

Über den Raum der Δ^2 -stetigen Funktionen

Von M. TASCHKE (Rostock)

K. BÖGEL untersuchte in [1] reellwertige Funktionen zweier reeller Variabler und führte den Begriff der Δ^2 -Stetigkeit ein.

Eine besonders einfache Darstellung unter den Δ^2 -stetigen Funktionen gestatten die total- Δ^2 -stetigen Funktionen, die im ersten Abschnitt der Arbeit betrachtet werden. Nachdem wir in Teil 2) die Banachräume $C^2(I)$ bzw. $T^2(I)$ aller Δ^2 -stetigen bzw. total- Δ^2 -stetigen Funktionen eingeführt haben, stellen wir im Hauptteil 3) verallgemeinerte Sätze von Arzelà—Ascoli in diesen Räumen auf. Dabei werden auch gleich die Arbeiten [4], [5] von E. Dobrescu und I. Sălăgean richtiggestellt. Am Ende machen wir noch eine Bemerkung zum Darstellungssatz für lineare Funktionale in einem Teilraum von $C^2(I)$.

1. Wir betrachten reellwertige Funktionen $f: R^2 \rightarrow R$ zweier reeller Variabler.

Definition. Die Funktion $f: R^2 \rightarrow R$ heißt Δ^2 -stetig im Punkt $(x_0, y_0) \in R^2$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0 + h, y_0 + k)| < \varepsilon$$

für beliebige $h, k \in R$ mit $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ gilt.

Wie K. Bögel in [1] zeigte, ist die Funktion f genau dann Δ^2 -stetig im Punkt (x_0, y_0) , wenn f sich in der Form

$$(1) \quad f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$$

darstellen läßt, wobei $g(x, y)$ in (x_0, y_0) stetig ist und $g_1(x)$, $g_2(y)$ gewisse Funktionen einer Variablen sind.

Eine Funktion f , die in allen Punkten eines (zweidimensionalen) Intervalles Δ^2 -stetig ist, läßt i.a. nicht die gleiche Zerlegung (1) für alle Punkte des Intervalles zu (Siehe [1], [7] S. 428). Ein Beispiel für solch eine Funktion ist

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, \\ x & y = 0. \end{cases}$$

Es ergibt sich die Frage: Welche Δ^2 -stetigen Funktionen gestatten eine Darstellung (1), in der g eine überall stetige Funktion ist?

Definition. Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *total- Δ^2 -stetig im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$* , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0 + h, y_0 + k)| < \varepsilon$$

für beliebige $h, k \in \mathbb{R}$ mit $|hk| < \delta$ gilt.

Eine total- Δ^2 -stetige Funktion ist natürlich auch Δ^2 -stetig.

Der folgende Satz beantwortet nun die gestellte Frage.

Satz 1. Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in allen Punkten eines Intervalles I total- Δ^2 -stetig, wenn f sich in der Form

$$f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$$

darstellen läßt, wobei $g(x, y)$ in I stetig ist und $g_1(x), g_2(y)$ gewisse Funktionen einer Variablen sind.

BEWEIS. Es sei (a, b) ein fester, innerer Punkt von I und

$$g(x, y) = f(a, b) - f(x, b) - f(a, y) + f(x, y),$$

$$g_1(x) = f(x, b) + f(a, b),$$

$$g_2(y) = f(a, y).$$

Da $f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$ ist, zeigen wir nun, daß g in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in I$ stetig ist. Wir wollen annehmen, daß $x_0 \neq a, y_0 \neq b$ ist. (Anderenfalls kann der Beweis kürzer geführt werden.)

$\varepsilon > 0$ sei beliebig. Da f in (x_0, y_0) total- Δ^2 -stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0| |b - y_0| < \delta$, $|a - x_0| |y - y_0| < \delta$, $|x - x_0| |y - y_0| < \delta$ die Relationen

$$|f(x, b) - f(x_0, b) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

$$|f(a, y) - f(x_0, y) - f(a, y_0) + f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

$$|f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

gelten.

Ist $\delta_1 = \min \{|b - y_0|^{-1} \delta, |a - x_0|^{-1} \delta, \delta^{\frac{1}{2}}\}$, so gilt für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |g(x, y) - g(x_0, y_0)| &= \\ &= |-f(x, b) - f(a, y) + f(x, y) + f(x_0, b) + f(a, y_0) - f(x_0, y_0)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist g im Punkt (x_0, y_0) stetig.

