

Суперпозиция многоместных функций

Л. М. ГЛУСКИН (Харьков)

Алгебраическая теория полугрупп является, как известно, абстрактным учением о суперпозиции преобразований. Иначе говоря, она изучает алгебраические аспекты суперпозиции функций одной переменной — полных и частичных, обратимых и необратимых, однозначных и многозначных. При этом речь идет о (полных или частичных) отображениях какого-либо фиксированного множества Ω в себя¹).

Представляется вполне естественным аналогичное изучение суперпозиции функций многих переменных. Оно было начато уже сравнительно давно К. Менгером и его учениками [1], [2]. Пока здесь встречаются лишь весьма немногочисленные работы. В них при $n > 1$ рассматриваются алгебраические системы, элементами которых являются (за исключением работ [5]—[6]) полные n -местные функции на каком-либо множестве Ω : однозначные отображения декартовой степени Ω^n в Ω .

Настоящая статья посвящена изучению алгебраических систем различных n -местных функций, главным образом, «симметрических» систем: алгебры $P_n(\Omega)$ всех (вообще говоря, многозначных) n -местных функций на множестве Ω (со значениями в этом же множестве), ее подалгебр $W_n(\Omega)$ и $S_n(\Omega)$, состоящих из всех частичных и соответственно полных однозначных функций, и некоторых их подалгебр.

Уже в § 1 мы сталкиваемся с существенными отличиями между алгебрами n -местных функций при $n = 1$ и $n > 1$. При $n = 1$ замкнутое относительно суперпозиции множество S функций является, как известно, полугруппой, независимо от того, являются ли функции из S однозначными или многозначными. При $n > 1$ алгебры однозначных функций являются суперассоциативными (менгеровскими), а многозначных — нет (п. п. 1. 5. 1—1. 6. 2, 1. 8—1. 9).

Известно, что симметрические полугруппы функций одной переменной весьма богаты идеалами [6], [7]. Естественно, идеалом алгебры считать, прежде всего полный гомоморфный прообраз нуля. Оказывается, не только симметрические алгебры n -местных функций, но и многие их подалгебры при $n > 1$ не обладают нетривиальными гомоморфизмами (теоремы п. п. 4. 2—4. 4).

¹) Изучение суперпозиции отображений (вообще говоря, многозначных) одного множества в другое привело В. В. Вагнера (см., например [17]) к изучению так называемых полугруд — алгебраических систем с одной тернарной операцией с тождествами типа ассоциативности.

В частности, они не содержат и собственных sl -идеалов — прообразов нуля (см. п. п., 1. 11. 1, 1. 12).

В § 2 для симметрических алгебр многоместных функций развита теория плотных вложений, близкая к аналогичной теории для полугрупп преобразований. Тем самым получена характеристика различных симметрических алгебр многоместных функций в терминах их весьма просто устроенных плотных подалгебр. Отличие от $n=1$ состоит здесь в более бедной структуре v -идеалов и sv -идеалов. Для алгебр многозначных функций при $n \neq 1$ получены характеристики лишь как для систем с двумя операциями (теоремы п. п. 2. 10, 2. 10. 1).

В § 3 рассмотрены автоморфизмы алгебр многоместных функций — решение здесь не отличается от $n=1$. В § 4 найдены гомоморфизмы ряда симметрических алгебр — о них уже шла речь выше. Из результатов этого § лишь теорема п. 4. 5. 1 о гомоморфизмах алгебр $V_{nr}(\Omega)$ оказалась аналогичной соответствующему результату теории полугрупп.

В работе повсеместно использованы методы, а часто и результаты теории полугрупп. В качестве аппарата широко применяются бинарные отношения (поскольку n -местные функции рассматриваются как бинарные отношения между элементами множеств Ω^n и Ω).

В работе приняты следующие обозначения: $|X|$ — мощность множества X , $\mathfrak{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X ; $\bigtimes_{i=1}^n X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ — декартово произведение множеств X_i ; X^n — декартова степень множества X ; $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)$ — элемент из X^n ; $x^n = (x, x, \dots, x)$; $\Delta(X^n)$ — диагональ, т. е. подмножество X^n , состоящее из всех элементов x^n ; $\forall$ — квантор всеобщности, $\exists$ — квантор существования, $\rightarrow$ — импликация, $\leftrightarrow$ — логическая эквивалентность, $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция.

§ 1. Суперпозиции n -отношений

1. 1. Множество S с одной $(n+1)$ -арной операцией

$$(1) \quad s_0 s_1 s_2 \dots s_n = s \quad (s_i, s \in S)$$

называется *оперативом* ($(n+1)$ -оперативом). В дальнейшем, как правило, вместо (1) операцию в S будем записывать в виде

$$s = s_0 \bar{s},$$

где

$$\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n.$$

Непустое подмножество A оператива S назовем его s -идеалом, если

$$\forall_{a \in A, \bar{s} \in S^n} a\bar{s} \in A;$$

v -идеалом (l -идеалом), если

$$\forall_{\bar{a} \in A^n, s \in S} s\bar{a} \in A \quad \left(\bar{a} \in S^n \setminus (S \setminus A)^n \right).$$

Всякий v -идеал является, очевидно, l -идеалом. Если s -идеал A является одновременно и v -идеалом (соответственно l -идеалом), то будем называть его sv -идеалом (sl -идеалом). Если оператив S содержит sl -идеал, состоящий из единственного элемента O , то O называется нулем оператива S .

1.2. Операция (1) индуцирует на декартовой степени S^n оператива S бинарную операцию: для любых $\bar{s}, \bar{t} \in S^n$

$$\bar{s}\bar{t} = (s_1 \bar{t}, s_2 \bar{t}, \dots, s_n \bar{t}).$$

Оператив S называется менгеровским, если в нем выполняется «суперассоциативный» [1—2] («подстановочный» [3]) закон: для любых $s_0 \in S, \bar{s}, \bar{t} \in S^n$

$$(2) \quad (s_0 \bar{s}) \bar{t} = s_0 (\bar{s} \bar{t}).$$

При $n=1$ тождество (2) сводится к обычному ассоциативному закону, т. е. менгеровский оператив при $n=1$ является полугруппой.

Известно [2], что оперативом Менгера является множество $S_n(\Omega)$ всех n -местных функций, всюду определенных на каком-либо множестве Ω , со значениями в этом же множестве; операция в $S_n(\Omega)$ — суперпозиция функций. Ниже (см. п. 1.6) будет приведен еще один важный пример менгеровского оператива, содержащего $S_n(\Omega)$ в качестве подоператива.

Обозначим через $M_1[S], M_2[S]$ подмножества оператива S^n , через $M_3[S]$ — подмножество оператива S со следующими свойствами: для любых $\bar{c} \in S^n, a \in S$

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{c} \in M_1[S] \leftrightarrow \forall_{x \in S, \bar{y} \in S^n} (x\bar{y})\bar{c} = x(\bar{y}\bar{c}), \\ \bar{c} \in M_2[S] \leftrightarrow \forall_{x \in S, \bar{y} \in S^n} (x\bar{c})\bar{y} = x(\bar{c}\bar{y}), \\ a \in M_3[S] \leftrightarrow \forall_{\bar{x}, \bar{y} \in S^n} (a\bar{x})\bar{y} = a(\bar{x}\bar{y}). \end{cases}$$

Если оператив S содержит нуль, то ни одно из множеств $M_i[S]$ не пусто: $S^n \setminus (S^n \setminus \{O\})^n \subseteq M_1[S] \cap M_2[S], O \in M_3[S]$.

Теорема. Множества $M_1[S], M_2[S]$, если они не пусты, являются подполугруппами оператива S^n ; $M_3[S]$ — менгеровским подоперативом оператива S .

Доказательство. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y}$ — любые элементы из $S^n, \bar{c} \in M_1[S]$. Из (3) следует $(x_i \bar{y})\bar{c} = x_i(\bar{y}\bar{c})$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и, по определению индуцированной операции в $S^n, (\bar{x}\bar{y})\bar{c} = \bar{x}(\bar{y}\bar{c})$. Отсюда и из (3) для любых $\bar{a}, \bar{c} \in M_1[S]$ имеем

$$(\bar{x}\bar{y})(\bar{a}\bar{c}) = ((\bar{x}\bar{y})\bar{a})\bar{c} = (x(\bar{y}\bar{a})\bar{c}) = x((\bar{y}\bar{a})\bar{c}) = x(\bar{y}(\bar{a}\bar{c})),$$

и $\bar{a}\bar{c} = (a_1 \bar{c}, a_2 \bar{c}, \dots, a_n \bar{c}) \in M_1[S]$. Точно так же для любых $\bar{a}, \bar{c} \in M_2[S]$

$$(x(\bar{a}\bar{c}))\bar{y} = ((x\bar{a})\bar{c})\bar{y} = (x\bar{a})(\bar{c}\bar{y}) = x(\bar{a}(\bar{c}\bar{y})) = x((\bar{a}\bar{c})\bar{y}).$$

При этом $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$, для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in M_i[S]$ ($i=1, 2$), и M_i -полугруппы.

Аналогично для любых $a \in M_3 = M_3[S]$, $\bar{c} \in (M_3)^n$, $\bar{x}, \bar{y} \in S^n$, имеем

$$((a\bar{c})\bar{x})\bar{y} = (a(\bar{c}\bar{x}))\bar{y} = a((\bar{c}\bar{x})\bar{y}) = a(\bar{c}(\bar{x}\bar{y})) = (a\bar{c})(\bar{x}\bar{y}),$$

и

$$a\bar{c} \in M_3.$$

1. 3. Бинарным отношением [4] между элементами множеств Ω, Π называется любое подмножество a декартова произведения $\Pi \times \Omega$. Срезом бинарного отношения a через элемент $\xi \in \Omega$ называется множество $a\langle \xi \rangle$ всех элементов $\eta \in \Pi$ таких, что $(\eta, \xi) \in a$. Срезом отношения a через подмножество $\Omega' \subseteq \Omega$ называется множество $a\langle \Omega' \rangle = \bigcup_{\xi \in \Omega'} a\langle \xi \rangle^1$. Через a^{-1} обозначается следующее бинарное отношение из $\mathfrak{P}(\Omega \times \Pi)$: для любых $\xi \in \Omega, \eta \in \Pi$

$$(\xi, \eta) \in a^{-1} \leftrightarrow (\eta, \xi) \in a.$$

Тогда $a\langle \Omega \rangle$ (соответственно $a^{-1}\langle \Pi \rangle$) — множество всех $\eta \in \Pi$ ($\xi \in \Omega$), для которых существует элемент $\xi \in \Omega$ ($\eta \in \Pi$) такой, что $(\eta, \xi) \in a$.

Пусть a — произвольное бинарное отношение из $\mathfrak{P}(\Pi \times \Omega)$, Σ — подмножество Ω . Ограничением отношения a на множестве Σ называется следующее бинарное отношение $a|_{\Sigma} \in \mathfrak{P}(\Pi \times \Omega)$: для любых $\xi \in \Omega, \eta \in \Pi$

$$(\eta, \xi) \in a|_{\Sigma} \leftrightarrow \xi \in \Sigma \wedge (\eta, \xi) \in a.$$

Если $a \subseteq \Omega \times \Pi$, $b \subseteq \Pi \times \Sigma$, то произведением отношений a и b называется следующее отношение $a \circ b \subseteq \Omega \times \Sigma$: для любых $\zeta \in \Omega, \xi \in \Sigma$

$$(4) \quad (\zeta, \xi) \in a \circ b \leftrightarrow \exists_{\eta \in \Pi} (\zeta, \eta) \in a \wedge (\eta, \xi) \in b.$$

Известно, что умножение бинарных отношений ассоциативно: для любых $a \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $b \in \mathfrak{P}(\Omega_2 \times \Omega_3)$, $c \in \mathfrak{P}(\Omega_3 \times \Omega_4)$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Умножение бинарных отношений вполне дистрибутивно относительно операции объединения: для любых $a, a_x \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $b, b_x \in \mathfrak{P}(\Omega_2 \times \Omega_3)$

$$(5) \quad \begin{aligned} a \circ (\bigcup_x b_x) &= \bigcup_x a \circ b_x, \\ (\bigcup_x a_x) \circ b &= \bigcup_x a_x \circ b. \end{aligned}$$

1. 4. Пусть Ω — произвольное множество; k -местным отношением между элементами множества Ω называется любое подмножество a декартовой степени Ω^k . Обозначим через $P_n(\Omega) = P$ множество всех $(n+1)$ — местных отношений a между элементами множества Ω . Вместо $(\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in a$ будем писать $(\eta, \bar{\xi}) \in a$, считая a бинарным отношением из $\mathfrak{P}(\Omega \times \Omega^n)$. Обозначим далее

$$pr_s a = a\langle \Omega^n \rangle, \quad pr_v a = a^{-1}\langle \Omega \rangle.$$

¹⁾ Здесь, как и в ряде других мест, есть отличия от обозначений В. В. Вагнера [4] и близких к нему работ (например, [5]).

