

Zur Theorie der Lagrange-Funktionen

Von I. MAKAI (Debrecen)

Einleitung

In der mathematischen Behandlung der allgemeinen Naturgesetze spielt eine wichtige Rolle die Theorie der Lagrangeschen (s. z. B. A. NIJENHUIS [17], S. 151., J. A. SCHOUTEN [24], S. 112.), oder Hamiltonschen (s. z. B. A. S. EDDINGTON [6], S. 206.) Ableitung der Lagrange-Funktionen, die über einem Gebiet G der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n (in Terminologie der Theorie der geometrischen Objekten, s. z. B. J. ACZÉL—ST. GOLĄB [1]) solche Differentialkomitanten endlicher Ordnung gewisser Grundobjektenfelder (z. B. eines affinen Zusammenhangs Γ_{jk}^{*i} , oder eines metrischen Fundamentaltensors g_{ij} , oder der Vereinigungsobjekten gewisser differentialgeometrischen Objekten) sind, wie die Weylschen Dichten vom Gewichte $+1$ (oder, in Terminologie von J. A. SCHOUTEN [24] „scalar Δ -densities of weight $+1$ “) sein sollen. In der heutigen mathematischen Literatur können wir neue Ergebnisse finden, die sich auch auf die funktionale Gestalt der Lagrange-Funktionen beziehen (s. z. B. H. RUND [21], [22], [23], J. C. DU PLESSIS [19], [20]).

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Charakterisierung, möglichst die Bestimmung der funktionalen Gestalt der Lagrange-Funktion mit wenigstens Regularitätsannahmen in gewissen Spezialfällen. Wir werden z. B. ein neuer Beweis eines bekannten Satzes von E. NOETHER geben, der die Abhängigkeit der Lagrange-Funktion vom metrischen Fundamentaltensor ausdrückt (s. E. NOETHER [18], R. WEITZENBÖCK [27], A. S. EDDINGTON [6], H. RUND [22]). In den Bezeichnungen werden wir möglichst die Arbeiten von H. RUND ([21], [22], [23]) und J. C. DU PLESSIS ([19], [20]) folgen.

Es sei ein *differentialgeometrisches Objektenfeld* r -ter Klasse ($r \geq 0$, s. [1], S. 15—16.)

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(x^j) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

in einem Gebiet G der Mannigfaltigkeit X_n gegeben, wo x^j die lokalen Koordinaten der Punkten des Gebietes G bezeichnet. Nehmen wir an, daß die Funktionen ψ_α ($\alpha = 1, \dots, N$) in G stetige partielle Ableitungen einschließend bis K -ter Ordnung besitzen, wo K eine natürliche Zahl ist. Wir bezeichnen diese Ableitungen mit

$$\psi_{\alpha, i_1 \dots i_k} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^k \psi_\alpha}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}, \quad (k = 1, \dots, K)$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß das Objekt ψ_α bezüglich der zulässigen

Koordinatentransformationen wenigstens $r + K$ -ter Regularitätsklasse

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x^j) \\ \left(\det \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) \neq 0; \quad B_{j_1 \dots j_p}^i &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^p x^i}{\partial \bar{x}^{j_1} \dots \partial \bar{x}^{j_p}}, \right. \\ \left. \bar{B}_{j_1 \dots j_p}^i &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^p \bar{x}^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_p}}, \quad p = 1, 2, \dots, r + K \right) \end{aligned}$$

eine (bestimmte) Transformationsformel von der Gestalt

$$\bar{\psi}_\alpha = \bar{\psi}_\alpha(\bar{x}^i) = \Psi_\alpha(\psi_1, \dots, \psi_N, B_j^i, B_{j_1 j_2}^i, \dots, B_{j_1 \dots j_r}^i) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

hat. Wenn Ψ_α ($\alpha = 1, \dots, N$) in allen ihren Veränderlichen stetige partielle Ableitungen bis K -ter Ordnung besitzt, so bietet das Funktionensystem

$$(2) \quad \{\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}\} \quad (1 \leq k \leq K)$$

wieder ein differentialgeometrisches Objekt (höchstens $r + k$ -ter Klasse). Die Transformationsformel dieses Objektes kann allein mit Hilfe des Funktionensystems $\bar{\psi}_\alpha$ bestimmt werden.

Es sei noch ein differentialgeometrisches Objekt erster Klasse $\mathcal{L}_\lambda$ ($\lambda = 1, \dots, L$) in G erklärt, so daß $\mathcal{L}_\lambda$ eine (algebraische) *Komitante* (s. [1], S. 16.) des Objektes (2), d. h. eine *Differentialkomitante* k -ter Ordnung von ψ_α (s. [1], S. 17.).

$$(3) \quad \mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k})$$

ist. Die Funktionen Φ_λ sollen gegenüber den Koordinatentransformationen invariant sein, die Gleichung (3) soll also in jedem Koordinatensystem ($\bar{x}^j$) bestehen

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Phi_\lambda(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots, \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}),$$

wo die Koordinaten $\bar{x}^j$ mit der Koordinaten x^i nach (1) verknüpft sind. Schreibt man die Transformationsformel von $\mathcal{L}_\lambda$ in der Form

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_L, B_j^i),$$

so folgen die Identitäten

$$(4) \quad \Phi_\lambda(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots, \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}), B_j^i),$$

die man als weitere Voraussetzung bezüglich der Transformationsformel von $\mathcal{L}_\lambda$ auffassen kann.

Ist $L = 1$ und hat die Funktion $\Lambda = \Lambda_1$ die Gestalt

$$\Lambda(\mathcal{L}, B_j^i) = |\det(B_j^i)| \mathcal{L}$$

so werden wir das Objekt $\mathcal{L}$ *Lagrange-Funktion* k -ter Ordnung bezüglich des Objektes ψ_α nennen. (Eine Lagrange-Funktion soll daher eine Weylsche Dichte vom Gewichte $+1$ sein.) Die Identität (4) lautet in diesem Fall

$$(5) \quad \Phi(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots, \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}) = |\det(B_j^i)| \Phi(\psi_\alpha; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}).$$

Wir bemerken, daß sich die soeben gegebene Definition der Lagrange-Funktion von der von H. RUND ([22], S. 243—245.) herrührenden Definition der Lagrange-

Funktion in gewissen Einzelheiten unterscheidet. Wir setzen keine Regularitätsannahme bezüglich der funktionalen Gestalt der Lagrange-Funktion voraus, dagegen ist die Unabhängigkeit der Lagrange-Funktion von den Koordinaten x^i als getrennten Variablen erfordert (s. die Bemerkungen z. B. am Ende der Paragraphen 1. und 2. dieser Arbeit).

Mit Rücksicht darauf, daß die Identität (5) in einem beliebigen fixen Punkt x_0^i von G in eine Identität von der Form

$$(6) \quad \Phi(\bar{\psi}_x; \bar{\psi}_{x,i_1}; \dots \bar{\psi}_{x,i_1 \dots i_k}) = |\det(B_j^i)| \Phi(\psi_x; \dots \psi_{x,i_1 \dots i_k}) \quad (x^i = x_0^i)$$

übergeht, die als Funktionalgleichung bezüglich der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \Phi$ mit freien Parametern B_j^i ($\det(B_j^i) \neq 0$), $B_{j_1 j_2}^i, \dots, B_{j_1 \dots j_{r+k}}^i$ aufgefaßt werden kann, können wir die Methoden der Theorie der Funktionalgleichungen zur Untersuchung der Lagrange-Funktion jeweils verwenden.

§ 1. Lagrange-Funktionen über X_1

Es seien $u = u(x)$, $u_x = u_x(x)$ kovariante, $v = v(x)$, $v_x = v_x(x)$ kontravariante Vektorfelder ($\alpha = 1, \dots, N$), so daß die Funktionen $u(x)$, $u_x(x)$, $v(x)$, $v_x(x)$ über X_1 k -mal differenzierbar sind. Wir bezeichnen die Ableitungen von $u(x)$, $u_x(x)$, $v(x)$, $v_x(x)$ mit

$$\begin{aligned} u', u'', \dots u^{(k)}, u'_x, u''_x, \dots u_x^{(k)}, \\ v', v'', \dots v^{(k)}, v'_x, v''_x, \dots v_x^{(k)}. \end{aligned}$$

Wir werden in diesem Paragraphen solche Lagrange-Funktionen untersuchen, die die Gestalt

$$\begin{aligned} L &= L_1(u, u', \dots u^{(k)}), \\ L &= L_2(v, v', \dots v^{(k)}), \\ L &= L_3(u, u', \dots u^{(k)}, v, v', \dots v^{(k)}), \\ L &= L_4(u, u', \dots u^{(k)}, u_x, u'_x, \dots u_x^{(k)}), \\ L &= L_5(v, v', \dots v^{(k)}, v_x, v'_x, \dots v_x^{(k)}) \end{aligned}$$

haben. Die Nachstehenden bieten die Verallgemeinerungen der Ergebnisse von G. KNAPEČZ ([8]) und des Verfassers ([13]).

Mit Anwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \beta_i &\stackrel{\text{df}}{=} B_{\underbrace{1 \dots 1}_{i\text{-mal}}}^1 = \frac{d^i x}{d\bar{x}^i}, & \bar{\beta}_i &\stackrel{\text{df}}{=} \bar{B}_{\underbrace{1 \dots 1}_{i\text{-mal}}}^1 = \frac{d^i \bar{x}}{dx^i}, \\ \bar{u}^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{u}}{d\bar{x}^j}, & \bar{u}_x^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{u}_x}{d\bar{x}^j}, \\ \bar{v}^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{v}}{d\bar{x}^j}, & \bar{v}_x^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{v}_x}{d\bar{x}^j}, \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, k+1, j = 0, 1, 2, \dots, k)$$

beweisen wir vor allem zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es gelten die Relationen*

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= \beta_1 u, \\ \begin{cases} \bar{u}' &= \beta_2 u + \beta_1^2 u', \\ \bar{u}'' &= \beta_3 u + 3\beta_1 \beta_2 u' + \beta_1^3 u'', \\ \bar{u}''' &= \beta_4 u + 4\beta_1 \beta_3 u' + (3\beta_2^2 u' + 6\beta_1^2 \beta_2 u'') + \beta_1^4 u''', \end{cases} \end{aligned}$$

und für jedes i ($2 \leq i \leq k$)

$$(8) \quad \bar{u}^{(i)} = \beta_{i+1} u + (i+1) \beta_1 \beta_i u' + \sum_{p=1}^{i-1} P_p^i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p+1}) u^{(i-p)} + \beta_1^{i+1} u^{(i)},$$

wo P_p^i homogene Polynome von $\beta_2, \dots, \beta_{p+1}$ sind.

