⁾ Hier bedeutet die (L) -Integrierbarkeit die Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne (S. [2]).

Satz 1. Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $(0, 1)$ (L) -integrierbare Lösung der Funktionalgleichung (1. A), so gilt die Darstellung

$$f(x) = Ax + B \quad x \in (0, 1),$$

wobei A und B beliebige Konstanten sind.

BEWEIS. Integrieren wir die Gleichung (1. A) auf $(0, 1)$ nach y , so gilt

$$\int_0^1 f(xy) dy + \int_0^1 f(x+y-xy) dy = f(x) + \int_0^1 f(y) dy$$

für alle $x \in (0, 1)$. Daraus folgt mit den Substitutionen $xy = t$ bzw. $x + y - xy = t$

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{1-x} \int_x^1 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt.$$

Es sei jetzt

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{falls } x \in (0, 1) \quad \text{und} \quad a = \int_0^1 f(t) dt,$$

dann erhalten wir aus der obigen Gleichung

$$(3) \quad f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)} F(x) + \frac{ax}{1-x} \quad x \in (0, 1).$$

Wegen der (L) -Integrierbarkeit von $f(t)$ ist $F(x)$ in $(0, 1)$ stetig; aber dann ist $f(x)$ in $(0, 1)$ wegen der Darstellung (3) auch stetig. Daraus ergibt sich, daß $F(x)$ in $(0, 1)$ differenzierbar ist und es gilt

$$(4) \quad F'(x) = f(x) \quad x \in (0, 1).$$

Aus (4) und (3) erhalten wir die Differentialgleichung

$$(5) \quad F'(x) - \frac{1-2x}{x(1-x)} F(x) = \frac{ax}{1-x} \quad x \in (0, 1)$$

für die Funktion $F(x)$. Es ist bekannt, daß die allgemeine Lösung der Gleichung (5)

$$F(x) = \frac{A}{2} x^2 + Bx$$

ist. Daraus ergibt sich mit der Berücksichtigung von (4)

$$f(x) = F'(x) = Ax + B$$

für alle $x \in (0, 1)$, wobei A und B konstante Werte sind. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Zweitens betrachten wir die Funktionalgleichung

$$(1. B) \quad f(xy) + f(x+y-xy) = f(x) + f(y) \quad x, y \in [0, 1],$$

wobei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion ist. Dann gilt der

Satz 2. Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $(0, 1)$ (L) -integrierbare Lösung der Funktionalgleichung (1. B), so hat $f(x)$ die Form

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x=0 \\ Ax+B & \text{falls } x \in (0, 1) \\ b & \text{falls } x=1, \end{cases}$$

wobei die Konstanten a, A, B und b beliebig wählbar sind.

BEWEIS. Nach dem Satz 1 ist $f(x) = Ax+B$ falls $x \in (0, 1)$. Es sei $f(0)=a$ und $f(1)=b$. Dann hat $f(x)$ die Form (6). Andererseits kann man leicht prüfen, daß die Funktion (6) bei den beliebigen Konstanten a, A, B und b eine Lösung der Gleichung (1. B) ist.

Bemerkung. Aus der Lösung (6) folgt: Es existiert eine auf dem Intervall $(0, 1)$ (L) -integrierbare Lösung von (1. B), die in den Punkten $x=0$ und $x=1$ nicht stetig ist.

2. Wir betrachten jetzt die Funktionalgleichung

$$(1. C) \quad f(xy) + f(x+y-xy) = f(x) + f(y) \quad x, y \in R,$$

wobei $f: R \rightarrow R$ eine unbekannte Funktion ist. Erstens beweisen wir das folgenden

Lemma. Ist $f(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung (1. C), für die $f(x)=0$ falls $x \in (0, 1)$ erfüllt ist, so gilt $f(x)=0$ für alle $x \in R$.

