

Eine Charakteristik der Primidealhalbgruppen

Von G. SZÁSZ (BUDAPEST)

1. Es sei H eine Halbgruppe; $\mathcal{I}(H)$ bezeichne die Menge aller Ideale von H . Ein Ideal I von H wird *prim*, *schwachprim*, bzw. *halbprim* genannt, wenn es die folgende Eigenschaft (P), (SP) bzw. (HP) besitzt:

(P) Aus $ab \in I$ ($a, b \in H$) folgt, daß entweder $a \in I$ oder $b \in I$ besteht.

(SP) Aus $AB \subseteq I$ ($A, B \in \mathcal{I}(H)$) folgt, daß entweder $A \subseteq I$ oder $B \subseteq I$ besteht.

(HP) Aus $a^2 \in I$ ($a \in H$) folgt $a \in I$.¹⁾

Es ist nicht schwer zu zeigen (siehe, z. B. [6] Fußnote 1), daß jedes Primideal schwachprim ist. In dieser Arbeit werden wir die Halbgruppe H eine *Primidealhalbgruppe* [bzw. *Schwachprimidealhalbgruppe*] nennen, wenn jedes Ideal in H prim [bzw. schwachprim] ist. Es ist bekannt ([1], Theorem 4.4), daß alle Ideale einer Halbgruppe H genau dann halbprim sind, wenn H selbst intraregulär ist.

In [6] haben wir gezeigt, daß die Ideale einer Primidealhalbgruppe eine Kette bilden. Ferner sind die Elemente einer solchen Halbgruppe selbstverständlich durch Primideale trennbar²⁾, so daß nach [7] jede Primidealhalbgruppe intraregulär ist. In dieser Arbeit werden wir die folgende gemeinsame Verschärfung dieser Sätze beweisen:

Satz 1. Eine Halbgruppe H ist genau dann eine Primidealhalbgruppe, wenn H intraregulär ist und $\mathcal{I}(H)$ eine Kette bildet.

Bekanntlich ist die Intraregularität von H damit gleichwertig, daß

$$(1) \quad (a^2) = (a) \quad \text{für jedes } a \in H$$

gilt, wobei (a) das durch a erzeugte Hauptideal bezeichnet. Ist (1) erfüllt, so ergibt sich $(a) = (a^2) \subseteq (a)(a) \subseteq (a)$, so daß aus (1) immer

$$(2) \quad (a)^2 = (a) \quad \text{für jedes } a \in H$$

folgt. Diese Bemerkung ermöglicht, daß wir die Schwachprimidealhalbgruppen auf eine zum Satz 1 analoge Weise charakterisieren.

¹⁾ Die analoge Bedingung „aus $A^2 \subseteq I$ folgt $A \subseteq I$ für jede A , $I \in \mathcal{I}(H)$ “ ist damit gleichwertig, daß jedes Ideal A idempotent (d. h., $A^2 = AA = A$) ist: man betrachte den Fall $I = A^2$.

²⁾ Für die hier nicht definierten Begriffe siehe [1] und [7].

In [5] hat O. STEINFELD gezeigt, daß jedes Ideal einer Halbgruppe H genau dann schwachprim ist, wenn

$$(3) \quad AB = A \cap B \quad \text{für jedes } A, B \in \mathcal{I}(H)$$

gilt und $\mathcal{I}(H)$ eine Kette bildet. Aus (3) folgt sofort, daß jedes Ideal von H idempotent ist und, insbesondere, (2) gilt. Im dritten Paragraphen unserer Arbeit werden wir zeigen, daß die Bedingung (3) im Satz von Steinfeld durch (2) ersetzt werden kann. Anders gesagt, werden wir folgendes beweisen:

Satz 2. *Eine Halbgruppe H ist genau dann eine Schwachprimidealhalbgruppe, wenn jedes Hauptideal von H idempotent ist und $\mathcal{I}(H)$ eine Kette bildet.*

Ein unmittelbares Korollar von Sätzen 1 und 2 ist

Satz 3. *Eine Halbgruppe H ist genau dann eine Primidealhalbgruppe, wenn jedes Ideal von H gleichzeitig halb- und schwachprim ist.*

Endlich geben wir einen Beweis dafür, daß für die Ideale einer kommutativen Halbgruppe die Worte „prim“ und „schwachprim“ dasselbe bedeuten.