BEWEIS. (7) kann man durch Differenzieren verifizieren. Wir durchführen den Beweis durch Induktion. Nach (7) ist (8) für $i=2$ gültig. Vorausgesetzt, daß die Gleichung (8) für ein i schon gültig ist, derivieren wir (8) bezüglich x :

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{u}^{(i+1)} = \beta_{i+2} u + (i+2) \beta_1 \beta_{i+1} u' + (i+1) \beta_2 \beta_i u' + (i+1) \beta_1^2 \beta_i u'' + \\ + \sum_{p=1}^{i-1} \left(\sum_{q=1}^{p+1} \frac{\partial P_p^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} u^{(i-p)} + \beta_1 P_p^i u^{(i+1-p)} \right) + (i+1) \beta_1^i \beta_2 u^{(i)} + \beta_1^{i+2} u^{(i+1)}, \end{cases}$$

und wir sehen, daß (9) mit den Bezeichnungen

$$(10) \quad \begin{cases} P_1^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} (i+1) \beta_1 \beta_2 + \beta_1 P_1^i, \\ P_r^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \beta_1 P_r^i + \sum_{q=1}^r \frac{\partial P_{r-1}^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} \quad (1 < r < i), \\ P_i^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} (i+1) \beta_2 \beta_i + \sum_{q=1}^i \frac{\partial P_{i-1}^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} \end{cases}$$

ein Formel von der Gestalt (8) ist, womit der Induktionsbeweis beendet ist.

Hilfssatz 2. *Es gelten die Relationen:*

$$(11) \quad \begin{aligned} v &= \beta_1 \bar{v}, \\ v' &= \bar{\beta}_1 \beta_2 \bar{v} + \bar{v}', \\ v'' &= \bar{\beta}_1^2 \beta_3 \bar{v} + \bar{\beta}_2 \beta_2 \bar{v} + \bar{\beta}_1^2 \beta_2 \bar{v}' + \beta_1 \bar{v}'', \\ v''' &= \bar{\beta}_1^3 \beta_4 \bar{v} + (3\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_3 + \beta_2 \bar{\beta}_3) \bar{v} + (3\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_2 + 2\bar{\beta}_1^3 \beta_3) \bar{v}' + (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1^3 \beta_2) \bar{v}'' + \bar{\beta}_1^2 \bar{v}''' \end{aligned}$$

und für jedes i ($2 \leq i \leq k$) gilt

$$(12) \quad v^{(i)} = \bar{\beta}_1^i \beta_{i+1} \bar{v} + \sum_{p=1}^i Q_p^i(\bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_{p+1}, \bar{\beta}_{p+1}) \bar{v}^{(i-p)} + \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{v}^{(i)},$$

wo Q_p^i homogene Polynome von $\beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_{p+1}, \bar{\beta}_{p+1}$ sind.

BEWEIS. Dies ist dem Beweis des Hilfssatzes 1 analog, wenn wir (8) bezüglich x derivieren. (Der Formel (9), bzw. (10) entspricht die Formel

$$\begin{aligned} v^{(i+1)} &= \bar{\beta}_1^{i+1} \beta_{i+2} \bar{v} + i \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{\beta}_2 \beta_{i+1} \bar{v} + \bar{\beta}_1^{i+1} \beta_{i+1} \bar{v}' + \\ &+ \sum_{p=1}^i \left[\bar{v}^{(i+1-p)} \bar{\beta}_1 Q_p^i + \bar{v}^{(i-p)} \sum_{q=2}^{p+1} \left(\frac{\partial Q_p^i}{\partial \beta_q} \bar{\beta}_1 \beta_{q+1} + \frac{\partial Q_p^i}{\partial \bar{\beta}_q} \bar{\beta}_{q+1} \right) + \bar{v}^{(i-p)} \frac{\partial Q_p^i}{\partial \bar{\beta}_1} \bar{\beta}_2 \right] + \\ &+ (i-1) \bar{\beta}_1^{i-2} \bar{\beta}_2 \bar{v}^{(i)} + \bar{\beta}_1^i \bar{v}^{(i+1)} \end{aligned}$$

bzw.

$$Q_1^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \bar{\beta}_1 Q_1^i + (i-1) \bar{\beta}_1^{i-2} \bar{\beta}_2,$$

$$Q_r^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \delta_{ri} \bar{\beta}_1^{i+1} \beta_{i+1} + \bar{\beta}_1 Q_r^i + \sum_{q=2}^r \left(\frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial \beta_q} \bar{\beta}_1 \beta_{q+1} + \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial \bar{\beta}_q} \bar{\beta}_{q+1} \right) + \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial \bar{\beta}_1} \bar{\beta}_2$$

$$(1 < r < i+1),$$

$$Q_{i+1}^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} i \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{\beta}_2 \beta_{i+1} + \sum_{q=2}^{i+1} \left(\frac{\partial Q_i^i}{\partial \beta_q} \bar{\beta}_1 \beta_{q+1} + \frac{\partial Q_i^i}{\partial \bar{\beta}_q} \bar{\beta}_{q+1} \right) + \frac{\partial Q_i^i}{\partial \bar{\beta}_1} \bar{\beta}_2.$$

Wir beweisen nachher den folgenden

Satz 1. Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion

$$L = L_1(u, u', \dots, u^{(k)}) \quad (u \neq 0)$$

bzw.

$$L = L_2(v, v', \dots, v^{(k)}) \quad (v \neq 0)$$

ist

$$L_1 = c_1 |u|$$

bzw.

$$L_2 = c_2 |v|^{-1},$$

wo c_1 und c_2 beliebige konstante Skalarenfaktoren sind.

BEWEIS. Die Gleichheit (6) geht in diesen Fällen in

$$(13.1) \quad L_1(\bar{u}, \bar{u}', \bar{u}'', \dots, \bar{u}^{(k)}) = |\beta_1| L_1(u, u', u'', \dots, u^{(k)})$$

bzw.

$$(13.2) \quad L_2(\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \dots, \bar{v}^{(k)}) = |\beta_1| L_2(v, v', v'', \dots, v^{(k)})$$

über. Es seien hier die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$ nach

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

gewählt, somit gelten

$$\bar{\beta}_1 = 1, \quad \bar{\beta}_2 = \dots = \bar{\beta}_k = 0, \quad \bar{\beta}_{k+1} = -\beta_{k+1}$$

(vgl. [1], S. 26., Korollar 3), und wir erhalten wegen (7) und (8), bzw. (11) und (12) die Gleichungen

$$(14.1) \quad L_1(u, u', \dots, u^{(k-1)}, u^{(k)} + \beta_{k+1} u) = L_1(u, u', \dots, u^{(k)})$$

bzw.

$$(14.2) \quad L_2(v, v', \dots, v^{(k-1)}, v^{(k)} - \beta_{k+1} v) = L_2(v, v', \dots, v^{(k)}).$$

Setzen wir jetzt in (14. 1)

$$\beta_{k+1} = -\frac{u^{(k)}}{u}$$

bzw. in (14. 2)

$$\beta_{k+1} = \frac{v^{(k)}}{v},$$

so folgt

$$(14.3) \quad L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, 0) = L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, u^{(k)})$$

bzw.

$$(14.4) \quad L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, 0) = L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, v^{(k)}),$$

d. h. die Funktion L_1 bzw. L_2 ist von ihren Veränderlichen $u^{(k)}$ bzw. $v^{(k)}$ unabhängig ($k \geq 1$). Nach k -maliger Wiederholung des Verfahrens, das aus (14. 1) bzw. (14. 2) zu (14. 3) bzw. zu (14. 4) geführt hat, können wir feststellen, daß L_1 bzw. L_2 allein von u bzw. v abhängt:

$$L_1 = L_1(u)$$

bzw.

$$L_2 = L_2(v).$$

Setzen wir diese Gestalt der Lagrange-Funktionen in (13. 1) bzw. (13. 2) ein, so bekommen wir

$$L_1(\beta_1 u) = |\beta_1| L_1(u)$$

bzw.

$$L_2(\beta_1^{-1} v) = |\beta_1| L_2(v),$$

und es folgt hieraus mit $\beta_1 = u^{-1}$ bzw. $\beta_1 = v$

$$(15.1) \quad L_1(u) = c_1 |u|, \quad (c_1 \stackrel{\text{df}}{=} L_1(1))$$

bzw.

$$(15.2) \quad L_2(v) = c_2 |v|^{-1}, \quad (c_2 \stackrel{\text{df}}{=} L_2(1)).$$

Mann kann sich leicht überzeugen, daß die Lagrange-Funktion (15. 1) bzw. (15. 2) mit beliebigem Skalarenfaktor c_1 bzw. c_2 der Forderung (13. 1) bzw. (13. 2) genügt.

Für die Struktur der Funktion L_3 gilt der folgende

Satz 2. Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion

$$L = L_3(u, u', \dots u^{(k)}, v, v', \dots v^{(k)}) \quad (v \neq 0)$$

ist

$$L_3 = L_3^0(u, u_1, u_2, \dots u_k, v),$$

wo

$$u_1 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx}(vu), \quad u_{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx}(vu_i) \quad (i = 1, 2, \dots k-1)$$

kovariante Vektorfelder sind, und die Funktion L_3^0 soll in ihren Veränderlichen im folgenden Sinne homogen sein:

$$(16) \quad L_3^0(tu, tu_1, tu_2, \dots, tu_k, t^{-1}v) = |t| L_3^0(u, u_1, u_2, \dots, u_k, v)$$

(wo $t \neq 0$, sonst aber t ein beliebiger Skalar ist).