2. Es sei I ein abgeschlossenes endliches Rechteck in $\mathbb{R}^2$. Auf I seien reellwertige Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Wir betrachten die Menge $C^2(I)$ aller auf I beschränkten und Δ^2 -stetigen Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Wie man leicht zeigt, bildet $C^2(I)$ mit $\|f\| = \sup \{|f(x)|; x \in I\}$ als Norm einen Banachraum (Siehe [3]).

Die Menge $T^2(I)$ der auf I total- Δ^2 -stetigen und beschränkten Funktionen ist in $C^2(I)$ enthalten.

Satz 2. Der Raum $T^2(I)$ ist abgeschlossen.

BEWEIS. Es sei f ein Häufungspunkt von $T^2(I)$ und $\varepsilon > 0$ eine beliebig vorgegebene Zahl. Dann gibt es eine Funktion $f_1 \in T^2(I)$, so daß $\|f_1 - f\| < \varepsilon$ ist.

Es sei $(x_0, y_0) \in I$ ein beliebiger Punkt. Da f_1 in (x_0, y_0) total- Δ^2 -stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0| |y - y_0| < \delta$ die Ungleichung

$$|f_1(x_0, y_0) - f_1(x_0, y) - f_1(x, y_0) + f_1(x, y)| < \varepsilon$$

gilt. Dann ist aber

$$\begin{aligned} |f(x_0, y_0) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x, y)| &\leq |f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0)| + \\ &+ |f(x_0, y) - f_1(x_0, y)| + |f(x, y_0) - f_1(x, y_0)| + |f_1(x_0, y_0) - \\ &- f_1(x_0, y) - f_1(x, y_0) + f_1(x, y)| < 5\varepsilon \end{aligned}$$

für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0| |y - y_0| < \delta$, d.h., auch f ist in (x_0, y_0) total- Δ^2 -stetig.

Folglich gehört f zur Menge $T^2(I)$.

Da es in $C^2(I)$ Funktionen gibt, die nicht zu $T^2(I)$ gehören, ergibt sich die

Folgerung 3. Der Raum $T^2(I)$ liegt in $C^2(I)$ nicht dicht.

3. Wir wollen uns nun mit dem Problem befassen, wann eine Teilmenge H von $C^2(I)$ relativ kompakt ist. Dabei werden wir eine Verallgemeinerung der bekannten Sätze von Arzelà—Ascoli (Siehe [2]) erhalten.

Definition. Die Funktionen einer Teilmenge $H \subset C^2(I)$ heißen gleichgradig Δ^2 -stetig auf I , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für beliebige Punkte $(x, y), (x', y') \in I$ mit $|x - x'| < \delta, |y - y'| < \delta$ die Beziehung

$$|f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle $f \in H$ gilt.

Satz 4. Eine Teilmenge $H \subset C^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

1. die Funktionen von H gleichgradig Δ^2 -stetig sind und
2. für jedes feste $(u, v) \in I$ die Funktionenmengen

$$H_u = \{f(u, y); f \in H\} \subset C^2(I) \quad \text{und}$$

$$H_v = \{f(x, v); f \in H\} \subset C^2(I)$$

relativ kompakt sind.

BEWEIS. Notwendig. Wenn H relativ kompakt ist, existieren zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ endlich viele Funktionen $f_i \in H$ ($i = 1, 2, \dots, n$) derart, daß es zu jedem $f \in H$ eine Funktion f_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) mit $\|f - f_k\| < \varepsilon$ gibt. Da für jeden Punkt $(u, v) \in I$ nun

$$(2) \quad \begin{aligned} |f(u, y) - f_k(u, y)| &< \varepsilon \quad \text{für alle } y, \\ |f(x, v) - f_k(x, v)| &< \varepsilon \quad \text{für alle } x \end{aligned}$$

gilt, sind die Mengen $H_u, H_v \subset C^2(I)$ relativ kompakt. δ sei so beschaffen, daß für beliebige Punkte $(x, y), (x', y') \in I$ mit $|x - x'| < \delta, |y - y'| < \delta$ die Ungleichungen

$$(3) \quad |f_i(x, y) - f_i(x', y) - f_i(x, y') + f_i(x', y')| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bestehen. Da eine in I überall Δ^2 -stetige Funktion auch gleichmäßig Δ^2 -stetig in I ist (Siehe [1]), läßt sich dies sicher erreichen.