2. Wir werden den Beweis des Satzes 1 durch einige Lemmas gewinnen.

Lemma 1. *Für jedes Paar a, b einer Primidealhalbgruppe H gilt*

$$(4) \quad (ab) = (a) \cap (b);$$

insbesondere, gilt (1) in H .

BEWEIS. Da das Element ab auch in (a) , auch in (b) enthalten ist, gilt immer das Enthaltensein

$$(5) \quad (ab) \subseteq (a) \cap (b) \subseteq (a).$$

Ferner ist $ab \in (ab)$. Ist also jedes Ideal von H prim, so soll entweder $a \in (ab)$ oder $b \in (ab)$, d. h. entweder

$$(6) \quad (a) \subseteq (ab),$$

oder $(b) \subseteq (ab)$ gelten. Im ersten Fall ergibt sich (4) nach (5), (6) und ähnlich im zweiten.

Lemma 2. *Die Hauptideale einer Primidealhalbgruppe bilden eine Kette (Satz 2 von [6]).*

Lemma 3. *Bilden die Hauptideale einer Halbgruppe H eine Kette, so bilden auch alle Ideale von H eine Kette.*

BEWEIS. Es seien $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ und $B = \{b_\mu\}_{\mu \in \mathfrak{M}}$ beliebige Ideale in der Halbgruppe H . Offenbar ist

$$(7) \quad A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda) \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}} (b_\mu).$$

Es sei vorausgesetzt, daß die Hauptideale von H eine Kette bilden. Für jedes Paar $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \mathfrak{M}$ gilt dann entweder $(a_\lambda) \subseteq (b_\mu)$ oder $(a_\lambda) \supseteq (b_\mu)$. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

- a) Es gibt ein $\mu_0 \in M$ so, daß $(b_{\mu_0}) \supseteq (a_\lambda)$ für jedes $\lambda \in A$.
 b) Es gibt ein $\lambda_0 \in A$ so, daß $(a_{\lambda_0}) \supseteq (b_\mu)$ für jedes $\mu \in M$.
 c) Zu jedem $\lambda \in A$ gibt es ein $\mu \in M$ so, daß $(a_\lambda) \subseteq (b_\mu)$ und zu jedem $\mu' \in M$ gibt es ein $\lambda' \in A$ so, daß $(b_{\mu'}) \subseteq (a_{\lambda'})$.

Im Fall a) betrachten wir ein beliebiges Element x aus A . Nach (7) gibt es ein $\lambda \in A$ so, daß $x \in (a_\lambda)$. Ferner ist $(a_\lambda) \subseteq (b_{\mu_0}) \subseteq B$ in diesem Fall. Das Element x ist also auch in B enthalten und folglich ist $A \subseteq B$. Ähnlich bekommen wir $A \supseteq B$ im Fall b) und (einerseits $A \subseteq B$, andererseits $B \supseteq A$, d. h.) $A = B$ im Fall c).

Aus Lemmas 1—3 folgt die Behauptung „nur dann“ von Satz 1.

Wir bemerken dazu, daß wir schon in [6] bewiesen haben, daß die Menge $\mathcal{I}(H)$ aller Ideale einer Primidealhalbgruppe H eine Kette ist und der frühere Beweis war noch einfacher, als der jetzige. Lemma 3 ist aber auch in sich interessant und darum wollten wir den Beweis durch dieses Lemma führen. Nach diesem Lemma darf man in Satz 1 (und auch in Satz 2) nur voraussetzen, daß die Hauptideale eine Kette bilden.