BEWEIS. Die Funktion L_3 soll nach (6) der Funktionalgleichung

$$(17) \quad L_3(\bar{u}, \bar{u}', \dots, \bar{u}^{(k)}, \bar{v}, \bar{v}', \dots, \bar{v}^{(k)}) = |\beta_1| L_3(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(k)})$$

genügen, woraus man durch die Substitution

$$\beta_1 = 1, \beta_3 = \dots = \beta_k = \beta_{k+1} = 0,$$

d. h.

$$\bar{\beta}_1 = 1, \bar{\beta}_3 = \dots = \bar{\beta}_k = \bar{\beta}_{k+1} = 0$$

(vgl. [1], S. 26., Korollar 3) wegen der Hilfssätze 1 und 2 die Identität

$$(18) \quad L_3(u, u' + \beta_2 u, u'' + 3\beta_2 u', \dots, v, v' - \beta_2 v, v'' - \beta_2 v' + 2\beta_2^2 v, \dots) = L_3(u, u', \dots, v, v', \dots)$$

erhalten kann. Es sei in (18)

$$(19) \quad \beta_2 = \frac{v'}{v},$$

so folgen

$$u' + \beta_2 u = \frac{1}{v} u_1,$$

$$v' - \beta_2 v = 0,$$

bzw. (wegen

$$(20) \quad u' = \frac{1}{v} (u_1 - uv') \equiv \varphi_1(u, u_1, v, v'),$$

wo φ_1 Polynom von $u, u_1, \frac{1}{v}, v'$ ist) bezüglich $u'', \dots, u^{(k)}$ die folgenden Ausdrücke

$$(21) \quad \begin{cases} u'' = \varphi_2(u, u_1, u_1', v, v', v'') \\ \vdots \\ u^{(k)} = \varphi_k(u, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k-1)}, v, v', \dots, v^{(k)}) \end{cases}$$

(wo $\varphi_2, \dots, \varphi_k$ wieder Polynome von $u, u_1, \dots, u_1^{(k-1)}, \frac{1}{v}, v', \dots, v^{(k)}$ sind). Wir bekommen aus (18) (wegen (20) und (21)) eine Identität vom Typ

$$L_3 = L_3^*(u, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k-1)}, v, v', \dots, v^{(k-1)}, v^{(k)}).$$

Setzen wir diese Form von L_3 in (17) ein und wählen wir die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$ nach

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \beta_{k+1} = \frac{v^{(k)}}{v},$$

so kann man sehen, daß die Funktion L_3^* von ihrer separierten Veränderliche $v^{(k)}$ unabhängig ist:

$$L_3 = L_3^1(u, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k-1)}, v, v', \dots, v^{(k-1)}).$$

Mit Wiederholen unseres obigen Verfahrens gewinnen wir schrittweise die folgenden Ausdrücke bezüglich L_3 :

$$L_3 = L_3^{1*}(u, u_1, u_2, u_2', \dots, u_2^{(k-2)}, v, v', \dots, v^{(k-1)}),$$

$$L_3 = L_3^{2*}(u, u_1, u_2, u_2', \dots, u_2^{(k-2)}, v, v', \dots, v^{(k-2)});$$

$$\vdots$$

$$L_3 = L_3^{(k-1)*}(u, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, v, v'),$$

$$L_3 = L_3^0(u, u_1, u_2, \dots, u_k, v).$$

Wenn wir diese letzte Form von L_3 in (17) einsetzen und wir den Parameter β_1 nach

$$t \stackrel{\text{df}}{=} \beta_1 \quad (\neq 0, \text{sonst ein beliebiger Wert})$$

bezeichnen, so bekommen wir die Identität (16) als einzige Forderung bezüglich der Funktion L_3^0 , w. z. b. w.

Auf analoge Weise können wir die folgenden Sätze beweisen:

Satz 3. Die Lagrange-Funktion

$$L = L_4(u, u', \dots, u^{(k)}, u_x, u_x', \dots, u_x^{(k)})$$

ist, falls $u \neq 0$, eine invariante Funktion der folgenden Größen

$$u, u_x, \dots, u_k, \sigma_x, \sigma_x', \dots, \sigma_k,$$

wo

$$\sigma_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{u_x}{u}, \quad u_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sigma_x,$$

$$\sigma_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{u_x}{u}, \quad u_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sigma_x \quad (i=1, \dots, k-1)$$

ist ($u, u_x, \dots, u_k$ sind kovariante Vektorfelder, $\sigma_x, \dots, \sigma_k$ sind Skalarfelder).

Satz 4. Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion L_5 ist im Fall $v \neq 0$:

$$L_5 = L_5^0(v, v_x, v_x', \dots, v_k, \sum_x, \sum_x', \dots, \sum_k),$$

wo

$$\sum_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{v_x}{v}, \quad v_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sum_x,$$

$$\sum_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{v_x}{v}, \quad v_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sum_x \quad (i=1, \dots, k-1)$$

ist ($v_x, \dots, v_k$ sind kontravariante Vektorfelder, $\sum_x, \dots, \sum_k$ sind Skalarfelder),

und L_5^0 ist eine beliebige, in ihren Veränderlichen $v, v_x, v_{1x}, \dots, v_{kx}$ im folgenden Sinne homogene Funktion:

$$L_5^0(tv, tv_x, tv_{1x}, \dots, tv_{kx}, \sum_1 \dots \sum_k) = |t| L_5^0(v, v_x, \dots, \sum_k)$$

(t ist ein beliebiger, von Null verschiedener Skalar).

Wir beweisen hier nur den Satz 3, der Beweis des Satzes 4 kann man ähnlicherweise durchführen.

Die Funktion L_4 soll (nach (6)) die Gleichung

$$(22) \quad L_4(\bar{u}, \bar{u}', \dots, \bar{u}^{(k)}, \bar{u}_x, \bar{u}'_x, \dots, \bar{u}_x^{(k)}) = |\beta_1| L_4(u, u', \dots, u_x^{(k)})$$

befriedigen. Setzen wir hier

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\frac{u'}{u}, \quad \beta_3 = \dots = \beta_{k+1} = 0$$

ein, so erhalten wir an der linken Seite von (22) wegen

$$u_x = u \sigma_x, \quad u'_x = u' \sigma_x + u \sigma'_x, \dots, u_x^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^{(i)} \sigma_x^{(k-i)}$$

einen Ausdruck, der nur von $u, u', \dots, u^{(k)}, \sigma_x, u_x, u'_x, \dots, u_x^{(k-1)}$ abhängt:

$$L_4 = L_4^{1*}(u, u' \dots u^{(k)}, \sigma_x, u_x, u'_x, \dots, u_x^{(k-1)}).$$

Es sei jetzt L_4^{1*} in (22) eingesetzt, und es seien danach in (22) die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}$ nach

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \quad \beta_{k+1} = -\frac{u^{(k)}}{u}$$

gewählt, so kann man sehen, daß L_4 von $u^{(k)}$ unabhängig ist:

$$L_4 = L_4^1(u, u', \dots, u^{(k-1)}, \sigma_x, u_x, u'_x, \dots, u_x^{(k-1)}).$$

Nach $k-1$ -maligen Wiederholung dieses Verfahrens bekommen wir

$$L_4 = L_4^0(u, u_x, u_{2x}, \dots, u_{kx}, \sigma_x, \sigma_{2x}, \dots, \sigma_{kx}).$$

Die Funktion L_4^0 soll wieder der Gleichung (22) genügen:

$$L_4^0(\beta_1 u, \beta_1 u_x, \beta_1 u_{2x}, \sigma_x, \dots, \sigma_{kx}) = |\beta_1| L_4^0(u, u_x, \dots, \sigma_{kx}),$$

wo man den Wert $t = \beta_1 (\neq 0)$ beliebig wählen kann. Die Funktion L_4^0 ist folglich in ihren Veränderlichen $u, u_x, \dots, u_{kx}$ im folgenden Sinne homogen:

$$(23) \quad L_4^0(tu, tu_x, \dots, tu_{kx}, \sigma_x, \dots, \sigma_{kx}) = |t| L_4^0(u, \dots, \sigma_{kx})$$

($t \neq 0$). Umgekehrt, man kann einsehen, daß eine beliebig gewählte, im Sinne (23) homogene Funktion der Größen $u, u_x, \dots, u_x, \sigma_x, \dots, \sigma_x$ eine Lösung der Funktionalgleichung (22) ist.

Bemerkungen.

H. RUND hat in seiner Arbeit [22] (S. 245) die Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L_6(x, s_m, s'_m, s''_m)$$

als Beispiel untersucht, wo $s_m = s_m(x)$ ($m = 1, \dots, N$) Skalaren sind. Mit Hilfe der „Invarianzbedingung“

$$(24) \quad L_6(\bar{x}, \bar{s}_m, \bar{s}'_m, \bar{s}''_m) = |\beta_1| L_6(x, s_m, s'_m, s''_m)$$

(vgl. [22], (1. 6)) können wir zuerst einsehen, daß die Funktion L_6 von ihrer Veränderliche x unabhängig ist. (Wir wählen aus diesem Zwecke die Koordinatentransformation $\bar{x} = \bar{x}(x)$ nach

$$\bar{x} = x + \xi,$$

wo ξ ein beliebiger Wert ist, somit bekommen wir aus (24) wegen $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ die Beziehung

$$L_6(x + \xi, s_m, s'_m, s''_m) = L_6(x, s_m, s'_m, s''_m),$$

die zeigt, daß L_6 von ihrer Veränderliche x tatsächlich unabhängig ist.) Die Größen s'_m sind kovariante Vektorfelder

$$u_m \stackrel{\text{df}}{=} s'_m \quad (m = 1, \dots, N)$$

und L_6 besitzt die Form

$$L_6 = L_6(s_m, u_m, u'_m).$$

Es ist klar, daß unser Satz 3 auch im Falle gültig ist, in dem die Funktion L_4 auch von weiteren Skalarfelder S_m abhängt (das entsprechende Resultat wäre

$$L_4 = L_4^0(u, u_x, \dots, u_x, \sigma_x, \dots, \sigma_x, s_m),$$

wo die Funktion L_4^0 in ihren Veränderlichen $u, u_x, \dots, u_x$ im Sinne (23) homogen ist), folglich kann L_6 z. B. falls $u_1 \neq 0$ die allgemeinste Gestalt

$$L_6 = L_6^0(s_m, u_1, u_\gamma, u_{1\gamma}, \sigma_\gamma) \quad \left(\sigma_\gamma \stackrel{\text{df}}{=} (u_1)^{-1} u_\gamma, u_{1\gamma} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sigma_\gamma, \gamma = 2, \dots, N \right)$$

mit der Homogenitätsbedingung

$$L_6(s_m, tu_1, tu_\gamma, tu_{1\gamma}, \sigma_\gamma) = |t| L_6(s_m, u_1, \dots, \sigma_\gamma) \quad (t \neq 0)$$

besitzen.