По определению $pr_s a(pr_v a)$ — множество всех элементов $\eta \in \Omega$ (соответственно $\bar{\xi} \in \Omega^n$), для которых существует элемент $\bar{\xi} \in \Omega^n$ ($\eta \in \Omega$) такой, что $(\eta, \bar{\xi}) \in a$.

Для всякого $\bar{a} = (a_i) \in P^n$ обозначим через $\mathbf{a} = \bar{a}_A$ полупрямое произведение первого рода [4] отношений $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\mathbf{a} = \bar{a}_A = \bigtriangleup_{i=1}^n a_i.$$

Иначе говоря, для любых $\bar{\xi}, \bar{\eta} = (\eta_i) \in \Omega^n$

$$(6) \quad (\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in \mathbf{a} \leftrightarrow \bigvee_i (\eta_i, \bar{\xi}) \in a_i.$$

При этом

$$\mathbf{a}^{-1} \langle \Omega^n \rangle = \bigcap_{i=1}^n pr_v a_i.$$

Если $a'_i = a_i|_{\Sigma}$, где $\Sigma = \mathbf{a}^{-1} \langle \Omega^n \rangle$, $\bar{a}' = (a'_i)$, то $\bar{a}_A = (\bar{a}')_A$ и для любых $\bar{\xi} \in \Omega^n$, $\Pi \subseteq \Omega^n$

$$\mathbf{a} \langle \bar{\xi} \rangle = \bigtimes_{i=1}^n a'_i \langle \bar{\xi} \rangle, \quad \mathbf{a} \langle \Pi \rangle = \bigtimes_{i=1}^n a'_i \langle \Pi \rangle.$$

Для произвольного подмножества $A \subseteq P$ обозначим через A_A множество всех отношений $\mathbf{a} = \bar{a}_A$, где $\bar{a} \in A^n$.

1. 5. Определим в P $(n+1)$ -арную операцию $a * \bar{b} = a * (b_i) = ab_1 b_2 \dots b_n$ ($a, b_i \in P$): для любых $\bar{\xi} \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$, $a \in P$, $\bar{b} = (b_i) \in P^n$

$$(7) \quad (\eta, \bar{\xi}) \in a * \bar{b} \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in \Omega^n} (\eta, \bar{\zeta}) \in a \wedge \{\bigvee_i (\zeta_i, \bar{\xi}) \in b_i\}$$

или, что то же самое

$$(8) \quad (\eta, \bar{\xi}) \in a * \bar{b} \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in \Omega^n} (\eta, \bar{\zeta}) \in a \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{b}_A,$$

т. е.

$$a * \bar{b} = a \circ \mathbf{b} = a \circ \bar{b}_A.$$

Предполагается, что P содержит отношение O такое, что $pr_s O = \emptyset$, $pr_v O = \emptyset$. O является нулем, оператора P . При этом $a * \bar{b} = O$, если $\mathbf{b} = O$.

Бинарную операцию, индуцированную в P^n операцией (7) (см. п. 1. 1) обозначим также через $*$: если $\bar{b} = (b_i)$, $\bar{c} = (c_i) \in P^n$, то (см. п. 1. 4)

$$\bar{b} * \bar{c} = (b_1 * \bar{c}, b_2 * \bar{c}, \dots, b_n * \bar{c}) = \bigtriangleup_{i=1}^n (b_i * \bar{c}) = \bigtriangleup_{i=1}^n (b_i \circ \bar{c}_A).$$

Из (6), (8), (4), (7) следует для любых $\bar{\eta} = (\eta_i)$, $\bar{\xi} \in \Omega^n$

$$(9) \quad (\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in (\bar{b} * \bar{c})_A \leftrightarrow \bigvee_i (\eta_i, \bar{\xi}) \in b_i * \bar{c} = b_i \circ \bar{c}_A \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigvee_i \exists_{\bar{\zeta}_i \in \Omega^n} (\eta_i, \bar{\zeta}_i) \in b_i \wedge (\bar{\zeta}_i, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A,$$

$$(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in \bar{b}_A \circ \bar{c}_A \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in \Omega^n} (\bar{\eta}, \bar{\zeta}) \in \bar{b}_A \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in \Omega^n} \bigvee_i (\eta_i, \bar{\zeta}) \in b_i \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A.$$

Таким образом,
(10)

$$\bar{b}_A \circ \bar{c}_A \subseteq (\bar{b} * \bar{c})_A.$$

При $n=1$ операции $*$ и $\circ$ совпадают; при $n>1$ существует элемент $\bar{c} \in P^n$, для которого при некотором $\bar{\xi} \in \Omega^n$ множество $\bar{c}_A \langle \bar{\xi} \rangle$ содержит более одного элемента; например, $(\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A$, $(\bar{\varepsilon}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A$ и $\bar{\zeta} \neq \bar{\varepsilon}$. Выберем произвольно элементы $\eta_i \in \Omega$, и пусть $\bar{\eta} = (\eta_i)$. P содержит элементы b_i такие, что $b_1 \langle \bar{\zeta} \rangle = \eta_1$, $b_1 \langle \Omega^n \setminus \{\bar{\zeta}\} \rangle = \gamma_1 \neq \eta_1$, $b_2 \langle \bar{\varepsilon} \rangle = \eta_2$, $b_2 \langle \Omega^n \setminus \{\bar{\varepsilon}\} \rangle = \gamma_2 \neq \eta_2$, $b_j \langle \Omega^n \rangle = \eta_j$ при $j > 2$. Тогда множество $(b \circ c) \langle \bar{\xi} \rangle$ состоит из «векторов» $(\eta_1, \gamma_2, \eta_3, \dots, \eta_n)$, $(\gamma_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n)$ и, возможно, $(\gamma_1, \gamma_2, \eta_3, \dots, \eta_n)$. В то же время из (7), (9) имеем $\eta_i \in (b_i * \bar{c}) \langle \bar{\xi} \rangle$, $\bar{\eta} \in (\bar{b} * \bar{c})_A \langle \bar{\xi} \rangle$. Таким образом, вообще говоря, при $n \neq 1$

$$\bar{b}_A \circ \bar{c}_A \neq (\bar{b} * \bar{c})_A.$$

1. 5. 1. При $n=1$ операция (7) совпадает с обычным умножением бинарных отношений (п. 1. 3), а $P_1(\Omega)$ является полугруппой.

При $n>1$ оператив $P = P_n(\Omega)$ не является менгеровским.

В самом деле из (8) для любых $a \in P$, $\bar{b}, \bar{c} \in P^n$ имеем

$$(a * \bar{b}) * \bar{c} = (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad a * (\bar{b} * \bar{c}) = a \circ (\bar{b} * \bar{c})_A.$$

Вместе с (10) это дает

$$(a * \bar{b}) * \bar{c} \subseteq a * (\bar{b} * \bar{c}).$$

Если $\bar{b}, \bar{c} \in P^n$ и $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in (\bar{b} * \bar{c})_A \setminus (b \circ c)$ (см. п. 1. 5), то обозначим через a отношение из P такое, что $a \langle \bar{\eta} \rangle = \{\alpha\}$, $a \langle \Omega^n \setminus \{\bar{\eta}\} \rangle = \{\beta\}$ ($\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$). Тогда $(\alpha, \bar{\xi}) \in a * (\bar{b} * \bar{c}) \setminus (a * \bar{b}) * \bar{c}$.

1. 5. 2. Элемент $\bar{b} \in P^n$ в п. 1. 5 можно было выбрать проще: пусть $\bar{\eta} = (\eta_i)$ — любой элемент из Ω^n , $b_1 = \{(\eta_1, \bar{\zeta})\}$, $b_i = \{(\eta_i, \bar{\varepsilon})\}$ при $i \neq 1$. Тогда $(\bar{b} * \bar{c})_A = \{(\bar{\eta}, \bar{\xi})\}$, $\bar{b}_A \circ \bar{c}_A = \emptyset$.

Доказательство, приведенное в п. 1. 5 удобно тем, что его можно без изменений использовать в п. 1. 9.

1. 6. Обозначим через $W = W_n(\Omega)$ подмножество $P_n(\Omega)$, состоящее из всех однозначных отношений между элементами множеств Ω^n и Ω . Иначе говоря, отношение a из $P_n(\Omega)$ тогда и только тогда содержится в $W_n(\Omega)$, когда для любых $\eta, \zeta \in \Omega$, $\bar{\xi} \in \Omega^n$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in a \wedge (\zeta, \bar{\xi}) \in a \rightarrow \eta = \zeta.$$

Очевидно, что $W_n(\Omega)$ является подоперативом оператива $P_n(\Omega)$.

Каждому отличному от O отношению $a \in W_n(\Omega)$ взаимно однозначно соответствует n -местная функция f_a с областью определения $pr_v a \subseteq \Omega^n$ и областью значений $pr_s a \subseteq \Omega$: при любых $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$

$$f_a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \eta \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in a.$$

Операция (7) в $W_n(\Omega)$ приводит, как нетрудно убедиться, к суперпозиции функций: если $a, b_i, c \in W_n(\Omega)$, $c = a * \bar{b}$, то

$$f_c = f_a(f_{b_1}, f_{b_2}, \dots, f_{b_n}).$$

Если $pr_v a = \Omega$, то $f_a \in S_n(\Omega)$ (см. п. 1. 2). В дальнейшем мы будем через $S_n(\Omega)$ обозначать подоператив $W_n(\Omega)$, состоящий из всех $a \in W_n(\Omega)$, для которых $Pr_v a = \Omega^n$. $W_1(\Omega)$ является полугруппой всех частичных преобразований множества Ω , а $S_1(\Omega)$ — полугруппой всех его полных преобразований.

Об элементах оператора $P_n(\Omega)$ можно было бы также говорить как о многоместных функциях, но разумеется, многозначных.

1. 6. 1. Если A — подмножество оператора S , то через $\tilde{A}$ обозначим множество всех элементов $\bar{x} \in S^n$, для каждого из которых существует элемент $\bar{a} \in A^n$, удовлетворяющий условию:

$$\forall_{s \in S} s\bar{x} = s\bar{a}$$

Нетрудно проверить, что для элементов $\bar{x}, \bar{y} \in P^n$, где $P = P_n(\Omega)$, условие

$$\forall_{s \in P} s * \bar{x} = s * \bar{y}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{x}_A = \bar{y}_A$ (см. п. 1. 4).

Теорема. $\overline{W_n(\Omega)} = M_1[P_n(\Omega)]$ (см. п. п. 1. 2, 1, 6).

Доказательство. Если $\bar{c} \in W^n$ и $(\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A$, $(\bar{\epsilon}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A$, то $\bar{\epsilon} = \bar{\zeta}$ и, вместо (9), имеем

$$(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in (\bar{b} * \bar{c})_A \leftrightarrow \exists_{\bar{z} \in \Omega^n} (\bar{\eta}, \bar{\zeta}) \in \bar{b}_A \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_A \leftrightarrow (\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in \bar{b}_A \circ \bar{c}_A;$$

в силу (8), $(a * \bar{b}) * \bar{c} = a * (\bar{b} * \bar{c})$ для любых $a \in P$, $\bar{b} \in P^n$, $\bar{c} \in W^n$. Из (8) вытекает справедливость этого же соотношения и для любого $\bar{c} \in \tilde{W}$, т. е. для таких $\bar{c} = (c_i) \in P^n$, что при $|c_j \langle \bar{\zeta} \rangle| > 1$ следует $\bar{\zeta} \notin \bigcap_{i=1}^n pr_v c_i$.

Если же $\bar{c} \notin \tilde{W}$, то в п. п. 1. 5, 1. 5. 1 показано, как подобрать $a \in P$, $\bar{b} \in P^n$ так, чтобы $(a * \bar{b}) * \bar{c} \neq a * (\bar{b} * \bar{c})$.