Lemma 4. *Bilden die Ideale einer intraregulären Halbgruppe H eine Kette, so gilt (4) für beliebige Elemente a, b von H .*

BEWEIS. Das Enthaltensein $(ab) \subseteq (a) \cap (b)$ ist immer gültig; nehmen wir an, daß $(ab) \subset (a) \cap (b)$. Nach den Voraussetzungen ist entweder (a) in (b) enthalten oder umgekehrt; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir das erste annehmen. Dann gilt

$$(8) \quad (ab) \subset (a) \subseteq (b).$$

Da H intraregulär ist, existiert — nach [7] — ein Primideal P mit den Eigenschaften $P \supset ab$, $P \nsubseteq a$. Daraus folgt nach (8), daß auch $P \nsubseteq b$. Das ist aber ein Widerspruch mit der Tatsache, daß P prim ist.

Lemma 5. *H sei eine Halbgruppe, deren Ideale eine Kette bilden. Ist (4) für jedes Paar $a, b \in H$ gültig, so ist H eine Primidealhalbgruppe.*

BEWEIS. Es seien a, b beliebige Elemente und I ein Ideal von H , für das $ab \in I$ und $(a) \subseteq (b)$ gelten. Nach (4) gilt dann

$$a \in (a) = (a) \cap (b) = (ab) \subseteq I.$$

Also ist das Ideal I prim.

Nach Lemmas 4—5 ist auch die Behauptung „dann“ von Satz 1 richtig.

Korollar. *Es seien S eine Primidealhalbgruppe, I ein Ideal von S und J ein Ideal von I . Dann ist J ein Ideal auch von S und I selbst ist eine intrareguläre Halbgruppe.*

BEWEIS. Nach Satz 1 ist S intraregulär, woraus sich nach einem Satz von S. LAJOS ([3]) ergibt, daß J in der Tat ein Ideal von S ist; selbstverständlich ist J prim. Das bedeutet aber, daß jedes Ideal der Halbgruppe I prim (in S , umsomehr) in I ist und daraus folgt nach Satz 1, daß I selbst eine intrareguläre Halbgruppe bildet.

3. In diesem Paragraphen werden wir Satz 2 beweisen.

Lemma 6. Für jede Halbgruppe H sind die folgenden Aussagen I—IV äquivalent:

- I. Jedes Ideal von H ist idempotent.
- II. Jedes Hauptideal von H ist idempotent.
- III. $A \cap B = AB$ gilt für jede Ideale A, B von H .
- IV. $(a) \cap (b) = (a)(b)$ gilt für jede Hauptideale $(a), (b)$ von H .

BEWEIS. Nach Satz 7.3 der Arbeit [4] von SCHEIN sind die Aussagen I—III äquivalent. Ferner ist IV eine triviale Folgerung von III und II ist eine von IV.

Die Richtigkeit von Satz 2 folgt nun aus dem oben zitierten Satz von Steinfeld und aus Lemma 6. Natürlich läßt sich Satz 2 auch folgendermaßen formulieren:

Eine Halbgruppe H ist genau dann eine Schwachprimidealhalbgruppe, wenn eine der Bedingungen I—IV aus Lemma 6 erfüllt ist und $\mathcal{I}(H)$ eine Kette bildet.

4. Wie wir schon gesagt haben, ist jedes Primideal einer Halbgruppe umso mehr schwachprim. Für kommutative Halbgruppen gilt auch die umgekehrte Aussage:

Satz 4. In einer kommutativen Halbgruppe ist ein Ideal dann und nur dann prim, wenn es schwachprim ist.

Der Beweis ergibt sich z. B. aus den nachstehenden Lemmas 7 und 8.