§ 2. Über Lagrange-Funktionen, die Komitanten kovarianter Vektorfelder in X_n sind

Es sei ein System von kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ ($\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$) mit seinen partiellen Ableitungen $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$ über einem Gebiet $G (\subseteq X_n, n > 1)$ erklärt und wir stellen uns zuerst die Aufgabe aus diesem System von kovarianten Vektorfeldern eine Differentialkomitante erster Ordnung $\mathcal{L}_\lambda$ ($\lambda = 1, \dots, N$) aufzubauen. Es ist also $\mathcal{L}_\lambda$ von der Form:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}), \quad (\lambda = 1, \dots, N)$$

und da $\mathcal{L}_\lambda$ ein Objekt erster Klasse ist, besteht:

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i).$$

Wir werden im folgenden Λ_λ als gegebenes, Φ_λ als gesuchtes Funktionensystem betrachten. Das System Φ_λ soll nach (4) in einem beliebigen fixen Punkt $x_i^0 (\in G)$ der Funktionalgleichung

$$(25) \quad \Phi_\lambda(B_k^i \overset{\alpha}{u}_k, B_k^i B_j^m \overset{\alpha}{u}_{k,m} + B_{ij}^k \overset{\alpha}{u}_k) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}); B_j^i)$$

genügen. Natürlich sollen die Funktionen Λ_λ unter anderen auch die *Identitätsbedingung* (vgl. [1], S. 12.)

$$(26) \quad \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu; \delta_j^i) = \mathcal{L}_\lambda$$

befriedigen, wo δ_j^i das Kronecker-Symbol ist.

Setzen wir noch die lineare Unabhängigkeit der Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ über G (d. h. die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\overset{\alpha}{u}_i(\xi_0)$ in jedem einzelnen Punkt ξ_0 von G) voraus.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\overset{\beta}{T}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\beta}{u}_{[i,j]}, \quad \overset{\beta}{t}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\beta}{u}_{(i,j)}$$

ein und wir stellen fest, daß $\overset{\beta}{T}_{ij}$ ein rein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist, bzw. für $\overset{\beta}{t}_{ij}$ die Relationen

$$(27) \quad \overset{\beta}{t}_{ij} = B_i^k B_j^m \overset{\beta}{t}_{km} + B_{ij}^m \overset{\beta}{u}_m$$

gelten.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 5. Alle Objekte $\mathcal{L}_\lambda$ erster Klasse, die Differentialkomitanten erster Ordnung des Systems von linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ ($\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$) sind, müssen algebraische Komitanten der Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ und der nach

$$\overset{\beta}{T}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}$$

definierten Tensorfelder sein.

BEWEIS. Es folgt aus den Relationen

$$\overset{\alpha}{u}_{i,j} = \overset{\alpha}{T}_{ij} + \overset{\alpha}{t}_{ij}; \quad \overset{\alpha}{T}_{ij} = \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}, \quad \overset{\alpha}{t}_{ij} = \overset{\alpha}{u}_{(i,j)},$$

daß wir die Größen $\overset{\alpha}{T}_{ij}$, $\overset{\alpha}{t}_{ij}$ in dem Funktionensystem Φ_λ statt $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$ als neue Veränderlichen auffassen können:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij})$$

und das Funktionalgleichungssystem (25) geht wegen (27) in

$$(28) \quad \Phi_\lambda(B_i^k \overset{\alpha}{u}_k; B_i^k B_j^m \overset{\alpha}{T}_{km}; B_i^k B_j^m \overset{\alpha}{t}_{km} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}); B_j^i)$$

über. Setzen wir in (28) die Werte

$$B_j^i = \delta_j^i$$

ein, so folgt aus (28) wegen (26) die Identität

$$(29) \quad \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m) = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}),$$

wo $B_{ij}^m = B_{ji}^m$ beliebig gewählt werden kann.*)

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\overset{\alpha}{u}_i = \overset{\alpha}{u}_i(x_0)$, hat das algebraische Gleichungssystem

$$\overset{\alpha}{t}_{ij} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m = 0$$

bei jedem festen Wertepaar i, j bezüglich der „Unbekannten“ B_{ij}^m mindestens eine Lösung:

$$(30) \quad B_{ij}^m = \overset{\circ}{B}_{ij}^m,$$

Setzen wir diese Werte von B_{ij}^m in (29) ein, so bekommen wir die Identität

$$(30.1) \quad \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; 0) = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}),$$

die eben den Satz 5 beweist.

Im speziellen erhielten wir auch den

Satz 6. Jede Lagrange-Funktion von der Gestalt

$$L = L(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j})$$

ist eine algebraische Komitante der Größen $\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}$ ($\alpha = 1, \dots, p$, $\overset{\alpha}{u}_i$ sind linear unabhängige Vektorfelder).

*) Der hier folgende Beweis des Satzes 5 stammt von Herrn A. MOÓR; der ursprüngliche Beweis des Verfassers war wesentlich komplizierter.

Nimmt man an, daß die Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ ($\alpha = 1, \dots, p$) mit Hilfe eines Systems von Skalarfelder $\overset{\alpha}{\sigma}$ als

$$\overset{\alpha}{u}_i \stackrel{\text{df}}{=} \overset{\alpha}{\sigma}_{,i} \quad (\alpha = 1, \dots, p, i = 1, \dots, n, p \leq n)$$

erklärt sind, vorausgesetzt, daß die Funktionen $\overset{\alpha}{\sigma} = \overset{\alpha}{\sigma}(x)$ über G stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben, so folgen aus dieser letzten Voraussetzung die Identitäten

$$\overset{\alpha}{u}_{[i,j]} = 0,$$

und die Sätze 5, 6 lauten in diesem Fall folgendermaßen:

Satz 7. Alle Differentialkomitanten $\mathcal{L}_\lambda$ zweiter Ordnung der über G zweimal stetig-differenzierbaren Skalarfelder $\overset{\alpha}{\sigma}$ ($\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$; $\overset{1}{\sigma}_{,i}, \dots, \overset{p}{\sigma}_{,i}$ sind linear unabhängige Vektorfelder) sind algebraische Komitanten der Größen $\overset{\alpha}{\sigma}, \overset{\alpha}{\sigma}_{,i}$, vorausgesetzt, daß $\mathcal{L}_\lambda$ ein Objekt erster Klasse (z. B. eine Lagrange-Funktion) ist.

Als Folgerung bekamen wir auch den folgenden Satz (bezüglich der Terminologie s. z. B. [22]):

Satz 8. Es gibt kein homogenes Variationsproblem zweiter Art, welches durch ein solches System von Skalarfelder $\overset{\alpha}{\sigma}$ ($\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$) bestimmt ist, wo $\overset{\alpha}{\sigma}_{,i}$ ($\alpha = 1, \dots, p$) linear unabhängige Vektorfelder sind.

* * *

Es sei von nun an die Gleichheit $p = n$ vorausgesetzt.

Wir können in diesem Fall auf einfachere Weise (vgl. [12], Beweis des Satzes 1) zur Ergebnis gelangen. Wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \dots & u_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ n & \dots & n \\ u_1 & \dots & u_n \end{vmatrix} \neq 0$$

gibt es (in jedem Punkt von G) ein kontravariantes n -Bein v^i_α ($\alpha = 1, \dots, n$), das nach den Relationen

$$(31) \quad v^i_\alpha u_i = \delta^\beta_\alpha, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{\alpha=1}^n v^i_\alpha u_j^\alpha = \delta^i_j$$

bestimmt ist, folglich existieren auch die partiellen Ableitungen $v^i_{\alpha,j}$ über G . Die Ableitungen $\overset{\alpha}{u}^i_{,j}$ und $v^i_{\alpha,j}$ erfüllen die Relationen

$$(32) \quad \overset{\alpha}{u}_{k,m} = -\overset{\alpha}{u}_q v^q_{\beta,m} \overset{\beta}{u}_k,$$

die man aus (31) leicht herleiten kann. Wir bemerken, daß die Größen

$$(33) \quad \sum_{\alpha\beta}^{\gamma} \stackrel{\text{df}}{=} u_i^{\gamma} v_{[\alpha}^k v_{\beta]}^i{}_{,k}$$

die Rotationskoeffizienten von Ricci (s. [24], S. 171.), Skalaren sind.

Das Funktionalgleichungssystem (25) kann man nach den oben gesagten folgendermaßen auflösen. Setzen wir die Werte

$$B_j^i = v_j^i, \quad B_{ij}^q = v_{(i}^m v_{j),m}^q$$

in (25) ein, so bekommen wir wegen (31) und (32)

$$B_i^k u_k^z = \delta_i^z,$$

$$B_i^k B_j^m u_{k,m}^z + B_{ij}^q u_q^z = -v_i^k v_j^m u_q^{\beta} v_{\beta,m}^q u_k^z + u_q^z v_{(i}^m v_{j),m}^q = -u_q^z v_{[i}^m v_{j],m}^q = -\sum_{ij}^z,$$

dementsprechend geht (25) in

$$(34) \quad \Phi_{\lambda}^*(\sum_{ij}^z) = \Lambda_{\lambda}(\Phi_{\mu}(u_i^z, u_{i,j}^z); v_j^i)$$

$(\Phi_{\lambda}^*(\sum_{ij}^z) \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_{\lambda}(\delta_i^z, -\sum_{ij}^z))$ über. Wir können die Funktionenwerte Φ_{λ} aus (34) leicht ausdrücken. Die Transformationsformel

$$\bar{\mathcal{L}}_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}(\mathcal{L}_{\mu}, B_j^i)$$

des Objektes $\mathcal{L}_{\lambda}$ soll die Forderung

$$(35) \quad \Lambda_{\lambda}(\Lambda_{\mu}(\mathcal{L}_{\gamma}^0, X_j^i), Y_j^i) = \Lambda_{\lambda}(\mathcal{L}_{\mu}^0, X_k^i Y_j^k)$$

(die „fundamentale Funktionalgleichung“ der Transformationsformel, s. [1], S. 12.) für alle Werte $\mathcal{L}_{\mu}^0$ des Objektes $\mathcal{L}_{\mu}$ und für alle reguläre Matrizen $(X_j^i), (Y_j^i)$ befriedigen. Es sei in (35)

$$\mathcal{L}_{\mu}^0 = \Phi_{\mu} = \Phi_{\mu}(u_i^z; u_{i,j}^z), \quad X_j^i = v_j^i, \quad Y_j^i = u_j^i$$

eingesetzt, so kann man (wegen (26) und (34)) die Gültigkeit der Identitäten

$$(36) \quad \Phi_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}(\Phi_{\mu}^*(\sum_{ij}^z), u_j^i)$$

leicht einsehen.

