

Schiefverbände mit Zusatzaxiomen

Von MAX DIETER GERHARDTS (Bremen)

In der Theorie der nichtkommutativen Verbände wird ein *Schiefverband* (*Verflechtung*) definiert als eine Algebra $(M; \wedge, \vee)$ mit zwei binären, eindeutigen, vollständigen und assoziativen Operationen $\wedge$ und $\vee$, in der für je zwei Elemente $a, b \in M$ die Axiome

$$a \wedge (b \vee a) = a \quad (a \wedge b) \vee a = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (b \wedge a) \vee a = a$$

erfüllt sind [1], [2]. Das Axiomensystem ist *dualsymmetrisch* in folgendem Sinne: Es ist invariant gegenüber Umkehr der Reihenfolge der Elemente bei gleichzeitiger Permutation von $\wedge$ und $\vee$.

In einem Schiefverband $(M; \wedge, \vee)$ sind die Aussagen $a \wedge b = a$ und $a \vee b = b$ äquivalent. Wird durch $a < b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ in $(M; \wedge, \vee)$ eine Relation $<$ erklärt, so ist das Relativ $(M; <)$ eine Quasiordnung, in der je zwei Elemente eine untere und eine obere Grenze besitzen [1]. Hierbei heißt $(M; <)$ *quasi geordnet*, wenn $<$ reflexiv und transitiv ist.

Schiefverbände sind *idempotent* und *glatt*, d. h. für je zwei Elemente $a, b \in M$ gelten die Identitäten

$$a \wedge a = a \quad a \vee a = a$$

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b \quad a \vee (b \vee a) = b \vee a.$$

Denn es ist $a \wedge a = a \wedge [(a \wedge b) \vee a] = a$ und $(a \wedge b) \wedge a = (a \wedge b) \wedge [(a \wedge b) \vee a] = a \wedge b$. Die übrigen Gleichungen ergeben sich aus der Dualsymmetrie.

Wichtige Klassen von Schiefverbänden werden nun bestimmt durch Zusatzaxiome der folgenden Form: Für jedes $(m+n)$ -tupel von Elementen $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in M$ gilt die $\wedge \vee$ — Termgleichung $T^{\wedge \vee}(a_1, \dots, a_m) = S^{\wedge \vee}(b_1, \dots, b_n)$ [3]. Bei der Adjunktion solcher Zusatzaxiome entsteht jedesmal die Frage, ob diese sinnvoll sind, d. h. ob aus ihnen und den Schiefverbandsaxiomen nicht bereits die beiden Kommutativgesetze für $\wedge$ und $\vee$ folgen, womit der Schiefverband $(M; \wedge, \vee)$ ein Verband wäre, die Quasiordnung $(M; <)$ eine Ordnung ergäbe und die gewonnenen Ergebnisse möglicherweise trivial sein würden.

So sind z. B. die einen regulären Quasiverband (MATSUSHITA) charakterisierenden Axiome

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (b \vee a) \wedge a = a$$

sinnvoll [4], während, worauf P. JORDAN hinweist ([3]), jede der beiden ähnlichen

Forderungen

$$a \vee (b \wedge a) = a \quad (a \vee b) \wedge a = a$$

bereits Kommutativität bedingt.

Um eine Antwort auf die obige Frage geben zu können, definieren wir den Begriff der *Spur* eines schiefverbandstheoretischen Terms $T^{\wedge \vee}$. Hierzu ordnen wir jedem $\wedge \vee$ -Term $T^{\wedge \vee}$ seinen bezüglich $\vee$ kommutierten Term $T^{\wedge \nabla}$ zu, d. h. denjenigen $\wedge \nabla$ -Term, der aus $T^{\wedge \vee}$ entsteht, wenn man jeden $\wedge \vee$ -Teilterm der Form $T' \vee T''$ durch $T'' \nabla T'$ ersetzt. Unter der Spur $\text{sp } T$ eines Terms $T^{\wedge \vee}$ verstehen wir sodann die erste Variable des bezüglich $\vee$ kommutierten Terms $T^{\wedge \nabla}$.