Dann gelten wegen (2) und (3) für eine beliebige Funktion $f \in H$ und alle Punkte $(x, y), (x', y') \in I$ mit $|x - x'| < \delta, |y - y'| < \delta$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')| &\leq |f(x, y) - f_k(x, y)| + \\ &+ |f_k(x', y) - f(x', y)| + |f_k(x, y') - f(x, y')| + |f(x', y') - \\ &- f_k(x', y')| + |f_k(x, y) - f_k(x', y) - f_k(x, y') + f_k(x', y')| < 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich sind die Funktionen der relativ kompakten Menge H gleichgradig Δ^2 -stetig.

Hinreichend. Da $C^2(I)$ ein vollständiger Raum ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß sich zu H für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε -Netz konstruieren läßt.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen Bedingung 1 gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß die Ungleichung

$$|f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle Funktionen $f \in H$ und alle Punkte $(x, y), (x', y') \in I$ mit $|x - x'| < \delta, |y - y'| < \delta$ erfüllt ist. Wir zerlegen I in endlich viele Rechtecke $I_1, I_2, \dots, I_s$, wobei der Durchmesser jedes I_i ($i = 1, 2, \dots, s$) kleiner als δ sein soll. Aus jedem Intervall I_i wählen wir einen Punkt (x_i, y_i) . Nach Voraussetzung sind die Mengen H_{x_i} und H_{y_i} ($i = 1, 2, \dots, s$) relativ kompakt, also auch die Vereinigungsmengen $M = \bigcup_{i=1}^s H_{x_i}$ und $N = \bigcup_{i=1}^s H_{y_i}$. Es seien deshalb $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset C^2(I)$ endliche ε -Netze von M bzw. N .

Es sei Φ die (endliche) Menge aller Abbildungen φ , die jeder natürlichen Zahl $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ ein Zahlentupel $(\alpha(i), \beta(i))$ zuordnen, wobei $\alpha(i) \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $\beta(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ sind. Für jedes $\varphi \in \Phi$ bedeute L_φ die Menge aller Funktionen $f \in H$, für die die Ungleichungen

$$|f(x_i, y) - a_{\alpha(i)}| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \text{ und } i = 1, 2, \dots, s,$$

$$|f(x, y_i) - b_{\beta(i)}| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ und } i = 1, 2, \dots, s$$

erfüllt sind. Aus der Definition der Größen $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n$ ergibt sich, daß H durch die Vereinigung aller L_φ überdeckt wird. (Einige Mengen L_φ können leer sein.) Zum Schluß beweisen wir nun noch, daß der Durchmesser jeder Menge L_φ kleiner als 8ε ist.

Es seien f und g zwei beliebige Funktionen aus L_φ . Zu einem beliebigen Punkt $(x, y) \in I$ gibt es einen Index i , so daß $(x, y) \in I_i$ ist. Nach unserer Konstruktion von I_i sind

$$(4) \quad |f(x_i, y_i) - f(x_i, y) - (x, y_i) + f(x, y)| < \varepsilon$$

und

$$|g(x_i, y_i) - g(x_i, y) - g(x, y_i) + g(x, y)| < \varepsilon.$$

Da $f, g \in L_\varphi$, gelten die Beziehungen

$$|f(x_i, y) - g(x_i, y)| < 2\varepsilon,$$

$$(5) \quad |f(x, y_i) - g(x, y_i)| < 2\varepsilon$$

und

$$|f(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)| < 2\varepsilon.$$

Aus den Relationen (4) und (5) folgt, daß

$$\begin{aligned} |f(x, y) - g(x, y)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_i) - f(x_i, y) + f(x_i, y_i)| + \\ &\quad + |g(x, y) - g(x, y_i) - g(x_i, y) + g(x_i, y_i)| + \\ &\quad + |f(x_i, y) - g(x_i, y)| + |f(x, y_i) - g(x, y_i)| + \\ &\quad + |f(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)| < 8\varepsilon \end{aligned}$$

ist.