1. 6. 2. В частности, из п. п. 1. 6. 1. и 1. 2 следует: $W_n(\Omega)$ является менгеровским оператором, а $\tilde{W}$ и W^n — полугруппами.

1. 7. Отношение $u \in P$ назовем цилиндрическим, если для любых $\bar{\xi} \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in u \leftrightarrow \bar{\xi} \in pr_v u \wedge \eta \in pr_s u.$$

Если $pr_s u = \Sigma$, $pr_v u = \Pi$, то будем записывать такое цилиндрическое отношение в виде $u = (\Sigma, \Pi)$. Будем, кроме того, писать $(\Sigma, \{\bar{\xi}\}) = (\Sigma, \bar{\xi})$, $(\{\eta\}, \Pi) = (\eta, \Pi)$.

Бинарное цилиндрическое отношение обычно называют прямоугольным. Обозначим через $C = C_n(\Omega)$ подмножество P , состоящее из всех цилиндрических отношений. Если $\Sigma, \Sigma_i \subseteq \Omega$, $\Pi, \Pi_i \subseteq \Omega^n$, $\bar{a} \in P^n$, $c \in P$, $w_i = (\Sigma_i, \Pi_i)$, $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, то из (7) имеем:

$$(11) \quad (\Sigma, \Pi) * \bar{a} = (\Sigma, a^{-1} \langle \Pi \rangle),$$

$$c * \bar{w} = \left(c \left\langle \bigtimes_{i=1}^n \Sigma_i \right\rangle, \bigcap_{i=1}^n \Pi_i \right).$$

В частности,

$$(12) \quad (\Sigma, \Pi) * \bar{w} = \begin{cases} \left(\Sigma, \bigcap_{i=1}^n \Pi_i \right), & \text{если } \Pi \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \Sigma_i \right) \neq \emptyset, \\ O, & \text{если } \Pi \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \Sigma_i \right) = \emptyset. \end{cases}$$

Если $\Sigma \subseteq \Omega$ ($\Pi \subseteq \Omega^n$), то обозначим через R_Σ (соответственно L_Π) подмножество P , состоящее из O и всех отношений $u = (\Sigma, \Pi') \in C$ (соответственно $(\Sigma', \Pi) \in C$).

Теорема. Множества $L_\Pi(R_\Sigma)$, и только они, являются минимальными ненулевыми s -идеалами (v -идеалами) оператора $P_n(\Omega)$; $C_n(\Omega)$ — его единственным минимальным ненулевым sv -идеалом.

Доказательство. Из (11) следует, что $L_\Pi, R_\Sigma \subseteq C$ являются соответственно s -идеалом, v -идеалом и sv -идеалом оператора $P_n(\Omega)$. Если L — ненулевой v -идеал оператора P содержащийся в L_Π , $u = (\Sigma', \Pi) \in L$, Σ' — произвольное непустое подмножество Ω , ξ — любой элемент из Σ' , $a = (\Sigma, \xi^n)$, то из (12) имеем $(\Sigma, \Pi) = a * u^n \in L$, $L = L_\Sigma$, и L_Σ — минимальный ненулевой v -идеал оператора P ; аналогично R_Π — его минимальный ненулевой s -идеал.

Если A — ненулевой sv -идеал оператора P , $a \in A \setminus \{O\}$, $(\eta, \bar{\xi}) \in a$, $c_i = (\xi_i, \bar{\xi})$, $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, то в силу (11) $a * \bar{c} \in (A \cap C) \setminus \{O\}$. Как и выше, из (12) легко теперь показать, что $C \subseteq A$, и C является минимальным sv -идеалом оператора P .

1. 8. Для любого подмножества $\Pi \subseteq \Omega^n$ обозначим через $pr_j \Pi$ подмножество Ω , состоящее из всех $\zeta_j \in \Omega$, для которых существует $\bar{\zeta} = (\zeta_i) \in \Pi$. Множество $[\Pi] = \bigcap_{i=1}^n pr_i \Pi$ называется (4) декартовым замыканием множества Π .

Если $\Pi = \{\bar{\zeta}^{(j)}\}_{j=1}^n$, где $\bar{\zeta}^{(j)} = (\zeta_1^{(j)}, \zeta_2^{(j)}, \dots, \zeta_n^{(j)})$, то множество $[\Pi] = [\zeta^{(j)}]_{j=1}^n$, состоит из всех векторов $\bar{\zeta}$ вида $(\zeta_1^{(j_1)}, \zeta_2^{(j_2)}, \dots, \zeta_n^{(j_n)})$, где индексы j_x независимо друг от друга пробегают значения $1, 2, \dots, n$.

Теорема. Оператор $M_2[P_n(\Omega)]$ (см. п. 1. 2) состоит из тех и только тех векторов $\bar{b} = (b_j) \in P^n$, которые при любых $\bar{\zeta}^{(j)} \in \Omega^n$, $\eta_j \in \Omega$ удовлетворяют условию:

$$\left\{ \bigvee_{j=1, 2, \dots, n} (\eta_j, \bar{\zeta}^{(j)}) \in b_j \right\} \rightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in [\bar{\zeta}^{(j)}]_{j=1}^n} \bigvee_{j=1, 2, \dots, n} (\eta_j, \bar{\zeta}) \in b_j.$$

Доказательство. Из п. п. 1. 5, 1. 5. 1 следует: для того, чтобы $\bar{b} \in M_2[P]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(13) \quad \bigvee_{\bar{c} = (c_i) \in P^n} (\bar{b} * \bar{c})_A \subseteq \bar{b}_A \circ \bar{c}_A.$$

Если $(\eta_j, \bar{\zeta}^{(j)}) \in b_j$ при $j = 1, 2, \dots, n$ и каких-либо $\eta_j \in \Omega$, $\bar{\zeta}^{(j)} \in \Omega^n$, то выберем в качестве $c_i \in P$ следующие отношения из C : $c_i = (\{\zeta_i^{(j)}\}_{j=1}^n, \Omega)$ (см. п. 1. 7).

Из (11) следует тогда, что $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in (\bar{b} * \bar{c})_A$ при любом $\bar{\xi} \in \Omega^n$ и, в силу (13), $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in \bar{b}_A \circ \bar{c}_A$. Но $\bar{c}_A$ состоит в силу п. 1. 4 из всех пар $(\bar{\zeta}, \bar{\xi})$, где $\bar{\zeta} \in [\bar{\zeta}^{(j)}]_{j=1}^n$,

$\bar{\xi} \in \Omega^n$. Вследствие (4) существует $\bar{\zeta} \in [\bar{\zeta}^{(j)}]_{j=1}^n$ такой, что $(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) \in \bar{b}_A$, т. е. $(\eta_j, \bar{\zeta}) \in b_j$ при $j=1, 2, \dots, n$ (см. п. 1. 4).

Достаточность условий теоремы вытекает непосредственно из (7).

1. 8. 1. Из теоремы п. 1. 8 следует, что $M_2[P]$ содержит, например, всякий элемент $\bar{c} = (c_i) \in C^n$, для которого существует такой индекс j , что $c^{-1}\langle \Omega \rangle = pr_v c_j$ и $c_i \langle \Omega^n \rangle \subseteq c_j \langle \Omega^n \rangle$ при $i=1, 2, \dots, n$. $M_2[P]$ содержит также все множество $P^n \setminus (P \setminus \{O\})^n$. Однако в общем случае строение элементов из $M_2[P_n(\Omega)]$ более сложно.

1. 8. 2. Теорема. $M_3[P_n(\Omega)] = \{O\}$

Доказательство. Для любого $\bar{x} \in P^n$ в силу п. 1. 5, $O * \bar{x} = O$. Поэтому $(O * \bar{x}) * \bar{y} = O * (\bar{x} * \bar{y}) = O$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in P^n$.

Если a — любой ненулевой элемент из P и $(\gamma, \bar{\eta}) \in a$, то для элементов $\bar{b}, \bar{c}$ п. 1. 5. 2 имеем $(a * \bar{b}) * \bar{c} = O$ и в то же время $(\gamma, \bar{\xi}) \in a * (\bar{b} * \bar{c})$.

1. 9. Обозначим через $F = F_n(\Omega)$ подмножество $P_n(\Omega)$, состоящее из всех его полных отношений, т. е. таких отношений $a \in P_n(\Omega)$, для которых $pr_v a = \Omega^n$.

Теорема.

$$M_1[F_n(\Omega)] = (S_n(\Omega))^n; \quad M_2[F_n(\Omega)] = F_n(\Omega) \cap M_2[P_n(\Omega)];$$

$$M_3[F_n(\Omega)] = F_n(\Omega) \cap C_n(\Omega).$$

Доказательство первых двух утверждений — такое же, как и в п. п. 1. 6. 1, 1. 8. Следует лишь заметить, что $\tilde{A} = A^n$ для любого подмножества $A \subseteq F_n(\Omega)$ и что $M_1[F] = M_1[P] \cap F^n$.

Если $c \in F_n(\Omega)$ и $pr_s c = \Pi (\subseteq \Omega)$, то обозначим такой элемент c через c_Π . Из (11) следует

$$\bigvee_{\Pi \subseteq \Omega, \bar{x} \in F^n} c_\Pi * \bar{x} = c_\Pi$$

и, при любых $\bar{x}, \bar{y} \in F^n$ $(c_\Pi * \bar{x}) * \bar{y} = c_\Pi * (\bar{x} * \bar{y}) = c_\Pi$. Если же $c \notin F_n(\Omega) \cap C^n$ то, как и в п. 1. 5. 1, подберем элементы $\bar{x}, \bar{y} \in F^n$ такие, что $(c * \bar{x}) * \bar{y} \neq c * (\bar{x} * \bar{y})$.

1. 10. Пусть r, t — фиксированные кардинальные числа. Обозначим через $P_{nrt}(\Omega)$ подмножество $P_n(\Omega)$, состоящее из всех отношений $a \in P_n(\Omega)$ таких, что $|pr_s a| < r, |pr_v a| < t$; если μ — наименьшее кардинальное число $> |\Omega^n|$, то обозначим $P_{nr\mu}(\Omega) = P_{nr}(\Omega)$. Пусть далее $W_{nr}(\Omega) = P_{nr}(\Omega) \cap W_n(\Omega)$, $W_{nrt}(\Omega) = P_{nrt}(\Omega) \cap W_n(\Omega)$.

Все подмножества $P_{nrt}(\Omega)$ являются подоперативами оператора $P_n(\Omega)$, а подмножества $P_{nr}(\Omega)$ — его s -идеалами.

В самом деле, для любых $a \in P_{nr}(\Omega)$, $\bar{x} = (x_i) \in P^n$ имеем $pr_s(a * \bar{x}) \subseteq pr_s a$, $|pr_s(a * \bar{x})| \leq |pr_s a|$ и $a * \bar{x} \in P_{nr}(\Omega)$. Если, кроме того, все $x_i \in P_{nrt}(\Omega)$, то $|pr_v x_i| < t$ ($i=1, 2, \dots, n$), $|x^{-1}\langle \Omega^n \rangle| = |\bigcap_{i=1}^n pr_v x_i| < t$ и, в силу (7), $|pr_v(a * \bar{x})| \leq |x^{-1}\langle \Omega^n \rangle| < t$, $a * \bar{x} \in P_{nrt}(\Omega)$.

Пересечение подоператива $W_n(\Omega) \subset P_n(\Omega)$ с s -идеалом или подоперативом является s -идеалом и соответственно подоперативом в $W_n(\Omega)$. Отсюда следует:

Все $W_{nrt}(\Omega)$ являются подоперативами $W_n(\Omega)$, а $W_{nr}(\Omega)$ — s -идеалами.

Очевидно, что $P_{n11}(\Omega) = W_{n11}(\Omega) = W_{n1}(\Omega) = \{O\}$. Если $r > |\Omega|$, $t > |\Omega^n|$, то $P_{nrt}(\Omega) = P_{nr}(\Omega) = P_n(\Omega)$, $W_{nrt}(\Omega) = W_{nr}(\Omega) = W_n(\Omega)$. Заметим, что для любого оператива $W_{nrt}(\Omega)$ можно считать $r \leq t$.