Nehmen wir an, daß Φ_{μ}^* in (36) ein beliebig-gewähltes Funktionensystem der Rotationskoeffizienten $\sum_{ij}^z$ ist; wir behaupten, daß (36) die allgemeinste Form der Lösungen des Funktionalgleichungssystems (25) darstellt. Die Größen

$$\sum_{\mu} \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_{\mu}^*(\sum_{ij}^z)$$

sind nämlich Skalaren, folglich geht (25), falls

$$\Phi_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}(\sum_{\mu}, u_j^i)$$

ist, in

$$\Lambda_{\lambda}(\sum_{\mu}, B_j^i u_k^i) = \Lambda_{\lambda}(\Lambda_{\mu}(\sum_v, u_j^i), B_j^i)$$

über, die wegen der Gleichung (35) eine Identität ist, w. z. b. w.

Die erhaltenen Resultate können wir im folgenden Satz formulieren.

Satz 9. Es sei ein System von linear-unabhängigen kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ ($\alpha=1, \dots, n$) mit seinen partiellen Ableitungen $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$ über einem Gebiet des Raumes X_n gegeben, und v^i bezeichne das zu $\overset{\alpha}{u}_i$ adjungierte n -Bein. Die allgemeinste Form der Differentialkomitanten $\mathcal{L}_\lambda$ erster Ordnung und erster Klasse der Felder $\overset{\alpha}{u}_i$ ist

$$(36) \quad \mathcal{L}_\lambda = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^*(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}), \overset{i}{u}_j),$$

wo Λ_λ nach der Transformationsformel von $\mathcal{L}_\lambda$

$$\overline{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

bestimmt ist, die Größen $\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}$ die (nach (33) bestimmte) Rotationskoeffizienten des n -Beins $\overset{\alpha}{u}_i$ sind und Φ_λ^* sind beliebige Funktionen.

Bemerkungen

1. Wir haben in [14] die Differentialkomitanten erster Ordnung von zwei linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern charakterisiert, die Objekte erster Klasse sind. Der Satz 5 bietet eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Resultates.

2. Die Ergebnisse der Sätze 5 und 9 sind anscheinend unverträglich, wenn wir die Behauptung des Satzes 5 im Falle $p=n$ beachten. In der Tat ist (36) (mit Vertauschung ihrer Seiten) im Fall $p=n$ eine Relation der Form (30. 1), nämlich kann man die Beziehungen

$$\sum_{\beta\gamma} \overset{\alpha}{u}_{\beta\gamma} = v^k v^m \overset{\alpha}{u}_{[k,m]} = v^k v^m T_{km}^\alpha$$

aus (31), (32), (33) ableiten.

3. Mit den Voraussetzungen des Satzes 9 können wir feststellen, daß die Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}) \quad (\det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0)$$

die Form

$$L = |\det(\overset{\alpha}{u}_i)| \Phi^*(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij})$$

hat, wo Φ^* eine willkürliche Funktion der Skalare $\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}$ ist.

4. Die Formel (36) gibt auch die tensoriellen Differentialkomitanten erster Ordnung der Felder $\overset{\alpha}{u}_i$ ($\det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0$) in der Form

$$T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = C_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p}(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}) v_{a_1}^{i_1} \dots v_{a_p}^{i_p} u_{j_1}^{b_1} \dots u_{j_p}^{b_p}$$

wieder ($C_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p}(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij})$ bezeichnet ein beliebiges Funktionensystem der Skalare $\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}$), somit können wir die Behauptung des Satzes 9 als eine Verallgemeinerung des Satzes 2 von [12] auffassen.

5. Der Satz 9 gibt eine Verallgemeinerung auch einiger der Ergebnisse von M. KUCHARZEWSKI ([9], [10], [11]) und A. ZAJTZ ([28], S. 43—45.), die sich auf algebraische Komitanten eines Systems von rein kovarianten, bzw. rein kontravarianten Vektoren beziehen (s. auch der folgende Satz 10).

Aus dem Satz 9 können wir die Gültigkeit des folgenden Satzes einsehen:

Satz 10. Es sei ein System von linear unabhängigen kontravarianten Vektorfeldern v^i ($\alpha=1, \dots, n$) mit seinen partiellen Ableitungen $v^i_{,j}$ über einem Gebiet des X_n gegeben, und $\bar{u}_i$ bezeichne das zu v^i adjungierte n -Bein. Alle Differentialkomitanten $\mathcal{L}_\lambda$ erster Ordnung der Felder v^i haben die Gestalt

$$\mathcal{L}_\lambda = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^*(\sum_{ij}^\alpha), u_j^i),$$

die Objekte erster Klasse sind

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i).$$

(Die Skalargrößen $\sum_{ij}^\alpha$ — die Rotationskoeffizienten des n -Beines v^i — sind nach (33) bestimmt und Φ_λ^* bezeichnen beliebig gewählte Funktionen von $\sum_{ij}^\alpha$).

(Zu dem Beweis dieses Satzes ist es hinreichend zu beachten, daß die Felder v^i ein System von kovarianten Vektorfeldern $\bar{u}_i$ nach (31) (wegen $\det(v^i) \neq 0$) ein System von kovarianten Vektorfeldern $\bar{u}_i$ nach (31) (wegen $\det(v^i)$) Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder v^i , u. u.

$$\mathcal{L}_\lambda = \Psi_\lambda(v^i, v^i_{,j}),$$

dann ist $\mathcal{L}_\lambda$ nach (31) und (32) eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder $\bar{u}_i$,

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

usw.)

Zum Schluß geben wir noch eine Bemerkung.

Gibt man z. B. die Definition der Lagrange-Funktion L bezüglich der Felder $\bar{u}_i$ nach

$$L = L(x^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

an — vorausgesetzt, daß $L(x^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$ eine zu (24) analoge Invarianzbedingung

$$(37) \quad L(\bar{x}^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j}) = |\det(B_j^i)| L(x^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

in allen Punkte x_0^i von G befriedigt —, so soll L wieder von den Veränderlichen x_0^i unabhängig sein. Setzen wir nämlich in (37) $\bar{x}^i = x_0^i + c^i$ (c^i sind beliebige Werte, $i=1, \dots, n$), so geht (37) wegen $B_j^i = \delta_j^i$, $B_{jk}^i = 0$ in die Identität

$$L(x_0^i + c^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j}) = L(x_0^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

über, die eben die behauptete Unabhängigkeit beweist.

§ 3. Lagrange-Funktionen des metrischen Grundtensors und gewisser Vektorfelder

Es sei ein kovariantes Tensorfeld g_{ij} , ein System von kovarianten und ein System von kontravarianten Vektorfeldern ($\overset{x}{u}_i$ und $\overset{x}{v}^i, \alpha = 1, \dots, N$) über $G(\subseteq X_n, n > 1)$ gegeben. Wir setzen voraus, daß der Tensor g_{ij} den Bedingungen (38)

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad \det(g_{ij}) \neq 0$$

in jedem Punkt von G genügt, und $g_{ij} = g_{ij}(x)$, $\overset{x}{u}_i = \overset{x}{u}_i(x)$, $\overset{x}{v}^i = \overset{x}{v}^i(x)$ Funktionen der Klasse $C_2(G)$ sind. Aus diesen Forderungen folgen u. a. die Existenz der Christoffelschen Symbole erster und zweiter Art:

$$\Gamma_{ijk} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

bzw.

$$\Gamma_{ij}^k \stackrel{\text{df}}{=} g^{kr} \Gamma_{ijr}$$

(wo g^{jr} der durch die Gleichungen $g^{jr} g_{ri} = \delta_i^j$ definierte kontravariante Tensor ist), die durch die symmetrischen Übertragungsparameter Γ_{ij}^k bestimmten kovarianten Ableitungen

$$\overset{x}{u}_{i;j} \stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{u}_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \overset{x}{u}_k, \quad \overset{x}{v}^i_{;j} \stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{v}^i_{,j} + \Gamma_{jk}^i \overset{x}{v}^k,$$

ferner folgt die Existenz des kovarianten Krümmungstensors

$$R_{imkj} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} (g_{ij,mk} + g_{mk,ij} - g_{ik,mj} - g_{mj,ik}) + \Gamma_{mk}^p \Gamma_{ijp} - \Gamma_{mj}^p \Gamma_{ikp}.$$

Der Tensor R_{imkj} befriedigt die folgenden bekannten Symmetrierelationen (s. z. B. [7], S. 21.)

$$(39) \quad R_{imkj} = -R_{mikj} = -R_{imjk} = R_{kjim},$$

$$(40) \quad R_{imkj} + R_{ikjm} + R_{ijmk} = 0.$$

Wir werden uns im folgenden mit den Differentialkomitanten (höchstens) zweiter Ordnung der Objekte $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i$ beschäftigen, welche Objekte erster Klasse sind. Als Folgerungen ergeben sich auch Ergebnisse für die algebraische Form der Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

$$L = L_2(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{u}_{i,jk}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}^i_{,j}, \overset{x}{v}^i_{,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

* * *

Für die Differentialkomitanten zweiter Ordnung von g_{ij} , die Objekte erster Klasse sind, ist der folgende Satz gültig:

Satz 11. Ist das Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ ($\lambda = 1, \dots, L$) erster Klasse eine Differentialkomitante zweiter Ordnung des Tensorfeldes g_{ij} mit den Eigenschaften (38)

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

so ist es eine algebraische Komitante der Tensorfelder g_{ij} und R_{imkj} .