Greifen wir also aus jeder der endlich vielen (nichtleeren) Mengen L_φ ein Element heraus, so bildet die Menge dieser Funktionen ein 8ε -Netz von H .

Mit denselben Schritten wie im vorigen Beweis können wir den folgenden Satz aufstellen.

Satz 5. Eine Teilmenge $H \subset C^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

1. die Funktionen von H gleichgradig Δ^2 -stetig sind und
2. für jedes feste $(u, v) \in I$ die Funktionenmenge

$$H_{uv} = \{f(u, y) + f(x, v); f \in H\} \subset C^2(I)$$

relativ kompakt ist.

Wir erkennen sofort, daß in den Sätzen 4 und 5 besonders die Bedingung 2 sehr stark ist. Dort fordern wir, daß gewisse Mengen, die von einem aus I gewählten Punkt (u, v) abhängen, für jedes $(u, v) \in I$ relativ kompakt sind. Genügt es nicht schon, wenn wir nur voraussetzen, daß die Bedingung 2 für einen einzigen Punkt aus I erfüllt ist? Wie wir an einem Beispiel sehen werden, gelten bei solch einer Abschwächung der Bedingung 2 die Sätze 4 und 5 im Raum $C^2(I)$ nicht mehr.

Beispiel. Es sei $\{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots\}$ die Menge der rationalen Zahlen, die im Intervall $[0, 1]$ liegen. Wir betrachten die Familie H der auf $I = [0, 1] \times [0, 1]$ definierten Funktionen

$$f_i(x, y) = \begin{cases} 0 & y \text{ irrational,} \\ x & y \text{ rational, } y \neq y_i, \\ x & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1-x & x \in [\frac{1}{2}, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ y = y_i. \end{matrix} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Die Menge H hat folgende Eigenschaften:

1. Die Funktionen von H sind auf I gleichgradig Δ^2 -stetig, weil jede Funktion $f_i \in H$ und alle Punkte $(x, y), (x', y') \in I$ die Beziehung

$$|f_i(x, y) - f_i(x', y) - f_i(x, y') + f_i(x', y')| \leq 2|x - x'|$$

erfüllen.

2. Es gibt Punkte (u, v) in I , so daß die Funktionenmengen $H_u = \{f_i(u, y); f_i \in H\}$

und $H_v = \{f_i(x, v); f_i \in H\}$ relativ kompakt sind. Betrachten wir z.B. den Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ so bestehen die beiden Mengen jeweils nur aus einem Element:

$$f_i\left(\frac{1}{2}, y\right) = \begin{cases} 0 & y \text{ irrational} \\ \frac{1}{2} & y \text{ rational} \end{cases} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots$$

$$f_i\left(x, \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots$$

Folglich sind die beiden Mengen H_u und H_v trivialerweise kompakt.

3. Die Menge H ist nicht relativ kompakt, weil für beliebige, voneinander verschiedene Funktionen $f_i, f_j \in H$ stets $\|f_i - f_j\| = 1$ ist.

Im Raum $T^2(I)$ der total- Δ^2 -stetigen Funktionen lassen sich nun einfachere Bedingungen für die Gültigkeit des verallgemeinerten Arzelaschen Satzes angeben.

Definition. Die Funktionen einer Teilmenge $H \subset T^2(I)$ heißen gleichgradig total- Δ^2 -stetig auf dem Intervall I , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für beliebige Punkte $(x, y), (x', y') \in I$ mit $|x - x'| |y - y'| < \delta$ die Beziehung

$$|f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle $f \in H$ gilt.

Satz 6. (Siehe [4]). Eine Teilmenge $H \subset T^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

1. die Funktionen von H gleichgradig total- Δ^2 -stetig und gleichmäßig beschränkt sind sowie
2. für ein gewisses $(a, b) \in I$ die Funktionenmengen

$$H_a = \{f(a, y); f \in H\} \subset T^2(I)$$

und

$$H_b = \{f(x, b); f \in H\} \subset T^2(I)$$

relativ kompakt sind.

BEWEIS. Die Notwendigkeit läßt sich wie bei Satz 4 zeigen.

