

Über den Vergleich von Mittelwerten die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind

Von L. LOSONCZI (Debrecen)

1. Einleitung

Es sei I ein offenes Intervall und $I^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in I; i = 1, \dots, n\}$ die Menge aller n -tupel von reellen Zahlen aus I . Es bezeichne Ω die Menge der in I stetigen und streng monotonen reelwertigen Funktionen, Q die Menge der in I definierten positiven Funktionen. Die Größe

$$(1) \quad \mathfrak{M}_\varphi(x)_f = \varphi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} \right)$$

wird der mit der Gewichtsfunktion f gebildete Mittelwert von $x \in I^n$ bezüglich der Abbildungsfunktion φ genannt ($\varphi \in \Omega, f \in Q$, φ^{-1} ist die inverse Funktion von φ). In [5] hat Z. DARÓCZY das folgende Problem gestellt: welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Funktionen $\varphi, \psi \in \Omega, f, g \in Q$, damit die Ungleichung

$$(2) \quad \mathfrak{M}_\varphi(x)_f \leq \mathfrak{M}_\psi(x)_g$$

für alle $x \in I^n$; $n = 2, 3, \dots$ erfüllt ist. In den Spezialfällen $f = g$ und $\varphi = \psi$ hat Z. Daróczy dieses Problem vollständig gelöst. In [3] hat M. BAJRAKTAREVIC hinreichende Bedingungen für (2) gegeben. Ebenda wurde bewiesen, daß die Ungleichung

$$(3) \quad \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} + 2 \frac{f'(t)}{f(t)} \leq \frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} + 2 \frac{g'(t)}{g(t)} \quad (t \in I)$$

(unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) notwendig dafür ist, daß (2) für alle $x \in I^n$ ($n \geq 2$ fixierte natürliche Zahl) gilt. Die Eigenschaften der Mittelwerte vom Typ (1) wurden in [1], [2], [4] untersucht.

In dieser Arbeit werden wir uns mit der Ungleichung (2) beschäftigen. Wir zeigen, daß (2) auf den Fall $\varphi(t) = t$, $f(t) = 1$ reduziert werden kann (dh. $\mathfrak{M}_\varphi(x)_f$ arithmetisches Mittel ist). Im Fall der sog. Potenzmittelwerte, wo $I = (0, \infty)$, $\varphi(t) = t^a$, $f(t) = t^p$, $\psi(t) = t^b$, $g(t) = t^q$, $ab \neq 0$ sind, werden wir das Problem (2) fast vollständig erledigen.

2. Reduktion des Problems

Satz 1. Es seien $\varphi, \psi \in \Omega$, $f, g \in Q$. Die Ungleichung

$$(2) \quad \mathfrak{M}_{\varphi}(\mathbf{x})_f \leq \mathfrak{M}_{\psi}(\mathbf{x})_g \quad (\mathbf{x} \in I^n; n = 2, 3, \dots)$$

gilt dann und nur dann, falls im Falle einer wachsenden Funktion φ

$$(4) \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i \leq \mathfrak{M}_{\chi}(\mathbf{u})_h \quad (\mathbf{u} \in J^m; m = 2, 3, \dots)$$

erfüllt ist, bzw. falls im Falle einer abnehmenden Funktion φ

$$(5) \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i \geq \mathfrak{M}_{\chi}(\mathbf{u})_h \quad (\mathbf{u} \in J^m; m = 2, 3, \dots)$$

gilt, wobei

$$(6) \quad J = \varphi(I) = \{\varphi(t) \mid t \in I\},$$

$$(7) \quad \chi(t) = \psi(\varphi^{-1}(t)), \quad h(t) = \frac{g(\varphi^{-1}(t))}{f(\varphi^{-1}(t))} \quad (t \in J)$$

sind.

BEWEIS. Wir werden zeigen, daß die Ungleichung

$$(8) \quad \varphi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m p_i f(y_i) \varphi(y_i)}{\sum_{i=1}^m p_i f(y_i)} \right) \leq \psi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m p_i g(y_i) \psi(y_i)}{\sum_{i=1}^m p_i g(y_i)} \right) \quad (y \in I^m, \mathbf{p} \in R_+^m; m = 2, 3, \dots)$$

aus (2) folgt, wobei $R_+ = (0, \infty)$ ist. Mit Hilfe dieser Behauptung ergibt sich leicht unseren Satz (mit einer entsprechenden Wahl von p_i).