BEWEIS. Die Identitäten (4) werden jetzt die Form

$$(41) \quad \Phi_\lambda(\bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij,k}, \bar{g}_{ij,km}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}), B_j^i)$$

haben, wo

$$(42) \quad \begin{cases} \bar{g}_{ij} = B_i^p B_j^q g_{pq}, \bar{g}_{ij,k} = B_i^p B_j^q B_k^r g_{pq,r} + (B_{ik}^p B_j^q + B_i^p B_{jk}^q) g_{pq}, \\ \bar{g}_{ij,km} = B_i^p B_j^q B_k^r B_m^s g_{pq,rs} + (B_{im}^p B_j^q B_k^r + B_{jm}^q B_i^p B_k^r + B_{km}^r B_i^p B_j^q + B_{ik}^r B_j^q B_m^p + \\ + B_{jk}^q B_i^p B_m^r) g_{pq,r} + (B_{ik}^p B_{jm}^q + B_{im}^p B_{jk}^q) g_{pq} + (B_{ikm}^p B_j^q + B_{jkm}^q B_i^p) g_{pq} \end{cases}$$

sind. Wir werden die Identitäten (41) sofort in einem fixen Punkt x_0^i von G betrachten, somit wird (41) ein Funktionalgleichungssystem mit freien Parametern $B_j^i, B_{jk}^i, B_{jkm}^i$. Durch die Substitution

$$B_j^i = \delta_j^i, \quad B_{jk}^i = 0,$$

wobei $B_{jkm}^i (= B_{(jkm)}^i)$ beliebige Werte sind, ergibt sich unter Beachtung von (42) und der dem (26) entsprechenden Eigenschaften der in (41) vorkommenden Funktionen Λ_λ :

$$(43) \quad \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km} + B_{ikm}^p g_{pj} + B_{jkm}^p g_{pi}) = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

Es sei nun

$$B_{ikm}^p = \frac{1}{6} g^{pj} (g_{ik,jm} + g_{im,jk} + g_{km,ij} - 2(g_{ij,km} + g_{jk,im} + g_{jm,ik})),$$

somit geht (43) in

$$(44) \quad \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, T_{ijkm}) = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

über, wo

$$(45) \quad T_{ijkm} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3} (R_{ikmj} + R_{imkj}) + \frac{1}{6} (\Gamma_{kj}^p \Gamma_{im}^p + \Gamma_{mj}^p \Gamma_{ik}^p - 2\Gamma_{km}^p \Gamma_{ij}^p)$$

ist.

Es sei der Tensor $\bar{R}_{imkj}^*$ nach

$$(46) \quad \bar{R}_{imkj}^* \stackrel{\text{df}}{=} R_{ikmj} + R_{imkj}$$

definiert, d. h. (mit Anwendung von (39) und (40))

$$(47) \quad R_{imkj} = \frac{1}{3} (2\bar{R}_{imkj}^* + \bar{R}_{ikjm}^*),$$

dann sieht man aus (44), (45), (46), (47), daß Φ_λ nur von $g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj}$ abhängt:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj}).$$

Das Funktionalgleichungssystem (41) wird dementsprechend wegen

$$(48) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \bar{B}_p^i B_j^q B_k^r \Gamma_{qr}^p + \bar{B}_p^i B_{jk}^p,$$

(42) und auf Grund des Tensorcharakters von R_{imkj} durch die Substitution

$$B_j^i = \delta_j^i$$

die Form

$$(49) \quad \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k} + B_{ik}^p g_{pj} + B_{jk}^p g_{ip}, \Gamma_{jk}^i + B_{jk}^i, R_{imkj}) = \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj})$$

haben, wo $B_{jk}^i = B_{kj}^i$ beliebig gewählte Größen sind. Nehmen wir jetzt (s. [16], Beweis der Sätze 2, 4, 5, 6) für B_{jk}^i die Werte

$$B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i,$$

so bekommen wir wegen

$$g_{ij,k} + \Gamma_{ik}^p g_{pj} + \Gamma_{jk}^p g_{ip} = 0$$

die Identitäten

$$\Phi_\lambda^1(g_{ij}, 0, 0, R_{imkj}) = \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj}),$$

d. h. $\mathcal{L}_\lambda (= \Phi_\lambda = \Phi_\lambda^1)$ hängt allein von g_{ij} und R_{imkj} ab, w. z. b. w.

Aus dem Beweis dieses Satzes folgt auch der folgende

Satz 12. *Es gibt keine Differentialkomitante erster Ordnung und erster Klasse des Tensorfeldes g_{ij} ($= g_{ji}$, $\det(g_{ij}) \neq 0$), die von den partiellen Ableitungen $g_{ij,k}$ von g_{ij} in expliziter Weise abhängt.*

Die Sätze 11, 12 gelten natürlich auch für Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

bzw.

$$L = L_2(g_{ij}, g_{ij,k})$$

ohne irgendwelche Regularitätsannahmen bezüglich der Funktionen L_1 bzw. L_2 . Deswegen können wir diese Sätze für L_1 bzw. L_2 auch als Verallgemeinerungen gewisser Sätze der allgemeinen Relativitätstheorie auffassen (s. z. B. [19], [20], [21], [22], [25]), die man zu den Rechnungen mit Lagrange-Hamiltonschen Ableitungen üblich zugrunde legt (s. z. B. [2], [3], [4], [5]), und welche von E. Noether ([18], s. noch [26], [27]) herrühren.

Die Funktion $\sqrt{|g|}$ ($g \stackrel{\text{df}}{=} \det(g_{ij})$) bildet eine Weylsche Dichte vom Gewichte +1, die über G wegen (38) nirgendswo verschwindet. Wenn $L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$ eine Lagrange-Funktion ist, so können wir nach

$$\sigma \stackrel{\text{df}}{=} |g|^{-\frac{1}{2}} L_1$$

ein Skalarfeld erklären, das natürlich wieder Differentialkomitante zweiter Ordnung des Feldes g_{ij} ist:

$$\sigma = \sigma(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

folglich gilt die Behauptung des Satzes 11 auch für σ :

$$\sigma = \sigma^*(g_{ij}, R_{imkj}).$$

Um die allgemeinste Form der Lagrange-Funktionen der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

zu bestimmen, genügt es demgemäß die allgemeinste Form der Skalarkomitanten zweiter Ordnung des Feldes g_{ij} klarzustellen. Zur Zeit beschäftigen sich M. LORENS (Katowice, s. [29]), A. ZAJTZ (Krakow) (dem Wissen nach des Verfassers) mit dem letzteren Problem. Wir weisen an dieser Stelle noch auf die Resultate von M. A. MCKIERNAN and H. RICHARDS ([15]) hin.

Gehen wir zur Untersuchung der Differentialkomitanten erster Klasse der Form

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}, v_{\alpha}^i, v_{\alpha,j}^i, v_{\alpha,jk}^i, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

über. Bekanntlich bilden

$$t_{ij}^{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} u_{i;j}^{\alpha}, \quad t_j^i \stackrel{\text{df}}{=} v_{\alpha;j}^i,$$

wo das Semikolon die kovariante Ableitung bezeichnet, bzw.

$$t_{ijk}^{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} t_{ij;k}^{\alpha}, \quad t_{jk}^i \stackrel{\text{df}}{=} t_{j;k}^i$$

Tensorfelder der Valenz (0, 2), (1, 1), bzw. (0, 3), (1, 2), wodurch wir die partiellen Ableitungen von $u_i^{\alpha}, v_{\alpha}^i$ erster bzw. zweiter Ordnung nach

$$(50) \quad \begin{cases} u_{i,j}^{\alpha} = t_{ij}^{\alpha} + \Gamma_{ij}^p u_p^{\alpha}, \\ u_{ij,k}^{\alpha} = t_{ijk}^{\alpha} + \Gamma_{ij}^p t_{pk}^{\alpha} + \Gamma_{ik}^p t_{pj}^{\alpha} + \Gamma_{jk}^p t_{ip}^{\alpha} + (\Gamma_{ij,k}^p + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{qk}^p) u_q^{\alpha}, \\ v_{\alpha,j}^i = t_j^i - \Gamma_{jp}^i v_p^{\alpha}, \\ v_{\alpha,j,k}^i = t_{jk}^i + \Gamma_{jk}^p t_p^i - \Gamma_{pk}^i t_j^p - \Gamma_{jp}^i t_k^p - (\Gamma_{jp,k}^i - \Gamma_{jq}^i \Gamma_{kp}^q) v_p^{\alpha} \end{cases}$$

darstellen können. Diese Formeln zeigen, daß die partiellen Ableitungen $u_{i,j}^{\alpha}, u_{i,jk}^{\alpha}, v_{\alpha,j}^i, v_{\alpha,jk}^i$ durch die Tensorfelder $t_{ij}^{\alpha}, t_{ijk}^{\alpha}, t_j^i, t_{jk}^i, g_{ij}$ und durch die partiellen Ableitungen $g_{ij,k}, g_{ij,km}$ des Tensorfeldes g_{ij} vollständig bestimmt sind. Auf Grund dieser Relationen folgt:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda^*(u_i, t_{ij}, t_{ijk}, v_{\alpha}^i, t_j^i, t_{jk}^i, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

Die Funktionen Φ_λ^* sollen das den Identitäten (41) entsprechendes Relationssystem

$$\Phi_\lambda^*(\overline{u_i}, \overline{t_{ij}}, \dots, \overline{g_{ij,km}}) = A_\lambda(\Phi_\mu^*(u_i, t_{ij}, \dots, g_{ij,km}), B_j^i)$$

(auch in einem beliebigen gewählten fixen Punkt x_0^i von G) erfüllen, aus welchen wir (schrittweise folgend den Beweis des Satzes 11) die Gültigkeit des folgenden Satzes einsehen können:

Satz 13. Jede Differentialkomitante $\mathcal{L}_\lambda$ zweiter Ordnung und erster Klasse der Objektfelder $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i, g_{ij}$ ist eine algebraische Komitante der Größen

$$\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{u}_{i;jk}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, \overset{x}{v}_{;jk}^i, g_{ij}, R_{imkj}.$$

Der Beweis ist wesentlich einfacher, wenn das Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ eine Differentialkomitante erster Ordnung (und erster Klasse) der obenerwähnten Felder ist:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, g_{ij}, g_{ij,k}).$$

Die zu (41) analoge Identität ist in diesem Fall

$$\Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, \bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij,k}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{x}{u}_i, \dots, g_{ij,k}), B_j^i),$$

woraus man das Ergebnis

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^{**}(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{t}_{ij}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{t}_j^i, g_{ij}),$$

mit Hilfe der Substitution $B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i$, leicht herleiten kann. Somit gilt der

Satz 14. Jedes Objekt erster Klasse, das eine Differentialkomitante erster Ordnung der Größen $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i, g_{ij}$ ist, muß eine algebraische Komitante der Größen $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, g_{ij}$ sein.