1. 11. Идеалами полугруппы $W_1(\Omega)$ являются, как известно [8], подмножества $W_{1r}(\Omega)$, и только они. При $n < 1$ справедлива следующая теорема:

Теорема. При $n > 1$ подоперативы $W_{nqt}(\Omega)$ (в частности $W_{nt}(\Omega)$), где $q = 2$ или q — бесконечное $< r$, и только они, являются собственными sv -идеалами оператива $W_{nrt}(\Omega)$ (соответственно $W_{nr}(\Omega)$).

Доказательство. Пусть ненулевой sv -идеал A оператива $D = W_{nrt}(\Omega)$ содержит элемент a такой, что $|pr_s a| = k$. Если $\xi \in \Omega$, $c = (\xi, pr_v a)$, $\bar{a} = (a, c, c, \dots, c)$, то, как и в [7], для любого элемента $b \in W_{nkt}(\Omega)$ нетрудно подобрать элементы $x \in D$, $\bar{y} \in D^n$ такие, что $(x * \bar{a}) * \bar{y} = b$. Следовательно, $W_{nkt}(\Omega) \subseteq A$.

Если при этом k — конечное число, отличное от 1, $l \leq k^n$, $l < r$, то найдутся элементы $\bar{a} \in D^n$, $\bar{\xi}_j \in \Omega^n$ ($j = 1, 2, \dots, l$), $w \in D$, такие что $|a^{-1} \langle \Omega^n \rangle| = t$, все элементы $a \langle \bar{\xi}_j \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n$) различны между собой, и все элементы $w \circ a \langle \bar{\xi}_j \rangle$ различны между собой. Тогда $w \circ a \in W_{nlt}(\Omega) \cap A$ и, следовательно $W_{nlt}(\Omega) \subseteq A$. Повторяя процесс достаточное число раз, получим, что $W_{nlt}(\Omega) \subseteq A$ при любом конечном $l \leq |\Omega|$.

1. 11. 1. При $n = 1$ понятия sv -идеала и sl -идеала совпадают. Из п. 1. 11 следует:

При $n > 1$ оператив $W_{nrt}(\Omega)$ не содержит собственных sl -идеалов.

В самом деле, пусть A — sl -идеал оператива $W_{nrt}(\Omega)$, отличный от $\{O\}$. Тогда A является и sv -идеалом; из п. 1. 11 следует, что $W_{n2t}(\Omega) \subseteq A$. Пусть k — любое кардинальное число $< r$, x — произвольный элемент из $W_{nrt}(\Omega)$, $\xi \in \Omega$, $c = (\xi, pr_v x)$, $\bar{c} = (x, c, c, \dots, c)$; w — такой элемент из $W_n(\Omega)$, что $pr_v w = pr_s x \times \{\xi\}^{n-1}$, и $w(\alpha, \xi, \xi, \dots, \xi) = \alpha$ для любого $\alpha \in pr_s x$. Тогда $|pr_v w| = |pr_s x| = pr_v x < r$; следовательно, $w \in W_{nrt}(\Omega)$. В то же время из $c \in A$ следует $x = w * \bar{c} \in A$. В силу произвола в выборе x , $A = W_{nrt}(\Omega)$.

1. 12. Обозначим $S_{nrt}(\Omega) = S_n(\Omega) \cap W_{nrt}(\Omega)$. Как и в п. п. 1. 10—1. 11. 1, справедливо следующее предположение:

Все подмножества $S_{nq}(\Omega)$ являются s -идеалами оператива $S_n(\Omega)$. При $n > 1$ подоперативы $S_{nq}(\Omega)$, где $q = 2$ или q — бесконечное $< r$, и только они, являются собственными sv -идеалами оператива $S_{nr}(\Omega)$. $S_{nr}(\Omega)$ не содержит собственных sl -идеалов.

1. 13. Обозначим через $V_n(\Omega)$ подмножество $W_n(\Omega)$, состоящее из всех отношений α вида

$$\alpha = \bigtriangleup_{i=1}^n \alpha_i$$

где Δ — полупрямое произведение второго рода [4] взаимно однозначных бинарных отношений $\alpha_i \in \mathfrak{P}(\Omega^2)$. Иначе говоря, $\alpha \in V_n(\Omega)$ тогда и только тогда,

когда для любого $i = 1, 2, \dots, n$ оно индуцирует взаимно однозначное преобразование a_i множества Ω (см. п. п. 1. 4, 1. 8):

$$\forall_{\xi, \eta \in \Omega} (\eta, \xi) \in a_i \leftrightarrow \exists_{\bar{\xi} \in \Omega^n} (\eta, \bar{\xi}) \in a \wedge \{\xi\} = \text{pr}_i \{\bar{\xi}\}.$$

Очевидно, что $V_n(\Omega)$ является подоперативом $W_n(\Omega)$; пусть $V_{nr}(\Omega) = W_{nr}(\Omega) \cap V_n(\Omega)$. Структуры идеалов оперативов $V_{nr}(\Omega)$ при произвольном n более богаты, чем у $W_{nr}(\Omega)$ и $S_{nr}(\Omega)$ (см. п. п. 1. 10—1. 12).

Теорема. При любых n, r $V_{nr}(\Omega)$ является sl -идеалом оператива $V_n(\Omega)$; $V_{n2}(\Omega)$ — v -идеалом оператива $W_n(\Omega)$. Всякий sv -идеал оператива $V_{nr}(\Omega)$ совпадает с одним из оперативов $V_{nq}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $a \in V = V_n(\Omega)$, $\bar{u} = (u_i) \in V^n$. Если $u_i \in V_{nr}(\Omega)$ при каком-либо i , то $|pr_v u_i| = |pr_s u_i| \leq r$, $|u^{-1}(\Omega)| \leq r$ и, в силу (7), $|pr_s(a * \bar{u})| \leq r$. Точно так же $|pr_s(a * \bar{u})| \leq r$, если $|pr_s a| = |pr_v a| \leq r$.

Если $u_i \in V_{n2}(\Omega)$, то $|u(\Omega^n)| = |u^{-1}(\Omega)| \leq 1$, и при любом $w \in W_n(\Omega)$ либо $w * \bar{u} = O$, либо $|pr_v(w * \bar{u})| = 1$, т. е. $w * \bar{u} \in V_{n2}(\Omega)$.

Наконец, как и в п. 1. 11. 1, можно показать, что для всякого sv -идеала A оператива $V_{nr}(\Omega)$ и любых элементов $a, b \in V_{nr}(\Omega)$ из $a \in A$, $|pr_s a| = k$, $|pr_s b| = k$ следует $b \in A$.

§ 2. Плотные вложения в алгебрах функций

2. 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый класс алгебраических систем, замкнутый относительно гомоморфизмов из некоторого класса Φ (содержащего все изоморфизмы систем $A \in \mathfrak{A}$); $\mathfrak{q}$ — бинарное отношение в классе $\mathfrak{A}$. Вместо $(A, B) \in \mathfrak{q}$ будем писать $B \in \mathfrak{q}\langle A \rangle$. Гомоморфизм f системы B называется собственным, если он не является изоморфизмом; тождественным на подсистеме $A \subseteq B$, если $fa = a$ для любого элемента $a \in A$. Предполагается, что отношение $\mathfrak{q}$ удовлетворяет для любых $A, B, C \in \mathfrak{A}$, и произвольного изоморфизма f условиям:

1. $B \in \mathfrak{q}\langle A \rangle \rightarrow A \subseteq B$,
2. $B \in \mathfrak{q}\langle A \rangle \wedge A \subseteq C \subseteq B \rightarrow C \in \mathfrak{q}\langle A \rangle$,
3. $B \in \mathfrak{q}\langle A \rangle \rightarrow fB \in \mathfrak{q}\langle fA \rangle$.

Пусть $B \in \mathfrak{q}\langle A \rangle$. Система A называется $\mathfrak{q}$ -плотной в B [9], если 1) для всякой системы $C \in \mathfrak{q}\langle A \rangle$ существует тождественный на A гомоморфизм $f \in \Phi$, отображающий C в B , и 2) всякий эндоморфизм $f \in \Phi$ системы B , тождественный на A , является тождественным на B . A называется $\mathfrak{q}^*$ -плотной в B , если 1) всякий собственный гомоморфизм $f \in \Phi$ системы B , при котором $fB \in \mathfrak{q}\langle fA \rangle$, индуцирует собственный гомоморфизм на A и 2) для любой системы $C \in \mathfrak{q}\langle A \rangle$ ($C \neq B$, $C \supseteq B$) существует собственный гомоморфизм $f \in \Phi$, тождественный на A и такой, что $fC \in \mathfrak{q}\langle A \rangle$.

Всякая $\mathfrak{q}^*$ -плотная подсистема является $\mathfrak{q}$ -плотной. Значение этих понятий заключается, прежде всего, в следующей теореме.

Пусть A — $\check{\mathfrak{q}}$ -плотная подсистема системы B , A' — $\mathfrak{q}^*$ -плотная подсистема C , f — изоморфизм системы A' на систему A . Существует, и притом единственный изоморфизм Φ системы C в B , являющийся продолжением изоморфизма f ; $\Phi C = B$.

С помощью этой теоремы найдены, например, абстрактные характеристики ряда классов полугрупп и других алгебраических систем (см. например, [9—13]). В настоящем § будет найден ряд плотных вложений в операторах многоместных отношений. В качестве класса $\mathfrak{K}$ мы, как правило не оговаривая этого, будем рассматривать класс $\mathfrak{M}_n$ всех $(n+1)$ -оперативов; в качестве Φ — класс всех гомоморфизмов операторов из $\mathfrak{M}_n$. В классе $\mathfrak{M}_n$ введем следующее отношение $\mathfrak{q}_L$: $(A, S) \in \mathfrak{q}_L$, если $A^n \subseteq M_1[S]$ и

$$(14) \quad \bigvee_{s \in S, \bar{i} \in S^n, \bar{a} \in A^n} (s\bar{i})\bar{a} \in A \rightarrow \bar{i}\bar{a} \in A^n.$$

Далее будем писать $(A, S) \in \mathfrak{q}_x$ ($x = s, v, sl, sv$), если $A^n \subseteq M_1[S]$ и A является x -идеалом оператора S . В этом случае $\check{\mathfrak{q}}_x$ -плотный ($\mathfrak{q}_x^*$ -плотный) подоператив будем называть плотным $\check{x}$ -идеалом (и соответственно x^* -идеалом). Все рассмотрения остаются в силе, если $\mathfrak{M}_n$ заменить его подклассом $\mathfrak{M}'_n$ всех менгеровских $(n+1)$ -оперативов; разумеется условие $A^n \subseteq M_1[S]$ при этом становится излишним.

2. 2. Часто в настоящем параграфе тот или иной подоператив $A \subseteq P_n(\Omega)$ одновременно является подоперативом некоторого «абстрактного» оператора S . Операцию в S будем обозначать, как и в п. 1. 1—1. 2, через $a\bar{b}$; операцию в A — через $a\bar{b}$ и $a * \bar{b}$; $\circ$ означает умножение бинарных отношений (4).

Вместо $(\eta, \bar{\xi}) \in a$ или $(\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in a$, где $a \in W = W_n(\Omega)$, $\bar{a} \in W^n$ (см. п. 1. 6), иногда будем писать $\eta = a\bar{\xi}$, $\bar{\zeta} = a\bar{\xi}$.