Um (8) zu zeigen, setzen wir in (2) $n = k_1 + \dots + k_m$, $x_1 = \dots = x_{k_1} = y_1$, $x_{k_1+1} = \dots = x_{k_1+k_2} = y_2$, ..., $x_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = \dots = x_{k_1+\dots+k_m} = y_m$, wo $k_1, \dots, k_m$ beliebige natürliche Zahlen sind. Dann ist

$$\varphi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \frac{k_i}{l} f(y_i) \varphi(y_i)}{\sum_{i=1}^m \frac{k_i}{l} f(y_i)} \right) \leq \psi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \frac{k_i}{l} g(y_i) \psi(y_i)}{\sum_{i=1}^m \frac{k_i}{l} g(y_i)} \right)$$

für beliebige natürliche Zahlen l . Dies bedeutet, für jede positive rationale Zahl p_i gilt die Ungleichung (8). Weil φ^{-1} , ψ^{-1} stetige Funktionen sind, wird (8) für beliebiges $p_i \in R_+$ ($i = 1, \dots, m$) richtig, w. z. b. w.

Bemerkung. Ist ψ eine wachsende Funktion, $\chi(t) > 0$ für $t \in J$, so ist (2) mit der symmetrischen Ungleichung

$$(9) \quad \frac{k\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i\right)}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m k(u_i)} \cong \frac{h\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i\right)}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(u_i)} \quad (u \in J^m; m=2, 3, \dots)$$

äquivalent, wo $k(t) = h(t)\chi(t)$ ist. Dies ergibt sich aus der (mit (2) äquivalenten) Ungleichung

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^m u_i}{m}\right) \cong \psi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^m h(u_i)\chi(u_i)}{\sum_{i=1}^m h(u_i)}\right).$$

3. Potenzmittelwerte

Es seien $a \neq 0$, $b \neq 0$, p, q beliebige reelle Zahlen, $I = R_+ = (0, \infty)$. Auf Grund der Bemerkung des Satzes 1 genügt es statt der Ungleichung

$$(10) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{a+p}}{\sum_{i=1}^n x_i^p}\right)^{\frac{1}{a}} \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{b+q}}{\sum_{i=1}^n x_i^q}\right)^{\frac{1}{b}} \quad (x \in R_+^n; n=2, 3, \dots)$$

im Falle $b > 0$ die (9) entsprechende Ungleichung

$$(11) \quad \frac{\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i\right)^\alpha}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i^\alpha} \cong \frac{\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i\right)^\beta}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i^\beta} \quad (u \in R_+^m; m=2, 3, \dots)$$

zu untersuchen, wobei $\alpha = \frac{q-p+b}{a}$, $\beta = \frac{q-p}{a}$ sind. Mit den Bezeichnungen

$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m \frac{u_i}{m}$, $z_i = \frac{u_i}{\tilde{u}}$ erhalten wir aus (11) die Ungleichung

$$(12) \quad \sum_{i=1}^m z_i^\alpha \cong \sum_{i=1}^m z_i^\beta \quad \text{für } z_i > 0, \sum_{i=1}^m z_i = m, m=2, 3, \dots$$

Nach der Taylorschen Formel

$$z_i^\alpha - z_i^\beta = (\alpha - \beta)(z_i - 1) + \frac{1}{2} [\alpha(\alpha - 1)\xi_i^{\alpha-2} - \beta(\beta - 1)\xi_i^{\beta-2}](z_i - 1)^2,$$

wobei ξ_i zwischen 1 und z_i liegt. Damit erhalten wir aus (12) ($m=2$, $x_i \rightarrow 1$) daß

$$(13) \quad \alpha(\alpha-1) \cong \beta(\beta-1)$$

ist. Also ist die Bedingung (13) notwendig für die Gültigkeit von (11). Führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(\alpha, \beta) | \alpha(\alpha-1) \cong \beta(\beta-1)\}, \\ D_1 &= \{(\alpha, \beta) | \alpha \cong 1, 0 \cong \beta \cong 1\}, \quad D_5 = \{(\alpha, \beta) | \alpha > 1, 1-\alpha \cong \beta < 0\}, \\ D_2 &= \{(\alpha, \beta) | \alpha \cong 0, 0 \cong \beta \cong 1\}, \quad D_6 = \{(\alpha, \beta) | \alpha < 0, 1 < \beta \cong 1-\alpha\}, \\ D_3 &= \{(\alpha, \beta) | \alpha > 1, 1 < \beta \cong \alpha\}, \quad D_7 = \{(\alpha, \beta) | \frac{1}{2} \cong \alpha < 1, 1-\alpha \cong \beta \cong \alpha\}, \\ D_4 &= \{(\alpha, \beta) | \alpha < 0, \alpha \cong \beta < 0\}, \quad D_8 = \{(\alpha, \beta) | 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \alpha \cong \beta \cong 1-\alpha\}. \end{aligned}$$

Es ist klar, daß $D_0 = \bigcup_{i=1}^8 D_i$, $D_k \cap D_l = \emptyset$ für $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \dots, 8$.