Es sei schließlich vorausgesetzt, daß ein Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ erster Klasse

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der über G linear unabhängigen kovarianten Vektorfelder $\overset{x}{u}_i$ ($\alpha = 1, \dots, n$, $\det(\overset{x}{u}_i) \neq 0$) und des metrischen Tensorfeldes g_{ij} ($=g_{ji}$, $\det(g_{ij}) \neq 0$) ist:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{u}_{i;jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

Nach dem Satz 13 soll $\mathcal{L}_\lambda$ die Gestalt

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda^1(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{u}_{i;jk}, g_{ij}, R_{imkj})$$

haben, wo die Funktionen Φ_λ^1 in allem Punkt x_0^i von G das Funktionalgleichungssystem

$$(51) \quad \Phi_\lambda^1(B_i^r \overset{x}{u}_r, B_i^r B_j^s \overset{x}{u}_{r;s}, \dots, B_i^r B_m^s B_k^t B_j^u R_{rstu}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^1(\overset{x}{u}_i, \dots, R_{imkj}); B_j^i)$$

befriedigen. Setzen wir hier die Werte B_j^i nach

$$B_j^i = \overset{x}{v}_j^i$$

(v^i_α bezeichnet wieder das zu $\bar{u}_i$ adjungierte n -Bein), so folgen aus (51) die Identitäten

$$(52) \quad \Phi_\lambda^*(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, Q_{imkj}) = A_\lambda(\Phi_\mu^1, v^i_j),$$

($\Phi_\lambda^*(\bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj}) \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_\lambda^1(\delta_i^\alpha, \bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj})$), wo die Grössen $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, Q_{imkj}$ nach

$$(53) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} v^r_i v^s_j \bar{u}_{r;s}, & \bar{\sigma}_{ijk} \stackrel{\text{df}}{=} v^r_i v^s_j v^t_k \bar{u}_{r;st}, \\ \gamma_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} v^r_i v^s_j g_{rs}, & Q_{imkj} \stackrel{\text{df}}{=} v^r_i v^s_m v^t_k v^u_j R_{rstu} \end{cases}$$

Skalarfelder sind. Das für Φ_μ^1 implizite Gleichungssystem (52) kann man auf ähnliche Weise auflösen, wie wir aus (34) zu (36) gelangt sind. Das Ergebnis ist

$$(54) \quad \Phi_\lambda^1 = A_\lambda(\Phi_\mu^*(\bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj}); \bar{u}_j^i)$$

und wir können uns wieder leicht überzeugen, daß (54) mit beliebig gewähltem Funktionensystem Φ_λ^* eine Lösung des Gleichungssystems (51) darstellt.

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 15. Die allgemeinste Form der Differentialkomitanten $\mathcal{L}_\lambda$ zweiter Ordnung der kovarianten Vektorfelder $\bar{u}_i$ ($\alpha=1, \dots, n$, $\det(\bar{u}_i) \neq 0$) und des Tensorfeldes g_{ij} ($=g_{ji}$, $\det(g_{ij}) \neq 0$), die Objekte erster Klasse mit den Transformationsformeln

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = A_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

sind, ist

$$\mathcal{L}_\lambda = A_\lambda(\Phi_\mu^*(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, Q_{imkj}); \bar{u}_j^i),$$

wo Φ_λ^* beliebige Funktionen der Skalarfelder $\sigma_{ij}, \dots, Q_{imkj}$ bedeuten ($\bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj}$ sind nach (53) erklärt und v^i_α bezeichnet das zu $\bar{u}_i$ adjungierte n -Bein).

Wir bemerken, daß man die Skalare $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}$ mit Hilfe von $\sum_{p\gamma} \bar{\sigma}_{p\gamma}$ und mit dem Tensor

$$T_{jk}^i \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma_{jk}^i - v^i_\alpha \bar{u}_{(j,k)}^\alpha$$

nach

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{ij}^\alpha \bar{u}_p^\alpha v^q_i v^r_j T_{qr}^p,$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ijk} = & v^p_k \sum_{ij,p}^\alpha \bar{u}_p^\alpha + \sum_{ip}^\alpha \sum_{jk}^p + \sum_{pj}^\alpha \sum_{ik}^p - \sum_{ip}^\alpha \bar{u}_q^p v^r_j v^s_k T_{rs}^q - \sum_{pj}^\alpha \bar{u}_q^p v^r_i v^s_k T_{rs}^q - \\ & - \sum_{pk}^\alpha \bar{u}_q^p v^r_i v^s_j T_{rs}^q + \bar{u}_p^\alpha v^q_i v^r_j v^s_k T_{ms}^p T_{qr}^m - \bar{u}_p^\alpha v^q_i v^r_j v^s_k T_{qr;s}^p \end{aligned}$$

ausdrücken kann.

Bemerkungen

1) Ist L eine Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L_1(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha,j}, \overset{i}{v}_{\alpha,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

bzw.

$$L = L_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha,j}, g_{ij}, g_{ij,k})$$

bzw.

$$L = L_3(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}), \quad \det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0,$$

so können wir nach dem Satz 13, 14, bzw. 15 feststellen, daß diese Lagrange-Funktionen die Form

$$L_1 = \Phi_1(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \overset{\alpha}{u}_{i;jk}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha;j}, \overset{i}{v}_{\alpha;jk}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

$$L_2 = \Phi_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha;j}, g_{ij}),$$

$$L_3 = |\det(\overset{i}{u}_j)| \Phi^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, \varrho_{imkj})$$

haben (das letzte ist wieder die allgemeinste Form für L_3 , wo man die Funktion Φ^* beliebig wählen kann).

2) Man kann leicht einsehen, daß die Forderung der Unabhängigkeit der obigen Lagrange-Funktionen von x^i als eine Folgerung der zu (24) und (37) analogen Invarianzbedingung aufgefaßt werden kann.

3) Aus der Bemerkung 1) folgt für die Lagrange-Funktion

$$L = L_{11}(u_i, u_{i,j}, g_{ij})$$

(s. [2], [22]) bzw.

$$L = L_{12}(u_i, u_{i,j}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

(s. [22]) bzw.

$$L = L_{13}(u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

(s. [2]) die Darstellungen

$$L_{11} = \Phi_{11}(u_i, u_{[i,j]}, g_{ij}),$$

bzw.

$$L_{12} = \Phi_{12}(u_i, u_{i;j}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

bzw.

$$L_{13} = \Phi_{13}(u_i, u_{i;j}, u_{i;jk}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

wo die Funktionen Φ_{11} , Φ_{12} , Φ_{13} solche Invarianzbedingungen erfüllen sollen, in welchen nur die partiellen Ableitungen B_j^i vorkommen.

§ 4. Lagrange-Funktionen einer affinen Übertragung und gewisser Vektorfelder

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraph mit der Kennzeichnung der Differentialkomitanten $\mathcal{L}_\lambda$ zweiter, bzw. erster Ordnung einer affinen Übertragung $\Gamma_{jk}^i (= \Gamma_{kj}^i)$ und eines Systems von kovarianten und kontravarianten Vektorfeldern $\overset{x}{u}_i, v_\alpha^i$ ($\alpha = 1, \dots, N$), vorausgesetzt, daß $\mathcal{L}_\lambda$ wieder ein Objekt erster Klasse ist, d. h.

$$(55) \quad \bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

gilt. Zu diesem Zweck setzen wir voraus, daß die Funktionen $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x)$ bzw. $\overset{x}{u}_i = \overset{x}{u}_i(x)$, $v_\alpha^i = v_\alpha^i(x)$ über $G(\subseteq X_n)$ stetige partielle Ableitungen erster bzw. zweiter Ordnung haben.

Im folgenden sind die aus

$$(56) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \bar{B}_p^i B_j^q B_k^r \Gamma_{qr}^p + \bar{B}_p^i B_{jk}^p$$

folgenden Relationen

$$(57) \quad \begin{cases} \bar{\Gamma}_{jk,m}^i = \bar{B}_p^i B_j^q B_k^r B_m^s \Gamma_{qr,s}^p - \bar{B}_p^i \bar{B}_r^q B_{jk}^r B_{qm}^p + \bar{B}_p^i B_{jkm}^p + \\ + (\bar{B}_p^i B_k^q B_{jm}^r + \bar{B}_p^i B_j^q B_{km}^r - \bar{B}_s^i \bar{B}_p^q B_j^r B_k^s B_{im}^p) \Gamma_{qr}^p \end{cases}$$

nötig.

Wir nehmen zuerst an, daß das Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ mit der Transformationsformel (55) eine Differentialkomitante erster Ordnung von Γ_{jk}^i ist:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i).$$

Die Funktionen Φ_λ genügen folglich in jedem Punkt $x_0^i (\in G)$ dem Funktionalgleichungssystem

$$(58) \quad \Phi_\lambda(\bar{\Gamma}_{jk}^i, \bar{\Gamma}_{jk,m}^i) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i); B_j^i),$$

aus welchem wir durch Einsetzen von

$$B_j^i = \delta_j^i, \quad B_{jk}^i = 0, \quad B_{jkm}^i = -\frac{1}{3}(\Gamma_{jk,m}^i + \Gamma_{mk,j}^i + \Gamma_{jm,k}^i)$$

(wegen der (26) entsprechenden Eigenschaft von Λ_λ , ferner wegen (56) und (57)) die Identitäten

$$(59) \quad \Phi_\lambda\left(\Gamma_{jk}^i, -\frac{1}{3}(R_{kjm}^i + R_{jkm}^i - \Gamma_{km}^p \Gamma_{pj}^i - \Gamma_{jm}^p \Gamma_{pk}^i + 2\Gamma_{jk}^p \Gamma_{pm}^i)\right) = \Phi_\lambda(\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

erhalten, wo

$$R_{jkm}^i \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma_{jm,k}^i - \Gamma_{jk,m}^i + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{jm}^p - \Gamma_{pm}^i \Gamma_{jk}^p$$

den Krümmungstensor der affinen Übertragung Γ_{jk}^i bezeichnet. Die Formeln (59) zeigen, daß die Funktionen Φ_λ nur von Γ_{jk}^i und von dem Tensor

$$\overset{*}{R}_{jkm}^i \stackrel{\text{df}}{=} R_{jkm}^i + R_{kjm}^i$$

abhängen. Den Tensor R_{jkm}^i kann man einfach durch R_{jkm}^{*i} ausdrücken, wenn wir die bekannte Relationen

$$R_{j(km)}^i = 0, \quad R_{[jkm]}^i = 0$$

(s. z. B. [24], S. 144.) verwenden:

$$R_{jkm}^i = \frac{1}{3} (2R_{jkm}^{*i} + R_{kmj}^{*i}),$$

folglich können wir festlegen, daß Φ_λ die Form

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^1(\Gamma_{jk}^i, R_{jkm}^i)$$

hat. Setzen wir jetzt diese Gestalt von Φ_λ in (58) ein und wählen wir die Werte B_j^i, B_{jk}^i nach

$$B_j^i = \delta_j^i, \quad B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i,$$

so bekommen wir

$$\Phi_\lambda^1(0, R_{jkm}^i) = \Phi_\lambda^1(\Gamma_{jk}^i, R_{jkm}^i),$$

d. h. die Funktion Φ_λ^1 hängt allein von dem Krümmungstensor R_{jkm}^i ab.