Если $(n+1)$ -оператив S содержит подоперативы $A \subseteq W_n(\Omega)$, $B \subseteq P_n(\Omega)$, то для каждого $s \in S$ обозначим:

$$(15) \quad \Phi s = s^* = \bigcup_{\bar{a} \in A^n, s\bar{a} \in B} (s\bar{a}) \circ a^{-1}$$

Лемма. Пусть A, B — подоперативы оператора S , $B \subseteq P_n(\Omega)$, $A \subseteq W_n(\Omega) \cap B$, $A^n \subseteq M_1[S]$ (см. п. 1. 2). Если A, B удовлетворяют условиям

$$(16) \quad \bigvee_{\substack{j=1,2,\dots,n; \zeta_j \in \Omega; \\ \bar{\xi} \in \Omega^n, \bar{a}_i \in A^n, t_i \in S}} (\bar{\xi}, \bar{\eta}_j) \in a_j \wedge (\zeta_j, \bar{\eta}_j) \in t_j \bar{a}_j \wedge \\ \wedge t_j \bar{a}_j \in B \rightarrow \exists_{\bar{\eta} \in \Omega^n, \bar{a} \in A^n} (\zeta_j, \bar{\eta}) \in t_j \bar{a} \wedge t_j \bar{a} \in B \wedge (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in a,$$

$$(17) \quad \bigvee_{b \in B, \bar{a} \in B^n, s \in S} b^* = b \wedge (s\bar{a})^* = s^* * \bar{a}$$

и условию (14), то отображение Φ , определенное формулой (15), является гомоморфизмом оператора S в $P_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $s \in S, \bar{i} \in S^n$. По определению (15),

$$(s\bar{i})^* = \bigcup_{\bar{a} \in A^n, (s\bar{i})\bar{a} \in B} (s\bar{i})\bar{a} \circ a^{-1}.$$

Из $A^n \subseteq M_1[S]$ следует $(s\bar{i})\bar{a} = s(\bar{i}\bar{a})$. В силу (14), при $(s\bar{i})\bar{a} \in B$ имеем $\bar{i}\bar{a} \in B^n$, $t_i\bar{a} \in B$ при $i = 1, 2, \dots, n$, и, обозначая $\bar{i}^* = (t_i^*)$, получим вследствие (17) и п. 1. 6. 1

$$(s\bar{i})\bar{a} = s(\bar{i}\bar{a}) = s^* * (\bar{i}^* * \bar{a}) = (s^* * \bar{i}^*) * \bar{a} = (s^* * \bar{i}^*) \circ \mathbf{a}$$

$$(s\bar{i})^* = \bigcup_{\bar{a} \in A^n, (s\bar{i})\bar{a} \in B} (s^* * \bar{i}^*) \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \subseteq s^* * \bar{i}^*$$

Докажем теперь противоположное включение. Из (7), (15) при любых $\bar{\xi} \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$ имеем

$$(\eta, \bar{\xi}) \in s^* * \bar{i}^* \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in \Omega^n} \{(\eta, \bar{\zeta}) \in s^* \wedge \bigvee_{i=1, 2, \dots, n} (\zeta_i, \bar{\xi}) \in t_i^* = \bigcup_{\bar{a}_i \in A^n, t_i \bar{a}_i \in B} t_i \bar{a}_i \circ \mathbf{a}_i^{-1}\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists_{\substack{\bar{\zeta}, \bar{\eta}_i \in \Omega^n, \\ \bar{a}_i \in A^n}} (\eta, \bar{\zeta}) \in s^* \wedge t_i \bar{a}_i \in B \wedge (\zeta_i, \bar{\eta}_i) \in t_i \bar{a}_i \wedge (\bar{\xi}, \bar{\eta}_i) \in \mathbf{a}_i.$$

Вместе с (16), (5), (7), (8) это дает

$$(\eta, \bar{\xi}) \in s^* * \bar{i}^* \rightarrow \exists_{\substack{\bar{a} \in A^n, \\ \bar{\eta}, \bar{\zeta} \in \Omega^n}} (\eta, \bar{\zeta}) \in s^* \wedge (\zeta_i, \bar{\eta}) \in t_i \bar{a} \wedge t_i \bar{a} \in B \wedge (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \mathbf{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists_{\bar{a} \in A^n} (\eta, \bar{\xi}) \in (s^* * \bar{i}\bar{a}) \circ \mathbf{a}^{-1} = (s\bar{i}\bar{a})^* \circ \mathbf{a}^{-1} = [(s\bar{i})^* * \bar{a}] \circ \mathbf{a}^{-1} =$$

$$= (s\bar{i})^* \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \rightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in (s\bar{i})^*,$$

т. е.

$$s^* * \bar{i}^* \subseteq (s\bar{i})^*.$$

2. 3. Лемма. Пусть оператор S содержит подоператоры A, B , удовлетворяющие условиям: $B \subseteq W_n(\Omega)$, $A^n \subseteq B^n \cap M_1[S]$ (см. п. 1. 2) и при любых $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in B^n$, $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \in \Omega^n$ (см. п. 1. 4)

$$(18) \quad \bar{b}_1 \bar{\eta} = \bar{b}_2 \bar{\eta}_2 \rightarrow \exists_{\substack{\bar{a}_i \in A^n \\ \bar{\eta} \in \text{pr}_v \bar{a}_1 \cap \text{pr}_v \bar{a}_2}} \bar{b}_1 * \bar{a}_1 = \bar{b}_2 * \bar{a}_2 \in A^n \wedge \bar{\eta}_i = \mathbf{a} \bar{\eta}.$$

Тогда для S, A и B выполняются условия (16),

$$(19) \quad \bigvee_{\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in B^n, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \in \Omega^n, s \in S} \bar{b}_1 \bar{\eta}_1 = \bar{b}_2 \bar{\eta}_2 \wedge s\bar{b}_1 \in B \wedge s\bar{b}_2 \in B \rightarrow s\bar{b}_1 \langle \bar{\eta}_1 \rangle = s\bar{b}_2 \langle \bar{\eta}_2 \rangle$$

и $\bar{s}^* \in W_n(\Omega)$ для любого $s \in S$.

Доказательство. Пусть $\bar{b}_1 \bar{\eta}_1 = \bar{b}_2 \bar{\eta}_2 = \bar{\xi}$; вследствие (18), существуют элементы $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A^n$, $\bar{\eta} \in \Omega$ такие, что

$$\bar{b}_1 * \bar{a}_1 = \bar{b}_2 * \bar{a}_2 \wedge (\bar{\eta}_i, \bar{\eta}) \in \mathbf{a}_i.$$

Тогда из (8) и (4) имеем для всякого элемента $\alpha \in \Omega$

$$(\alpha, \bar{\eta}_1) \in s\bar{b}_1 \leftrightarrow (\alpha, \bar{\eta}) \in (s\bar{b}_1) \circ \mathbf{a}_1 = (s\bar{b}_1) * \bar{a}_1 =$$

$$= s(\bar{b}_1 * \bar{a}_1) = s(\bar{b}_2 * \bar{a}_2) = (s\bar{b}_2) \circ \mathbf{a}_2 \leftrightarrow (\alpha, \bar{\eta}_2) \in s\bar{b}_2.$$

Пусть теперь

$$t_j \in S, \quad \bar{a}_j \in A^n, \quad t_j \bar{a}_j \in B, \quad \mathbf{a}_j \bar{\eta}_j = \bar{\xi}, \quad (\zeta_j, \bar{\eta}_j) \in t_j \bar{a}_j$$

при $j=1, 2, \dots, n$. В силу (18), существуют элементы $\bar{c}_1^{(1)}, \bar{c}_2^{(1)} \in A^n$, $\bar{\eta}_{n+1} \in \Omega^n$, для которых $\bar{a}_1 * \bar{c}_1^{(1)} = \bar{a}_2 * \bar{c}_2^{(1)} = \bar{a}_{n+1}$, $\bar{\eta}_1 = \bar{c}_1^{(1)} \bar{\eta}_{n+1}$, $\bar{\eta}_2 = \bar{c}_2^{(1)} \bar{\eta}_{n+1}$. Точно так же существуют $\bar{a}_3, \bar{a}_{n+1} \in A^n$, $\bar{\eta}_{n+2} \in \Omega^n$ такие, что

$$\bar{a}_3 * \bar{c}_3 = \bar{a}_{n+1} * \bar{c}_{n+1}, \quad \bar{\eta}_3 = \bar{c}_3 \bar{\eta}_{n+2}, \quad \bar{\eta}_{n+1} = \bar{c}_{n+1} \bar{\eta}_{n+2}$$

или (обозначая $\bar{c}_1^{(1)} * \bar{c}_{n+1} = \bar{c}_1^{(2)}$, $\bar{c}_2^{(1)} * \bar{c}_{n+1} = \bar{c}_2^{(2)}$, $\bar{c}_3 = \bar{c}_3^{(2)}$)

$$\bar{a}_1 * \bar{c}_1 = \bar{a}_2 * \bar{c}_2^{(2)} = \bar{a}_3 * \bar{c}_3^{(2)}, \quad \bar{\eta}_i = \bar{a}_i^{(2)} \bar{\eta}_{n+2} \quad (i=1, 2, 3);$$

при этом $\bar{c}_i^{(2)} \in A^n$, поскольку A^n является в силу п. п. 1. 2, 1. 6. 1 полугруппой. Продолжая таким же образом, найдем элементы $\bar{c}_j \in A^n$ ($j=1, 2, \dots, n$), $\bar{\eta} \in \Omega$, удовлетворяющие условиям:

$$\bar{a}_1 * \bar{c}_1 = \bar{a}_2 * \bar{c}_2 = \dots = \bar{a}_n * \bar{c}_n (= \bar{a}) \in A^n, \quad \bar{c}_i \bar{\eta} = \bar{\eta}_i.$$

Но тогда $\mathbf{a} \bar{\eta} = \bar{a}_i (\bar{c}_i \bar{\eta}) = \bar{a}_i \bar{\eta}_i = \bar{\xi}$ и, вследствие (8), 1. 6. 1, получим при $j=1, 2, \dots, n$

$$(\zeta_j, \bar{\eta}_j) \in t_j \bar{a}_j \wedge (\bar{\eta}_j, \bar{\eta}) \in \bar{c}_j \rightarrow (\zeta_j, \bar{\eta}) \in (t_j \bar{a}_j) \circ \bar{c}_j = (t_j \bar{a}_j) * \bar{c}_j = t_j (\bar{a}_j * \bar{c}_j) = t_j \bar{a}.$$

Из (19) следует, что для любых $s \in S$, $\bar{\xi} \in \Omega^n$ множество $s^* \langle \bar{\xi} \rangle$ содержит не более одного элемента, и $s^* \in W_n(\Omega)$ для любого $s \in S$.

2. 4. Подоператив A оператива $W = W_n(\Omega)$, по аналогии с [9], назовем *слабо транзитивным*, если

$$\bigcup_{a \in A} \text{pr}_v a = \Omega^n \quad \bigcup_{a \in A} \text{pr}_s a = \Omega.$$

Лемма. Если при условиях леммы п. 2. 3 оператив A слабо транзитивен, то для B выполняется условие (17).

Доказательство. Для всякого $\bar{a} \in A^n$ бинарное отношение $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1}$ является тождественным преобразованием множества Ω^n . Из слабой транзитивности оператива A следует, что $\mathbf{e} = \bigcup_{\bar{a} \in A^n} \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1}$ является тождественным преобразованием множества Ω^n . Если $b \in B$, то $b * \bar{a} \in B$ при любом $\bar{a} \in A^n$; следовательно, $b^* = b \circ \mathbf{e} = b$.

Пусть теперь s — любой элемент из S , $\bar{b}$ — произвольный элемент из B^n . Из (15) и (8) следует:

$$(20) \quad s^* * \bar{b} = \bigcup_{\bar{a} \in A^n, s\bar{a} \in B} s\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \circ \bar{b}.$$

В силу (4), при $\bar{a} \in A^n$, $s\bar{a} \in B$ и любых $\bar{\xi} \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$ имеем

$$(21) \quad (\eta, \bar{\xi}) \in s\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \circ \bar{b} \leftrightarrow \exists_{\bar{\xi}, \bar{\epsilon} \in \Omega^n} (\eta, \bar{\zeta}) \in s\bar{a} \wedge (\bar{\epsilon}, \bar{\zeta}) \in \mathbf{a} \wedge (\bar{\epsilon}, \bar{\xi}) \in \bar{b}.$$

Пусть $s\bar{b} \in B$. Если $(\eta, \bar{\xi}) \in s^* * \bar{b}$, то из (21) и леммы п. 2. 3 следует $(\eta, \bar{\xi}) \in s\bar{b}$,

т. е. $s^* * \bar{b} \subseteq s\bar{b}$. Обратно, если $(\eta, \bar{\xi}) \in s\bar{b}$ и $\bar{\xi} = \mathbf{b}\bar{\xi}$, то по условию (18) существуют элементы $\bar{a} \in A^n$, $\bar{\varepsilon} \in \Omega^n$ такие, что $\bar{b} * \bar{a} = \bar{\varepsilon} \in A^n$ и $\bar{\xi} = \mathbf{a}\bar{\varepsilon}$. Тогда из (8), (15) имеем

$$(\eta, \varepsilon) \in (s\bar{b}) \circ \mathbf{a} = s\bar{b} * \bar{a} = s(\bar{b} * \bar{a}) = s\bar{\varepsilon}, \quad s\bar{\varepsilon} (= s\bar{b} * \bar{a}) \in B,$$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in s\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{c}^{-1} \subseteq s^*, \quad (\eta, \bar{\xi}) \in s^* \circ \mathbf{b} = s^* * \bar{b}$$