Nun lautet die Antwort auf die obige Frage folgendermaßen:

Dann und nur dann ist ein Schiefverband $(M; \wedge, \vee)$ ein Verband, wenn in $(M; \wedge, \vee)$ mindestens ein Zusatzaxiom $\forall a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in M: T^{\wedge \vee}(a_1, \dots, a_m) = S^{\wedge \vee}(b_1, \dots, b_n)$ mit $\text{sp } T \neq \text{sp } S$ gilt.

BEWEIS. Zunächst seien in allen Zusatzaxiomen die Spuren der beiden Terme gleich. Da dies auch in den einen Schiefverband charakterisierenden Axiomen der Fall ist, folgt die Spurgleichheit für alle Termgleichungen der Theorie. Denn die Relation der Spurgleichheit in der Menge aller $\wedge \vee$ -Terme ist eine Kongruenzrelation. Es kann also weder $a \wedge b = b \wedge a$ noch $a \vee b = b \vee a$ für je zwei $a, b \in M$ gefolgert werden, weil hier die Spuren der Terme links und rechts des Gleichheitszeichens verschieden sind.

Es gelte nun ein Zusatzaxiom $\forall a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in M: T^{\wedge \vee}(a_1, \dots, a_m) = S^{\wedge \vee}(b_1, \dots, b_n)$ mit $\text{sp } T \neq \text{sp } S$. a und b seien beliebige Elemente von M . Man ersetze in $T^{\wedge \vee} = S^{\wedge \vee}$ die Spur $\text{sp } T$ und alle zu $\text{sp } T$ gleichen Elemente durch $a \wedge b$, alle übrigen Elemente dagegen durch $b \wedge a$. Die neue Termgleichung sei $T_0^{\wedge \vee} = S_0^{\wedge \vee}$. Dann besteht der Term $T_0^{\wedge \vee}$ entweder nur aus $a \wedge b$, oder das durch die Abbildung $T^{\wedge \vee} \rightarrow T_0^{\wedge \vee}$ erzeugte Bild $a \wedge b$ von $\text{sp } T$ ist folgendermaßen mit $a \wedge b$ oder $b \wedge a$ verknüpft: $(a \wedge b) \wedge (a \wedge b)$, $(a \wedge b) \wedge (b \wedge a)$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge b)$ oder $(b \wedge a) \vee (a \wedge b)$. Wegen der sich aus Assoziativität, Idempotenz und Glattheit ergebenden Identitäten $(x \wedge y) \wedge (y \wedge x) = x \wedge y$ und $(x \wedge y) \vee (y \wedge x) = [(x \wedge y) \wedge (y \wedge x)] \vee (y \wedge x) = y \wedge x$ haben alle vier Terme den Wert $a \wedge b$. Jede weitere Verknüpfung dieses Resultates mit $a \wedge b$ oder $b \wedge a$ liefert ebenso $a \wedge b$, so daß nach höchstens endlich vielen Schritten der Nachweis $T_0^{\wedge \vee} = a \wedge b$ gelingt. Entsprechend ist $S_0^{\wedge \vee} = b \wedge a$; also ergibt sich insgesamt $a \wedge b = b \wedge a$. Dual erhält man $a \vee b = b \vee a$, wenn man $\text{sp } T$ und alle hierzu gleichen Elemente durch $a \vee b$, die zu $\text{sp } T$ verschiedenen Elemente der Termgleichung $T^{\wedge \vee} = S^{\wedge \vee}$ jedoch durch $b \vee a$ ersetzt. Damit ist die Kommutativität von $(M; \wedge, \vee)$ nachgewiesen. Insbesondere ist eine Verflechtung schon dann ein Verband, wenn sie bezüglich nur einer der beiden Operationen kommutativ ist.

Literatur

- [1] M. D. GERHARDS, Zur Charakterisierung distributiver Schiefverbände. *Math. Ann.* **161** (1965), 231—240.
- [2] P. JORDAN u. E. WITT, Zur Theorie der Schrägverbände. *Akad. Mainz* 1953, 225—232.
- [3] P. JORDAN, Beiträge zur Theorie der Schrägverbände. *Akad. Mainz* 1956, 29—42.
- [4] S. MATSUSHITA, Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände. *Math. Ann.* **137** (1959), 1—8.

(Eingegangen am 11. Juni 1968.)