Lemma 7. Für beliebige Elemente a, b einer kommutativen Halbgruppe gilt

$$(9) \quad (ab) = (a)(b).$$

BEWEIS. In jeder Halbgruppe H ist das Enthaltensein $(ab) \subseteq (a)(b)$ für beliebige $a, b \in H$ gültig. Ist, umgekehrt, $c \in (a)(b)$, so besteht eine Gleichung $c = xay \cdot ubv$, wobei x, y, u, v gewisse Elemente von H oder leere Symbole sind. Ist H kommutativ, so folgt daraus, daß

$$c = xy \cdot ab \cdot uv \in (ab)$$

ist, woraus sich $(a)(b) \subseteq (ab)$ ergibt. Damit haben wir dieses Lemma bewiesen.

Lemma 8. H sei eine Halbgruppe, in der (9) für jedes Paar $a, b \in H$ erfüllt ist. Dann ist jedes Schwachprimideal von H auch prim.

BEWEIS. Betrachten wir ein Schwachprimideal P von H . Ferner seien a, b Elemente von H so, daß $ab \in P$. Dann besteht nach (9)

$$P \supseteq (ab) = (a)(b).$$

Daraus folgt aber, daß entweder $P \supseteq (a) \ni a$ oder $P \supseteq (b) \ni b$. Das bedeutet aber, daß P auch prim ist, womit Lemma 8 bewiesen ist.

Bemerkung 1. Die Bedingung, daß (9) für jedes Paar $a, b \in H$ gilt, ist damit gleichwertig, daß die Menge $\mathcal{I}_0(H)$ aller Hauptideale von H eine Halbgruppe bildet und die Abbildung

$$(10) \quad a \rightarrow (a) \quad (a \in H)$$

ein Homomorphismus von H auf $\mathcal{I}_0(H)$ ist. Es ist bemerkenswert, daß jede Primidealhalbgruppe diese Eigenschaft besitzt. In der Tat ist das Hauptideal (ab) dann und nur dann prim, wenn (9) besteht: im entgegengesetzten Fall gelten nämlich³⁾

$$(ab) \subset (a)(b) \subseteq (a) \quad \text{und} \quad (ab) \subset (a)(b) \subseteq (b),$$

woraus sich $ab \in (ab)$, aber $a \notin (ab)$ und $b \notin (ab)$ ergeben.

Bemerkung 2. Nach Lemma 7 ist die Gleichung $(a^2) = (a)^2$ für jedes Element a einer kommutativen Halbgruppe gültig. Nimmt man auch Lemma 6 ins Betracht, so bekommt man einen neuen Beweis für den folgenden Satz (vgl. LAJOS [2]): *Eine kommutative Halbgruppe ist dann und nur dann regulär, wenn jedes Ideal in ihr idempotent ist.* (Es sei noch dazu erwähnt, daß in der Klasse der kommutativen Halbgruppen die Regularität und die Intraregularität gleichwertige Bedingungen sind.)

Literatur

- [1] A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON, The algebraic theory of semigroups, Vol. I. Providence, 1961.
- [2] S. LAJOS, A remark on regular semigroups, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 29—30.
- [3] S. LAJOS, A note on intraregular semigroups, *Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 626—627.
- [4] B. M. SCHEIN, Homomorphisms and subdirect decompositions of semigroups, *Pacific J. Math.* **17** (1966), 529—547.
- [5] O. STEINFELD, Negativan rendezett algebrai struktúrák primelemeiről (Über Primelemente von negativ geordneten algebraischen Strukturen), *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **17** (1967), 467—472 (ungarisch, mit deutscher Zusammenfassung).
- [6] G. SZÁSZ, Über Primideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 39—42.
- [7] G. SZÁSZ, Halbgruppen, deren Elemente durch Primideale trennbar sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19** (1968), 201—203.

(Eingegangen am 29. Oktober 1968.)

³⁾ Offenbar ist $(ab) \subseteq (a)(b)$ für jede Elemente a, b .