Hinreichend. Jede Funktion $f \in H$ läßt sich nach Satz 1 in der Form $f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$ darstellen, wobei $g_1(x) = f(x, b) - f(a, b)$, $g_2(y) = f(a, y)$ sind und $g(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)$ in I stetig ist. Da die Funktionen von H gleichgradig total- Δ^2 -stetig und gleichmäßig beschränkt sind, sind (wie wir aus dem Beweis von Satz 1 ersehen können) die Funktionen g gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzelá—Ascoli ist die Menge $G = \{g(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b); f \in H\}$ relativ kompakt.

Laut Voraussetzung sind die Mengen $H_a = \{f(a, y); f \in H\}$, $H_b = \{f(x, b); f \in H\}$ und $K = \{f(a, b); f \in H\}$ relativ kompakt. Da nun auch die algebraische Summe $G + H_a + H_b - K$, die H enthält, relativ kompakt ist, ist H relativ kompakt.

Aus Satz 6 folgt sofort

Satz 7. (Siehe [5]). Eine Teilmenge $H \subset T^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

1. die Funktionen von H gleichgradig total- Δ^2 -stetig und gleichmäßig beschränkt sind und
2. für ein gewisses $(a, b) \in I$ die Funktionenmenge

$$H_{ab} = \{f(a, y) + f(x, b); f \in H\} \subset T^2(I)$$

relativ kompakt ist.

Bemerkung. Die Sätze 6 und 7 wurden bereits von E. DOBRESCU und I. SÂLÂGEAN in ihren Arbeiten [4], [5] bewiesen. Dazu muß aber bemerkt werden, daß diese Sätze nicht, wie in [4], [5] behauptet wird, im Raum $C^2(I)$ gelten, sondern nur im Raum $T^2(I)$ richtig sind. Unser Beispiel demonstriert dies in sehr anschaulicher Form.

4. Eine Funktion $f: R^2 \rightarrow R$, die Δ^2 -stetig im Intervall I ist, ist i.a. nicht meßbar. Ist z.B. $M \subset [0, 1]$ eine nicht meßbare Menge, so ist die Funktion $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$$

Δ^2 -stetig und nicht meßbar.

Wie in [8] gezeigt wurde, gibt es aber eine Klasse von Δ^2 -stetigen Funktionen, die, falls sie eine meßbare Majorante besitzen, stetig und somit meßbar sind.

Wir wollen nun den Raum $C_m^2(I)$ aller meßbaren Funktionen aus $C^2(I)$ betrachten und für die linearen Funktionalen im Raum $C_m^2(I)$ eine analytische Darstellung finden.

Satz 7. (Siehe [6], S. 188—197.) Die allgemeine Form eines linearen Funktionalen φ im Raum $C_m^2(I)$ ist durch das Lebesgue—Stieltjes-Integral

$$\varphi(f) = \int_I f d\Phi \quad f \in C_m^2(I)$$

mit einer beliebigen Intervallfunktion Φ von beschränkter Variation gegeben. Dabei läßt sich Φ so wählen, daß

$$\|\varphi\| = \bar{\Phi}(I)$$

gilt, wobei $\bar{\Phi}(I)$ die totale Variation von Φ ist.

Literatur

- [1] K. BÖGEL, Über die mehrdimensionale Differentiation, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **65** (1962), 45—71.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*, New York, 1960.
- [3] E. DOBRESCU, Contributii la o analiză infinitezimală bidimensională, *Stud. Cerc. Mat.* **8** (1957), 103—130.
- [4] E. DOBRESCU—I. SÂLÂGEAN, O extindere a criteriului de compacitate al lui Arzelà, *Com. Acad. Romîne, R. P.* **9** (1959), 216—221.
- [5] E. DOBRESCU—I. SÂLÂGEAN, Asupra unui criteriu de compacitate pentru funcțiile hiperbolic continue, *Com. Acad. R. P.* **9** (1959), 419—424.
- [6] L. W. KANTOROWITSCH—G. P. AKILOW, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*, Berlin, 1964.
- [7] M. NICOLESCU, *Analiză matematică II*, București, 1957.
- [8] M. TASCHÉ, Über Funktionen, die Δ^2 -stetig bzw. stetig von 2. Ordnung sind, in Vorbereitung.

(Eingegangen am 20. Februar, 1968.)