BEWEIS. Wir führen die Funktion $\varphi(t) = t + \frac{1}{t} - 1$ ein. Man kann leicht zeigen, daß die Funktion $\varphi(t)$ im Intervall $(1, \infty)$ streng monoton wachsend ist, und es gilt die Ungleichung $1 < \varphi(t) < t$ für alle $t \in (1, \infty)$.

Es sei jetzt $t, t_0 \in (1, \infty)$ ($t < t_0$) beliebig und wir setzen in (1. C) $x \in \left(0, \frac{1}{t_0}\right)$, $y = t_0$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$f(x+t_0-xt_0) = f(x) + f(t_0) - f(xt_0) = f(t_0)$$

für alle $x \in \left(0, \frac{1}{t_0}\right)$. Mit der Bezeichnung $u = x+t_0-xt_0$ folgt dann

$$(7) \quad f(u) = f(t_0) \quad \text{falls } u \in (\varphi(t_0), t_0).$$

Es gilt offenbar die Gleichung (1. C), auch für $u = t_0$.

Wir zeigen, daß (7) auch im Punkt $u = \varphi(t_0)$ richtig ist. Wir betrachten eine Zahl $\xi_0 \in (\varphi(t_0), t_0)$, so gilt (7) für alle $u \in (\varphi(\xi_0), \xi_0)$, woraus — wegen $\varphi(t_0) \in (\varphi(\xi_0), \xi_0)$ —

$$f[\varphi(t_0)] = f(t_0)$$

folgt. Nun definieren wir die Folge $t_1, t_2, \dots$ durch die rekursive Formel

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{t_n} - 1 = \varphi(t_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Diese Folge ist streng monoton abnehmend und es gilt — wegen der Eigenschaft von $\varphi(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$. Aus (7) folgt mit vollständiger Induktion

$$f(u) = f(t_0) \quad \text{falls} \quad u \in [t_n, t_0].$$

Wählt man eine natürliche Zahl n mit $t_n < t < t_0$, so gilt diese Behauptung auch für $u=t$; d.h., es ist $f(t)=f(t_0)$. Damit haben wir gezeigt, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $(1, \infty)$ konstant ist. Wir bezeichnen diese Konstante mit c . Setzen wir in (1. C) $x=2$ und $y \geq 2$, so erhalten wir $f(y-2)=c$, woraus — mit der Bezeichnung $t = y-2$ — folgt $f(t)=c$ falls $t \in (-\infty, c]$. Mit den Substitutionen $x=2, y=\frac{1}{2}$; bzw. $x=-2, y=-\frac{1}{2}$ erhalten wir aus (1. C) $f(1)=c=0$. Damit haben wir die Gleichung $f(x)=0$ für alle $x \in R$ gezeigt.

Satz 3. Ist $f(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung (1. C), und ist $f(x)$ auf dem Intervall $(0, 1)$ (L)-integrierbar, so hat $f(x)$ die Gestalt

$$f(x) = Ax + B \quad x \in R,$$

wobei die Konstanten A und B beliebig wählbar sind.

BEWEIS. Nach dem Satz 1. gilt

$$f(x) = Ax + B$$

für alle $x \in (0, 1)$. Wir werden beweisen, daß diese Darstellung für alle $x \in R$ gilt.

Wir definieren die Funktion $g(x)=f(x)-Ax-B$ für alle $x \in R$. Dann ist $g(x)$ eine Lösung der Gleichung (1. C) und $g(x)=0$ falls $x \in (0, 1)$. Nach dem Lemma gilt dann, daß $g(x)$ identisch verschwindet; d.h. $f(x) = Ax + B$ für alle $x \in R$.

Literatur

- [1] I. FENYŐ, On the general solution of a functional equation in the domain of distributions. *Aequationes Mathematicae* (unter Druck).
- [2] I. P. NATANSON, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Berlin*, 1954.
- [3] H. ŚWIATAK, On the functional equation $f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$. *Mat. Vesnik* 5 (20), (1968), 177—182.

(Eingegangen am 22. Januar 1968.)