и, следовательно,

$$\forall_{\bar{b} \in B^n} s\bar{b} \in B \rightarrow s^* \circ \mathbf{b} = s\bar{b}.$$

ε, η — те же, что и в (21). В силу (18) существуют элементы $\bar{c}, \bar{z} \in A^n$, $\bar{\alpha} \in \Omega^n$ такие, что $\bar{\xi} = \mathbf{z}\bar{\alpha}$, $\bar{\xi} = \mathbf{c}\bar{\alpha}$, $\bar{b} * \bar{c} = \bar{a} * \bar{z}$ и, вследствие $s\bar{a} \in B$, $A^n \subseteq M_1[S]$

$$(s\bar{b})\bar{c} = s(\bar{b} * \bar{c}) = s(\bar{a} * \bar{z}) = (s\bar{a}) * \bar{z} \in B.$$

Отсюда и из (21) имеем

$$(\eta, \bar{\xi}) \in s\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b} \rightarrow (\eta, \bar{\alpha}) \in (s\bar{a})\bar{z} = (s\bar{b})\bar{c} \wedge (\bar{\xi}, \bar{\alpha}) \in \mathbf{c} \rightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in (s\bar{b})\bar{c} \circ \mathbf{c}^{-1},$$

и вместе с (20), (15)

$$s^* * \bar{b} \subseteq \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ (s\bar{b})\bar{c} \in B}} (s\bar{b})\bar{c} \circ \mathbf{c}^{-1} = (s\bar{b})^*$$

С другой стороны, из (15), (22), (5), (8) вытекает

$$\begin{aligned} (s\bar{b})^* &= \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ s\bar{b}\bar{c} \in B}} s\bar{b}\bar{c} \circ \mathbf{c}^{-1} = s * \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ s\bar{b}\bar{c} \in B}} (\bar{b} * \bar{c}) \circ \mathbf{c}^{-1} = \\ &= s^* \circ \mathbf{b} \circ \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ s\bar{b}\bar{c} \in B}} \mathbf{c} \circ \mathbf{c}^{-1} \subseteq s^* \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{e} = s^* \circ \mathbf{b} = s^* * \bar{b} \end{aligned}$$

и, следовательно, $(s\bar{b})^* \subseteq s^* * \bar{b}$.

2. 5. Лемма. Если $B = A_1$ или $B = A_1 \setminus A_2$, где A_i — l -идеалы оператива $S \in \mathfrak{M}_n$, то $B \in \mathfrak{Q}_L\langle A \rangle$ (см. п. 2. 1).

Доказательство. Если A — l -идеал оператива S , то $i\bar{a} \in A^n$ при любых $\bar{i} \in S^n$, $\bar{a} \in A^n$. Пусть $A = A_1 \setminus A_2$, где A_i — l -идеалы оператива S , $(s\bar{i})\bar{a} \in A$, $i\bar{a} \notin A^n$ при некоторых $s \in S$, $\bar{i} = (t_i) \in S^n$, $\bar{a} \in A^n$. Тогда $t_k \bar{a} \notin A$ хотя бы при одном k и, следовательно, $t_k \bar{a} \in A_1 \setminus A \subseteq A_2$ (поскольку A_1 — l -идеал). Но A_2 — также l -идеал; поэтому $s(i\bar{a}) \in A_2$, что противоречит условию $(s\bar{i})\bar{a} = s(i\bar{a}) \in A$.

2. 5. 1. При $n=1$ справедливо обращение леммы п. 2. 5. В самом деле, в этом случае l -идеал и v -идеал являются левыми идеалами, а условие (14) выглядит следующим образом (см. [9]):

$$(23) \quad \forall_{s, t \in S, a \in A} sta \in A \rightarrow ta \in A$$

Обозначим $A_1 = A \cup SA$, $A_2 = A_1 \setminus A$. По построению, A_1 — левый идеал полугруппы S . Допустим, что $A_2 \neq \emptyset$; пусть $x \in A_2$. Тогда $x = sa$ при некотором $s \in S$. Если $tsa \notin A_2$ при некотором $t \in S$, то $tsa \in A$. Из (23) тогда следовало бы, что $sa \in A$, т. е. $sa \notin A_2$. Следовательно, $tsa \in A_2$ и A_2 — левый идеал.

2. 6. Теорема. При $r=2$ или r бесконечно $S_{nr}(\Omega)$ является плотным $\check{v}$ -идеалом оператора $S = S_n(\Omega)$.

Доказательство. Для каждого $\xi \in \Omega$ обозначим $c_\xi = c_{\{\xi\}}$ (см. п. 1. 9); если $\bar{\xi} = (\xi_i)$, то обозначим $\bar{c}_\xi = (c_{\xi_i})$.

Оперативы $A = S_{n2}(\Omega)$ и $B = S_{nr}(\Omega)$ удовлетворяют условиям лемм п. 2. 2—2. 4. Из п. п. 2. 2—2. 5 следует, что для всякого оператора $S \in \mathfrak{M}_n$, содержащего B в качестве v -идеала, отображение

$$s^* = \bigcup_{\bar{c}_\xi \in A^n} s\bar{c}_\xi \circ (\bar{c}_\xi)_A^{-1}$$

является гомоморфизмом S в $W_n(\Omega)$, тождественным на B . Из (15) имеем

$$(\eta, \bar{\xi}) \in s^* \leftrightarrow \exists_{\bar{a}, \bar{\zeta} \in \Omega^n} s\bar{c}_{\bar{a}} \in A \wedge (\eta, \bar{\zeta}) \in s\bar{c}_{\bar{a}} \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in (\bar{c}_{\bar{a}})_A^{-1}$$

и из (II)

$$(24) \quad (\eta, \bar{\xi}) \in s^* \leftrightarrow s\bar{c}_{\bar{\xi}} = c_\eta (= c_{s^*\bar{\xi}}).$$

Следовательно $s^* \in S(\Omega)$ для любого $s \in S$, т. е. $\Phi S \subseteq S(\Omega)$.

С другой стороны, при условиях теоремы (см. п. 1. 11) B является v -идеалом оператора $S_n(\Omega)$. Пусть f — собственный гомоморфизм оператора $S_n(\Omega)$; существуют элементы $x, y \in S_n(\Omega)$ такие, что $x \neq y$, $\Phi x = \Phi y$. Найдется хотя бы один элемент $\bar{\xi} \in \Omega^n$, для которого $x\bar{\xi} \neq y\bar{\xi}$. Но тогда $x * \bar{c}_\xi = c_{x\bar{\xi}} \neq c = y * \bar{c}_\xi$; в то же время $c_{x\bar{\xi}}, c_{y\bar{\xi}} \in B$ и из $\Phi x = \Phi y$ следует $\Phi c_{x\bar{\xi}} = \Phi c_{y\bar{\xi}}$.

2. 6. 1. Как и в п. 2. 6, можно доказать следующую теорему:

Теорема. При $r=2$ или r бесконечно $S_{nr}(\Omega)$ является плотным $s\check{v}$ -идеалом оператора $S_n(\Omega)$.

2. 6. 2. Из п. 2. 1 и теорем п. п. 2. 6, 2. 6. 1 вытекает теорема:

Теорема. Для того, чтобы оператив $S \in \mathfrak{M}_n$ был изоморфен оператору $S_n(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы S содержал плотный v^* -идеал (или плотный sv^* -идеал), изоморфный $S_{nr}(\Omega)$.

2. 6. 3. Теорема п. 2. 6. 2 дает при $r=2$ абстрактную хатракерику оператора $S_n(\Omega)$: ведь $A = S_{n2}(\Omega)$ является, очевидно, оперативом мощности $|\Omega|$ с действием

$$\bigvee_{x \in A, \bar{y} \in A^n} x\bar{y} = x$$

2. 6. 4. Плотные $\check{v}$ -идеалы и $s\check{v}$ -идеалы (плотно вложенные левые и двусторонние идеалы) полугрупп $S_1(\Omega)$ и $W_1(\Omega)$ найдены в статьях [10—13]. Теоремы п. п. 2. 6. 2, 2. 6. 3, 2. 7. 1 переносят на оперативы многоместных функций характеристики полугрупп преобразований с помощью их плотно вложенных идеалов, приведенные в этих статьях.

Плотные идеалы в оперативах многоместных функций указаны в заметках [6], [14].

2. 7. Теорема. Оперативы $W_{n2}(\Omega)$ и $W_{nr}(\Omega)$ при бесконечно r являются плотными $\check{v}$ -идеалами и $s\check{v}$ -идеалами оператора $W_n(\Omega)$.

Теорема эта доказывается так же, как и в п. 2. 6, 2. 6. 1; при этом удобнее всего положить $A = S_{n2}(\Omega)$.

Конец доказательства — как и в п. п. 2. 6, 2. 8).

2. 7. 1. Как и в п. 2. 6. 3, справедлива следующая теорема:

Теорема. Для того, чтобы оператив $S \in \mathfrak{M}_n$ был изоморфен $W_n(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы он содержал плотный sv^* -идеал, изоморфный одному из оперативов $W_{nr}(\Omega)$ при $r=2$ или r бесконечном.

Эту теорему при $r=2$ можно также считать абстрактной характеристикой оператива $W_n(\Omega)$, поскольку из (12) вытекает характеристика оператива $W_{n2}(\Omega)$, аналогичная формуле (25) (но несколько более сложная).

2. 8. Пусть σ_L — следующее отношение в классе $\mathfrak{M}_n: (B, S) \in \sigma_L$ тогда и только тогда, когда $B^n \subseteq M_1[S]$, $B = A_1 \setminus A_2$, где A_1 — v -идеал оператива S , а $A_2 = \emptyset$ или A_2 является l -идеалом оператива S .

Следующие две теоремы являются аналогами теоремы 4. 5 статьи [9].

Теорема. $S_{nr}(\Omega)$ является при $r=2$, конечном $r = |\Omega| + 1$ или r бесконечном $\check{\mathfrak{Q}}_L$ -плотным подоперативом оператива $W_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $A_1 = W_{nr}(\Omega)$, $B = S_{nr}(\Omega)$. A_1 является v -идеалом оператива $W_n(\Omega)$ в силу п. 1. 11. Множество $A_2 = W_n(\Omega) \setminus S_n(\Omega)$ является l -идеалом оператива $W = W_n(\Omega)$: если $\bar{a} = (a_i) \in W^n$ и $pr_v a_i \neq \Omega$ при каком-либо i , то $pr_v(w\bar{a}) \neq \Omega$ при любом $w \in W$ в силу (7) и $w\bar{a} \in A_2$. Следовательно, $W_n(\Omega) \in \sigma_L \langle B \rangle$.

Если $S \in \sigma_L \langle B \rangle$ для какого-либо оператива S , то из леммы п. 2. 5 вытекает $S \in \check{\mathfrak{Q}}_L \langle B \rangle$. Если $A = S_{n2}(\Omega)$, то из лемм п. п. 2. 2—2. 5 следует, что отображение (15) является гомоморфизмом оператива S в $W_n(\Omega)$, тождественным на B .

Пусть теперь ϕ — собственный эндоморфизм оператива W , $x, y \in W$, $x \neq y$, $\phi x = \phi y$. Если $pr_v x = pr_v y$, то существует элемент $\bar{\xi} \in pr_v x$ такой, что $(\eta, \bar{\xi}) \in x$, $(\zeta, \bar{\xi}) \in y$, $\eta \neq \zeta$. Тогда $x * \bar{c}_{\bar{\xi}} = c_{\eta}$, $y * \bar{c}_{\bar{\xi}} = c_{\zeta}$, $\phi c_{\eta} = \phi c_{\zeta}$, $c_{\zeta} \neq c_{\eta}$.

Если же $pr_v x \neq pr_v y$, то существует элемент $\bar{\xi} \in pr_v x \setminus pr_v y$ (или наоборот $\bar{\xi} \in pr_v y \setminus pr_v x$); пусть $x * \bar{c}_{\bar{\xi}} = \eta$. Тогда $x * \bar{c}_{\bar{\xi}} = c_{\eta}$, $y * \bar{c}_{\bar{\xi}} = O$ ($\in W$), $\phi c_{\eta} = \phi O$. Если, $\bar{\eta} = \eta^n$, то для всякого $\zeta \in \Omega$

$$\phi c_{\zeta} = \phi(c_{\zeta} * \bar{c}_{\bar{\eta}}) = \phi c_{\zeta} * (\phi O)^n = \phi O,$$

и ϕ индуцирует собственный эндоморфизм на оперативе $S_{n2}(\Omega) \subseteq S_{nr}(\Omega)$. Теорема доказана.