Liegt (α, β) in D_5 , so gilt (11) nicht für alle $u \in R_+^m$. Diese Behauptung kann auf Grund der Limesrelationen $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\beta = +\infty$ bewiesen werden. Mit Beispielen kann man zeigen, daß die Mengen D_6, D_7, D_8 innere Punkte haben, in denen (11) nicht für alle $u \in R_+^m$ $m=2, 3, \dots$ gilt. Für die anderen Mengen D_i ($i=1, 2, 3, 4$) ist der folgende Satz richtig.

Satz 2. Gilt die Ungleichung (11), dann liegt (α, β) in D_0 . Liegt (α, β) in $\bigcup_{i=1}^4 D_i$, dann gilt die Ungleichung (11).

BEWEIS. Die Richtigkeit der ersten Behauptung haben wir schon gezeigt.

Ist $(\alpha, \beta) \in D_1 \cup D_2$, dann ist t^α konvex, t^β konkav und darüber hinaus gilt (11).

Ist $(\alpha, \beta) \in D_3$, dann haben wir wegen $\alpha > 1$, $1 < \beta \cong \alpha$

$$(14) \quad 1 = \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{m} \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

weil die Funktion $M_t(z) = \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^t}{m} \right)^{\frac{1}{t}}$ in t wachsend ist (S. [6]). Aus (14) folgt (wegen $\alpha\beta > 0$, bzw. $\beta > 1$)

$$(15) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m} \right)^\alpha \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m} \right)^\beta \quad \text{bzw.} \quad 1 = 1^\beta \cong \frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m},$$

so dass

$$(16) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m} \right)^\beta \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m} \right)^\alpha.$$

Vergleichen wir (15) und (16), so erhalten wir wegen $\beta > 0$

$$\sum_{i=1}^m z_i^\alpha \cong \sum_{i=1}^m z_i^\beta \quad \text{für} \quad z_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m z_i = m, \quad m = 2, 3, \dots$$

und darüber hinaus gilt (11).

Ist $(\alpha, \beta) \in D_4$, d. h. $\alpha < 0, \alpha \leq \beta < 0 < 1$, dann gilt

$$(17) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cong \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{m} = 1,$$

woraus wegen $\alpha\beta > 0$, bzw. $\beta < 0$

$$(18) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m} \right)^\beta \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m} \right)^\alpha \quad \text{bzw.} \quad 1 = 1^\beta \cong \frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m}$$

folgt. Daraus erhalten wir

$$(19) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m} \right)^\alpha \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m} \right)^\beta$$

das heißt auf Grund (18), (19) und $\beta < 0$ gilt (12), was gleichbedeutend mit (11) ist.

Kehren wir jetzt zurück zur Ungleichung (10). Es sei

$$E_i = \left\{ (a, b, p, q) \left| \begin{array}{l} a \neq 0, b > 0, \left(\frac{q-p+b}{a}, \frac{q-p}{a} \right) \in D_i \\ \text{oder } a \neq 0, b < 0, \left(\frac{q-p}{a}, \frac{q-p+b}{a} \right) \in D_i \end{array} \right. \right\} \quad (i=0, 1, \dots, 8)$$

Aus dem Satz 2 folgt der

Satz 3. *Gilt die Ungleichung*

$$(10) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{a+p}}{\sum_{i=1}^n x_i^p} \right)^{\frac{1}{a}} \cong \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{b+q}}{\sum_{i=1}^n x_i^q} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (x \in R_+^n; n=2, 3, \dots)$$

dann ist $(a, b, p, q) \in E_0$. Liegt (a, b, p, q) in $\bigcup_{i=1}^4 E_i$, dann gilt die Ungleichung (10), während (10) nicht in jedem Punkt (a, b, p, q) von $\bigcup_{i=5}^8 E_i$ erfüllt ist.

Literatur

- [1] J. ACZÉL—Z. DARÓCZY, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 171—190.
- [2] M. BAJRAKTAREVIČ, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes, *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.* **13** (1958), 243—248.
- [3] M. BAJRAKTAREVIČ, Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte, *Studia Sci. Math. Hungar.* **4** (1969), 3—8.
- [4] E. F. BECKENBACH, A class of mean value functions, *Amer. Math. Monthly.* **57** (1950), 1—6.
- [5] Z. DARÓCZY, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 102—112.
- [6] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1952.

(Eingegangen am 10. Oktober 1968.)