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 16. *Alle Differentialkomitanten erster Ordnung einer affinen Übertragung Γ_{jk}^i , die Objekte erster Klasse sind, sind die algebraischen Komitanten allein des zu den Γ_{jk}^i gehörigen Krümmungstensors.*

Satz 17. *Es gibt keine algebraische Komitante der symmetrischen Übertragung Γ_{jk}^i über G , die ein Objekt erster Klasse ist und welche ausschließlich von den Übertragungsparametern Γ_{jk}^i abhängt.*

Wir können die folgenden, zu den Sätzen 13, 14, 15 analoge Sätze mit ähnlichem Verfahren, die zu den Ergebnissen der Sätze 13, 14, 15 geführt haben, beweisen:

Satz 18. *Wenn das Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ erster Klasse eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der Felder $\overset{\alpha}{u}_i, v_\alpha^i$ ($\alpha = 1, \dots, N$) und gleichzeitig eine Differentialkomitante erster Ordnung der symmetrischen Übertragung Γ_{jk}^i über G ist, d. h.*

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, v_\alpha^i, v_{\alpha,j}^i, v_{\alpha,jk}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i),$$

so muß $\mathcal{L}_\lambda$ eine algebraische Komitante der Tensoren

$$\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j} \left(\stackrel{\text{df}}{=} \overset{\alpha}{u}_{i,j} - \Gamma_{ij}^p \overset{\alpha}{u}_p \right), \overset{\alpha}{u}_{i;jk},$$

$$v_\alpha^i, v_{\alpha;j}^i \left(\stackrel{\text{df}}{=} v_{\alpha,j}^i + \Gamma_{pj}^i v_\alpha^p \right), v_{\alpha;jk}^i$$

und R_{jkm}^i sein.

Satz 19. *Ist $\mathcal{L}_\lambda$ ein Objekt erster Klasse und gleichzeitig eine Differentialkomitante erster Ordnung der Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i, v_\alpha^j$ ($\alpha = 1, \dots, N$), bzw. algebraische Komitante der symmetrischen Übertragung Γ_{jk}^i , d. h.*

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, v_\alpha^i, v_{\alpha,j}^i, \Gamma_{jk}^i),$$

dann ist $\mathcal{L}_\lambda$ eine algebraische Komitante der Größen

$$\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{v}_i, \overset{x}{v}_{i,j}.$$

Satz 20. $\mathcal{L}_\lambda$ sei ein Objekt erster Klasse mit der Transformationsformel

$$(60) \quad \bar{\mathcal{L}}_\lambda = A_\lambda(\mathcal{L}_\mu; B_j^i)$$

und wir setzen voraus, daß $\mathcal{L}_\lambda$ eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der in jedem Punkt von G linear-unabhängigen kovarianten Vektorfelder $\overset{x}{u}_i$ ($\alpha = 1, \dots, n$) und eine Differentialkomitante erster Ordnung der symmetrischen Übertragung Γ_{jk}^i ist:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{u}_{i,jk}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i).$$

Dann gibt es ein Funktionensystem Φ_λ^* der Skalarfelder

$$\overset{x}{\sigma}_{ij} \left(\stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{v}_p \overset{x}{v}_q \overset{x}{u}_{p;q} \right), \quad \overset{x}{\sigma}_{ijk} \left(\stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{v}_p \overset{x}{v}_q \overset{x}{v}_r \overset{x}{u}_{p;qr} \right),$$

$$\overset{i}{Q}_{jkm} \left(\stackrel{\text{df}}{=} \overset{i}{u}_p \overset{i}{v}_q \overset{i}{v}_r \overset{i}{v}_s R_{qrs}^p \right),$$

mit welchem man das Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ in der Form

$$(61) \quad \mathcal{L}_\lambda = A_\lambda(\Phi_\mu^*(\overset{x}{\sigma}_{ij}, \overset{x}{\sigma}_{ijk}, \overset{i}{Q}_{jkm}); \overset{i}{u}_j)$$

darstellen kann ($\overset{i}{v}$ bezeichnet das zu $\overset{x}{u}_i$ adjungierte n -Bein). Umgekehrt, es seien die Funktionen Φ_λ^* in (61) beliebig gewählt, so erweist sich das nach (61) erklärte Funktionensystem $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda(x)$ über G als ein Objekt erster Klasse mit der Transformationsformel (60).

Bemerkungen

1. Die Behauptung des Satzes 16 gibt ein noch von E. B. Christoffel und G. Ricci herrührendes Ergebnis, den „ersten Reduktionssatz“ für Differentialkomitanten erster Ordnung von Γ_{jk}^i wieder (s. [24], S. 164.), während die Sätze 18, 19, 20 in ihren Spezialfällen eine Verallgemeinerung des „zweiten Reduktionssatzes“ von E. Noether ([18], s. auch [24], S. 165.) angeben.

2. Man folgert einfach, daß auch die folgenden Verallgemeinerungen des Satzes 18, bzw. 19 bestehen:

Es sei über G außer den Vektorfeldern $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^j$ und dem Übertragungsparameter Γ_{jk}^i auch ein Tensorfeld t_{ij} erklärt, dann ist jede Differentialkomitante $\mathcal{L}_\lambda$ erster Klasse von der Gestalt

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(t_{ij}, \overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{u}_{i,jk}, \overset{x}{v}_i, \overset{x}{v}_{i,j}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

bzw.

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(t_{ij}, \overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{v}_i, \overset{x}{v}_{i,j}, \Gamma_{jk}^i)$$

eine algebraische Komitante der Größen

$$t_{ij}, u_i^z, u_{i;j}^z, \dots, v_{;jk}^i, R_{jkm}^i$$

bzw.

$$t_{ij}, u_i^z, u_{i;j}^z, v_{;j}^i, v_{;j}^i.$$

Im Spezialfall, wobei die Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(t_{ij}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

bzw.

$$L = L_2(t_{ij}, u_i, u_{i;j}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

(s. [23]) sind, ist L_1 bzw. L_2 eine algebraische Komitante der Felder

$$t_{jk}, R_{jkm}^i \text{ bzw. } g_{ij}, u_i, u_{i;j}, R_{jkm}^i.$$

3. Man kann sich von der Unabhängigkeit von x^i einer Lagrange-Funktion von der Gestalt

$$L = L(x^i, g_{ij}, u_i^z, u_{i;j}^z, u_{i;jk}^z, v_{;j}^i, v_{;j}^i, v_{;jk}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

wieder leicht überzeugen.

Literaturverzeichnis

- [1] J. ACZÉL—ST. GOLAB, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, *Warszawa*, 1960.
- [2] H. A. BUCHDAHL, The hamiltonian derivatives of a class of fundamental invariants, *Quart. J. Math. Oxford. Ser.* **19** (1948), 150—159.
- [3] H. A. BUCHDAHL, Über die Variationsableitung von Fundamentalinvarianten beliebig hoher Ordnung, *Acta Math.*, **85** (1950), 63—72.
- [4] H. A. BUCHDAHL, On the hamiltonian derivatives arising from a class of gauge-invariant action principles in a W_n , *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 139—149.
- [5] H. A. BUCHDAHL, An identity between the hamiltonian derivatives of certain fundamental invariants in a W_4 , *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 150—152.
- [6] A. S. EDDINGTON, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, *Berlin*, 1925.
- [7] L. P. EISENHART, Riemannian geometry, *Princeton*, 1926.
- [8] G. KNAPECZ, General relativistic theory of lagrangeian functions, Part I. (Fields in the space X_1) (*in Vorbereitung*).
- [9] M. KUCHARZEWSKI, Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder, *Ann. Polon. Math.*, **9** (1961), 299—309.
- [10] M. KUCHARZEWSKI, Die kovarianten Vektorkomitanten, die aus kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor*, N. S., **12** (1962), 140—150.
- [11] M. KUCHARZEWSKI, Die skalaren Komitanten, welche aus kovarianten und kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor*, N. S., **12** (1962), 158—166.
- [12] I. MAKAI, Über geometrische Objekte, die aus adjungierten n -Beinen gebildet sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 219—222.
- [13] I. MAKAI, (Briefwechsel mit Herr G. KNAPECZ), 1966.
- [14] I. MAKAI, Über Differentialkomitanten erster Ordnung von kovarianten Vektorfeldern, *Ann. Polon. Math.*, **18** (1970), (*im Druck*).
- [15] M. A. MCKIERNAN—H. RICHARDS, Characterization of some concomitants of the metric tensor and vector fields under restricted groups of transformation, *Ann. Polon. Math.*, **18** (1970), (*im Druck*).

- [16] A. MOÓR, Über die aus g_{ik} bestimmte kovariante Ableitung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 175—186.
- [17] A. NIJENHUIS, Theory of geometric object, *Amsterdam*, 1952.
- [18] E. NOETHER, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, *Göttinger Nachr.*, (1918), 37—44.
- [19] J. C. DU PLESSIS, Tensorial concomitants and conservation laws, *Tensor*, N. S., **20** (1969), 347—360.
- [20] J. C. DU PLESSIS, Conformal concomitants and continuity equations, *Tensor*, N. S., **21** (1970), 1—14.
- [21] H. RUND, Variational problems in which the unknown functions are tensor components, 2nd *Colloquium on the Calculus of Variations*, Univ. of South Africa (1964), 129—174.
- [22] H. RUND, Variational problems involving combined tensor fields, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **29** (1966), 243—263.
- [23] H. RUND, Invariant theory of variational problems for geometric objects, *Tensor*, N. S., **18** (1967), 239—258.
- [24] J. A. SCHOUTEN, Ricci-Calculus, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.
- [25] E. SCHRÖDINGER, Space—time structure, *Cambridge*, 1954.
- [26] H. WEYL, Raum, Zeit, Materie, *Berlin*, 1921.
- [27] R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, *Noordhoff, Groningen*, 1923.
- [28] A. ZAJTZ, Komitanten der Tensoren zweiter Ordnung, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego*, **74.**, *Prace Matematyczne*, Zeszyt 8., Kraków, 1964.
- [29] M. LORENS, Remarks on differential concomitants of the covariant tensor, *Prace Matematyczne* **1**, 1969 (Katowice), 71—77.

(Eingegangen am 25. Juni 1968.)