2. 8. 1. При условиях теоремы п. 2. 8 $W_{nr}(\Omega)$ является sv -идеалом оператива $W_n(\Omega)$ (см. п. 1. 11). Поэтому отношение σ_L в теореме п. 2. 8 можно заменить следующим отношением σ : $(B, S) \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $B = A_1 \setminus A_2$, где A_1 — sv -идеал оператива S , A_2 — его l -идеал.

2. 8. 2. Из доказательства теоремы п. 2. 8 вытекает следующая теорема (при $n=1$ в силу п. 2. 5. 1 она совпадает с теоремой п. 2. 8):

Теорема. $S_{n2}(\Omega)$, $S_n(\Omega)$ и $S_{n2}(\Omega)$ при бесконечном r являются $\check{\mathfrak{Q}}_L$ -плотными подоперативами оператива $W_n(\Omega)$ (см. п. 2. 2).

2. 8. 3. Из п. п. 2. 8, 2. 8. 2, 2. 1 вытекает:

Теорема. Для того, чтобы оператор $S \in \mathfrak{M}_n$ был изоморфен оператору $W_n(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы он содержал $\mathfrak{q}_L^*$ -плотный ($\mathfrak{q}_L^*$ -плотный) подоператор, изоморфный одному из операторов $S_{n2}(\Omega)$, $S_n(\Omega)$.

2. 8. 4. В частности, как и в п. 2. 6. 3:

Теорема. Для того, чтобы оператор $S \in \mathfrak{M}_n$ был изоморфен оператору $W_n(\Omega)$, необходимо и достаточно чтобы он содержал $\mathfrak{q}_L^*$ -плотный ($\mathfrak{q}_L^*$ -плотный) подоператор A мощности $|\Omega|$ с действием (25).

2. 9. Перейдем теперь к изучению плотных идеалов оператора $V_n(\Omega)$ (см. п. 1. 13). В отличие от $W_n(\Omega)$ и $S_n(\Omega)$, результаты для $n=1$ и $n>1$ здесь одинаковы.

Теорема. $V_{nr}(\Omega)$ при $r>2$ является плотным $\check{I}$ -идеалом, плотным $\check{S}$ -идеалом, плотным $\check{v}$ -идеалом и плотным $\check{sv}$ -идеалом оператора $V = V_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $A = V_{n2}(\Omega)$, $B = V_{nr}(\Omega)$. В силу п. 1. 13, B является sl -идеалом (а следовательно и sv -идеалом) оператора V . Из лемм п. п. 2. 2—2. 5 следует, что для всякого оператора $S \in \mathfrak{M}_n$, содержащего B в качестве l -идеала (в частности, sl -идеала, v -идеала, sv -идеала), отображение (15) является гомоморфизмом в $W_n(\Omega)$, тождественным на B .

Допустим, что $s^* \in W_n(\Omega) \setminus V$ для какого-либо $s \in S$. Тогда существует по крайней мере одна пара элементов $\bar{\xi} = (\xi_i)$, $\bar{\xi}' = (\xi'_i) \in pr_v s^*$ таких, что $\bar{\xi} \neq \bar{\xi}'$, $s^* \bar{\xi} = \eta$, $s^* \bar{\xi}' = \eta'$ ($\eta, \eta' \in \Omega$) и

$$(26) \quad \eta = \eta' \vee \{ \eta \neq \eta' \wedge \exists_i \xi_i = \xi'_i \}$$

По условию $U = V_{n3}(\Omega) \subseteq B$. Обозначим через $\bar{u}$ такой элемент из U^n , для которого $u\bar{\xi} = \bar{\xi}$, $u\bar{\xi}' = \bar{\xi}'$. Тогда по условию $s\bar{u} \in B$ и, в силу (8), (17), $s^* \circ \bar{u} = s^* * \bar{u} = (s\bar{u})^* = s\bar{u} \in B$. Из (4) следует $(s^* \circ u)\bar{\xi} = \eta$, $(s^* \circ u)\bar{\xi}' = \eta'$; вместе с $\bar{\xi} \neq \bar{\xi}'$ и (26) это противоречит условию $s^* \circ u \in V$ (см. п. 1. 12). Следовательно, $s^* \in V$ для любого $s \in S$ и $\phi S \subseteq V$.

Пусть f — собственный эндоморфизм оператора V ; $x, y \in V$, $x \neq y$, $fx = fy$. Если $pr_v x \neq pr_v y$, то существует элемент $\bar{\xi} \in pr_v x$ такой, что $x \langle \bar{\xi} \rangle \neq y \langle \bar{\xi} \rangle$. Обозначим через $\bar{u}$ элемент из A^n , для которого $u\bar{\xi} = \bar{\xi}$. Тогда $x * \bar{u} \in B$, $y * \bar{u} \in B$. Но в силу (8), (4), $x * \bar{u} \neq y * \bar{u}$; в то же время $f(x * \bar{u}) = f(y * \bar{u})$, вследствие $fx = fy$.

Если же $pr_v x \neq pr_v y$ и $\bar{\xi} \in pr_v x \setminus pr_v y$ (или аналогично $\bar{\xi} \in pr_v y \setminus pr_v x$), то $x * \bar{u} \in B \setminus \{O\}$, $y * \bar{u} = O$ и опять таки $f(x * \bar{u}) = f(y * \bar{u})$. Таким образом, f индуцирует собственный эндоморфизм на B , и B является плотным $\check{I}$ -идеалом (и $\check{sl}$ -идеалом оператора V).

2. 9. 1. Теорема. $V_{n2}(\Omega)$ является плотным $\check{I}$ -идеалом и плотным $\check{v}$ -идеалом оператора $W_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $A=B=V_{n2}(\Omega)$. Для всякого оператора S , содержащего A в качестве l -идеала (соответственно v -идеала) отображение (15), как и в п. 2. 9, является гомоморфизмом в $W_n(\Omega)$, тождественным на A . $W_n(\Omega)$ содержит A в качестве l -идеала (и тем более — в качестве v -идеала). Как и в п. 2. 9), всякий нетождественный эндоморфизм оператора $W_n(\Omega)$ индуцирует нетождественный эндоморфизм оператора A .

2. 9. 2. Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. $V_{n2}(\Omega)$ является $\check{\sigma}_L$ -плотным и $\check{\varrho}_L$ -плотным подоперативом оператора $W_n(\Omega)$ (см. п. п. 2. 1, 2. 8).

2. 9. 3. При $n=1$ l -идеал и v -идеал являются левыми идеалами. Теорема п. 2. 9. 1 в этом случае дает результат п. 4. 2. 2 статьи (9).

Теорема п. 2. 9. 2 при $n=1$ дает для $V_{n2}(\Omega)$ утверждение п. 4. 5. 2 статьи [9], приведенное там без доказательства. Для полугрупп $V_{1r}(\Omega)$ (и точно так же — для $W_r^1(\Omega)$) при $r>2$ это утверждение неверно.

Лемма п. 2. 4. при $n=1$ для $\check{\varrho}_L$ -плотных подполугрупп является аналогом леммы п. 4. 2 статьи (9) для плотных левых идеалов.

2. 10. В двух следующих п. п. даны плотные вложения, дающие характеристики $P_n(\Omega)$ и $F_n(\Omega)$ (п. п. 1. 4, 1. 9) как алгебр с двумя операциями.

Множество S называется $\mathfrak{P}$ -оперативом [4], если задано отображение ψ множества $\mathfrak{P}(S)$ в S ($\mathfrak{P}$ -операция). Элемент $a \in S$ называется $\mathfrak{P}$ -неразложимым, если для любого $A \subseteq S$ из $\psi A = a$ следует $A = \{a\}$. $\mathfrak{P}$ -операция на множестве S индуцирует $\mathfrak{P}$ -операцию на декартовой степени S^n :

$$\forall_{A_i \subseteq S} \psi \left(\bigtimes_{i=1}^n A_i \right) = (\psi A_1, \psi A_2, \dots, \psi A_n).$$

Множество S назовем ψ_n -оперативом, если оно является $(n+1)$ -оперативом относительно некоторой операции (1) и $\mathfrak{P}$ -оперативом относительно некоторой $\mathfrak{P}$ -операции ψ . Если оператор S содержит нуль O , то предполагается, что для любого $A \subseteq S$

$$\psi(A \cup \{O\}) = \psi A$$

Если B — подоператив ψ_n -оператива S , обладающего нулем, то для любых $s \in S$, $\bar{b} \in B^n$ обозначим

$$s\bar{b} \parallel_B = \begin{cases} O, & \text{если } s\bar{b} \notin B, \\ s\bar{b}, & \text{если } s\bar{b} \in B. \end{cases}$$

Если X — подмножество S^n , $s \in S$, то через sX и $sX \parallel_B$ обозначим соответственно множества всех элементов $s\bar{x}$ и $s\bar{x} \parallel_B$, где $\bar{x} \in X$.

Пусть $\mathfrak{H}_n$ — класс всех ψ_n -оперативов, Φ — класс всех их гомоморфизмов ϕ относительно операции (1), являющихся одновременно гомоморфизмами относительно $\mathfrak{P}$ -операции $\psi: \psi(\phi A) = \phi(\psi A)$ для любого $A \subseteq S$.

Введем в классе $\mathfrak{H}_n$ отношение $\varrho_U: S \in \varrho_U \langle B \rangle$ тогда и только тогда, когда $B \subseteq S$ и

1. $S \in \varrho_L \langle B \rangle$ (см. п. 2. 1)

2. если A — множество всех ψ -неразложимых элементов из B , то $A^n \subseteq M_1[S]$ (см. п. 1. 2).

$$(27) \quad 3. \quad \forall_{s \in S, X = \bigtimes_{i=1}^n X_i \subseteq B^n} s\psi X \|_B = \psi(sX \|_B)$$

Множество $P_n(\Omega)$ и его подмножества будем теперь рассматривать как U_n -оперативы, где U — операция теоретико-множественного объединения. В частности, если $B_n(\Omega) = C_n(\Omega) \cap F_n(\Omega)$ (см. п. п. 1. 7, 1. 9), то для любого $c_\Pi = (\Pi, \Omega) \in B_n(\Omega)$ (см. п. 1. 7)

$$c_\Pi = \bigcup_{\Sigma \subseteq \Pi} c_\Sigma = \bigcup_{\xi \in \Pi} c_\xi.$$

Теорема. U_n -оператив $B = B_n(\Omega)$ является $\check{q}_U$ -плотным подоперативом U_n -оператива $P = P_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $(s * \bar{i}) * \bar{c}_\Pi \in B$ при некоторых $s \in P, s \in P, \bar{i} \in P^n, \bar{c}_\Pi \in B^n$. Из (8) следует $s \circ t \circ (\bar{c}_\Pi)_A \neq O$, и, в силу (4), (10), $t \circ (\bar{c}_\Pi)_A \neq O, \bar{i} * \bar{c}_\Pi \neq O^n$. Вместе с п. 1. 7 это дает $\bar{i} * \bar{c}_\Pi \in B^n$. U -неразложимыми в $B_n(\Omega)$ являются элементы $c_\xi \in S_{n2}(\Omega)$ (см. п. 2. 6) и только они. Из п. 1. 6. 1 вытекает, что $A^n \subseteq M_1[S]$. Справедливость условия (27) вытекает из (5) и (8). Таким образом, $P \in \check{q}_U \langle B \rangle$.

Условие (16) проверяется здесь тривиально: для всякого $\bar{\xi} \in \Omega^n$ существует лишь один элемент $\bar{c} = \bar{c}_\xi$ такой, что $\bar{\xi} \in \langle \Omega^n \rangle$.

Пусть теперь $S \in \check{H}_n$ и $S \in \check{q}_U \langle B \rangle$; $\phi s = s^*$ — отображение (15). Как и в п. 2. 4, получаем $c_\Pi^* = c_\Pi$ для любого $c_\Pi \in B$. Если s — какой-либо элемент из $S, \bar{c}_\Pi = (c_{\Pi_1}, c_{\Pi_2}, \dots, c_{\Pi_n})$, то из (15), (7), (8)

$$s^* * \bar{c}_\Pi = \bigcup_{s\bar{c}_\xi \in B} s\bar{c}_\xi \circ (\bar{c}_\xi)_A^{-1} \circ \bar{c}_\Pi = \bigcup_{\substack{s\bar{c}_\xi \in B \\ \xi \in \Pi}} s\bar{c}_\xi = \bigcup_{\xi \in \Pi} s\bar{c}_\xi \|_B.$$

$$(s\bar{c}_\Pi)^* = \bigcup_{s\bar{c}_\xi \in B} (s\bar{c}_\Pi * \bar{c}_\xi) \circ (\bar{c}_\xi)_A^{-1} = s\bar{c}_\Pi \|_B.$$

Вместе с условием (27) это дает $s^* * \bar{c}_\Pi = (s\bar{c}_\Pi)^*$.

Наконец, как и в п. 2. 8, всякий нетождественный гомоморфизм оператора $P_n(\Omega)$ индуцирует нетождественный гомоморфизм на $B_n(\Omega)$.

2. 10. 1. Введем в классе $\check{H}_n$ отношение $\sigma_U: S \in \sigma_U \langle B \rangle$ тогда и только тогда, когда B является U -идеалом оператора B и B, S удовлетворяют условиям 2.—3. п. 2. 10. (Заметим, что в этом случае $s\bar{b} \|_B = s\bar{b}$ для любых $s \in S, b \in B^n$.)

Теорема. Упорядоченный оператор $B_n(\Omega)$ является $\check{\sigma}_U$ -плотным подоперативом оператора $F_n(\Omega)$.

Доказательство аналогично п. 2. 10.

2. 10. 2. В определении класса $\check{H}_n$ в п. п. 2. 10—2. 10. 1 можно было требовать, чтобы ψ являлась не $\mathfrak{P}$ -операцией, а частичной $\mathfrak{P}$ -операцией в S , т. е. отображением некоторого подмножества $S_\psi \subseteq \mathfrak{P}(S)$ в S . Определение отношений $\check{q}_U$ и σ_U при этом дополняется условием $B \subseteq S_\psi$.

§ 3. Автоморфизмы алгебр n -отношений

3.1. Пусть f — произвольное взаимно однозначное отображение множества Ω на себя. Продолжим f обычным способом до отображения множества Ω^n на себя

$$\forall_{\xi_i \in \Omega} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (f\xi_1, f\xi_2, \dots, f\xi_n)$$

и отображения φ_f оператора $P = P_n(\Omega)$ на себя

$$\forall_{\xi \in \Omega^n, \eta \in \Omega, a \in P} (f\eta, f\xi) \in \varphi_f a \leftrightarrow (\eta, \xi) \in a$$

или, что то же самое, при любых $\bar{\xi} \in \Omega^n, \eta \in \Omega, a \in P$

$$(28) \quad (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f a \leftrightarrow (f^{-1}\eta, f^{-1}\bar{\xi}) \in a$$

Преобразование φ_f , очевидно, взаимно однозначно, и отображает подоперативы $P_{nrt}(\Omega), S_n(\Omega), W_n(\Omega), V_n(\Omega)$ (см. п. п. 1.2, 1.6, 1.9, 1.10, 1.13) и их пересечения на себя. Из (7) следует, что φ_f является автоморфизмом: при любых $a \in P, \bar{b} \in P^n, \eta \in \Omega, \bar{\xi} \in \Omega^n$

$$\begin{aligned} (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f(a * \bar{b}) &\leftrightarrow (f^{-1}\eta, f^{-1}\bar{\xi}) \in a * \bar{b} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \exists_{\zeta \in \Omega^n} (f^{-1}\eta, \bar{\zeta}) \in a \wedge \forall_i (\zeta_i, f^{-1}\bar{\xi}) \in b_i \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \exists_{\zeta' = f\zeta \in \Omega^n} (\eta, \zeta') \in \varphi_f a \wedge \forall_i (\zeta'_i, \bar{\xi}) \in \varphi_f b_i \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f a * \varphi_f \bar{b}. \end{aligned}$$

В статье [2] показано, что всякий автоморфизм оператора $S_n(\Omega)$ имеет вид (28). Приведенная ниже теорема обобщает этот результат; для $n=1$ она доказана в [7], [9].

Теорема. *Всякий автоморфизм оператора $S_{nr}(\Omega)$ (см. п. 1.12) имеет вид (28).*

Доказательство. В работе [9] показано, что если существует какое-либо $\check{\theta}$ -плотное вложение алгебраической системы A в алгебраическую систему B , то всякий автоморфизм системы A может быть, и притом единственным образом, продолжен до автоморфизма системы B (см. п. 2.1). В случае $r=2$ или бесконечного r остается воспользоваться теоремой п. 2.6 и уже упомянутым результатом статьи [9].

Для конечного r заметим, что $A = S_{n2}(\Omega)$ является единственным минимальным sv -идеалом оператора $S_r = S_{nr}(\Omega)$. Поэтому всякий автоморфизм Φ индуцирует на A автоморфизм $\Phi|_A = \varphi_f|_A$, где f — некоторое взаимно однозначное отображение множества Ω на себя.

Тогда $\Psi = \varphi_f^{-1}\Phi$ является автоморфизмом оператора S_r таким, что $\Psi c_{\xi} = c_{\xi}$ (см. п. 2.6) для любого $\xi \in \Omega$. Поскольку $x\bar{c}_{\xi} = c_{x\xi}$ для всякого $x \in S_r$, то

$$c_{\psi x(\xi)} = \Psi x * \bar{c}_{\xi} = \Psi x * \Psi \bar{c}_{\xi} = \Psi(x * \bar{c}_{\xi}) = \Psi c_{x\xi} = c_{x\xi}$$

и $\Psi x = x$, Ψ — тождественный автоморфизм, $\Phi = \varphi_f$.

3.2. Аналогично из теорем п. п. 2.7, 2.8, 2.9, 2.9.1 вытекает следующая теорема:

Теорема. *Всякий автоморфизм оператора $W_{nr}(\Omega)$ или $V_{nr}(\Omega)$ имеет вид (28).*

3.3. Теорема п. 2.10 дает возможность найти группу автоморфизмов для $P_n(\Omega)$ лишь как для упорядоченного оператора. Поэтому ниже будут непосредственно найдены все автоморфизмы $P_n(\Omega)$ без предположения о его упорядоченности (и попутно — автоморфизмы некоторых его подоперативов).

Введем следующие отношения квазипорядка χ_s, χ_v в операторе S с нулем O : для любых $a, b \in S$,

$$(29) \quad \begin{aligned} (a, b) \in \chi_v &\leftrightarrow \bigvee_{\bar{x} \in S^n} \{b\bar{x} = O \rightarrow a\bar{x} = O\}, \\ (a, b) \in \chi_s &\leftrightarrow \bigvee_{\bar{x} \in S^n} \{xb^n = O \rightarrow xa^n = O\}. \end{aligned}$$

Если $S = P_{nrt}(\Omega)$ или $S = W_{nrt}(\Omega)$, то нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} (a, b) \in \chi_v &\leftrightarrow \text{pr}_v a \subseteq \text{pr}_v b, \\ (a, b) \in \chi_s &\leftrightarrow \text{pr}_s a \subseteq \text{pr}_s b. \end{aligned}$$

Приведенная ниже теорема при $n=1$ доказана в работе [16].

Теорема. *Всякий автоморфизм оператора $P_{nrt}(\Omega)$ при $r>1, t>1$ имеет вид (28)*

Доказательство. Пусть Φ — произвольный автоморфизм оператора $D = P_{nrt}(\Omega)$. Автоморфизм Φ переводит в себя единственный минимальный ненулевой sv -идеал $C_{nrt}(\Omega) = P_{nrt}(\Omega) \cap C_n(\Omega)$ (см. п. 1.7) оператора $P_{nrt}(\Omega)$ и отображает любой его минимальный ненулевой v -идеал (s -идеал) на минимальный ненулевой v -идеал (s -идеал). Из п. 1.7¹⁾ следует

$$(30) \quad \bigvee_{\Sigma \subseteq \Omega, \Pi \subseteq \Omega^n} \Phi(\Sigma, \Pi) = (\Psi\Sigma, \Psi'\Pi),$$

где Ψ, Ψ' — взаимно однозначные отображения множеств $\mathfrak{P}(\Omega)$ и $\mathfrak{P}(\Omega^n)$ на себя. По определению (29), автоморфизм Φ сохраняет отношения χ_s, χ_v . Следовательно, существуют такие взаимно однозначные отображения f, f' множеств Ω, Ω^n на себя, что

$$(31) \quad \begin{aligned} \bigvee_{\xi \in \Omega, \Sigma \subseteq \Omega} f\xi \in \Psi\Sigma &\leftrightarrow \xi \in \Sigma \\ \bigvee_{\bar{\xi} \in \Omega^n, \Pi \subseteq \Omega^n} f'\bar{\xi} \in \Psi'\Pi &\leftrightarrow \bar{\xi} \in \Pi \end{aligned}$$

Пусть $\eta \in \Omega, \bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n, u = (\eta, \bar{\xi}), w_i = (\xi_i, \bar{\xi}), \bar{w} = (w_i) \in P^n$. Из (30), (31) следует $\Phi u = (f\eta, f'\bar{\xi}), \Phi w_i = (f\xi_i, f'\bar{\xi})$. Если бы $(f\xi_i) \neq f'\bar{\xi}$, то из (12) следовало бы

$$\Phi u = \Phi(u * \bar{w}) = \Phi u * \Phi \bar{w} = (f\eta, f'\bar{\xi}) * \bar{w} = 0.$$

¹⁾ Теорема п. 1.7, очевидно, справедлива и для операторов $P_{nrt}(\Omega)$.

Значит, $f'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (f\xi_1, \dots, f\xi_n)$, и вместо (30) имеем

$$\forall_{\Sigma \subseteq \Omega, \Pi \subseteq \Omega^n} (\Sigma, \Pi) = (f\Sigma, f\Pi)$$

где в правой части продолжение отображения f на $\mathfrak{P}(\Omega)$ и $\mathfrak{P}(\Omega^n)$ снова обозначено через f .

Для любых элементов $x \in P_{nrt}(\Omega)$, $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$ из (11) следует

$$(\eta, \bar{\xi}) \in x \leftrightarrow (\eta, \eta^n) * x^n * (\bar{\xi}, \bar{\xi}) \neq O,$$

где

$$(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = ((\xi_1, \bar{\xi}), (\xi_2, \bar{\xi}) \dots (\xi_n, \bar{\xi})),$$

и

$$\begin{aligned} (f\eta, f\bar{\xi}) \in \varphi x &\leftrightarrow (f\eta, f\eta^n) * \varphi x^n * (f\bar{\xi}, f\bar{\xi}) = \varphi \{(\eta, \eta^n) * x^n * (\bar{\xi}, \bar{\xi})\} \neq \\ &\neq O \leftrightarrow (\eta, \eta^n) * x^n * (\bar{\xi}, \bar{\xi}) \neq O \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in x, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. 3. 1. Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива $W_{nrt}(\Omega)$ имеет вид (28).*

3. 3. 2. Доказательство приведенной ниже теоремы вытекает, аналогично теореме п. 3. 1, из п. п. 2. 9, 2. 9. 1. При $n=1$ она доказана в [9], [10].

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива $V_{nr}(\Omega)$ имеет вид (28).*

3. 4. Пусть A — произвольное непустое множество натуральных чисел; $\Theta = \{t_n\}_{n \in A}$ — семейство натуральных чисел. В множестве

$$P_A(\Omega) = \bigcup_{n \in A} P_n(\Omega)$$

введем частичные операции $*_n$ следующим образом. Каждая операция $*_n$ $(n+1)$ -арная; она определена для элементов $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ в том и только в том случае, когда $a \in P_n(\Omega)$, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ содержатся в каком-либо одном множестве $P_k(\Omega)$, где $k \in A$: для любых $a \in P_n = P_n(\Omega)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in (P_k)^n$, $\eta \in \Omega$, $\bar{\xi} \in \Omega^k$

$$(32) \quad (\eta, \bar{\xi}) \in a *_n \bar{b} \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in \Omega^n} \{ \eta, \bar{\zeta} \} \in a \wedge \forall_i (\zeta_i, \bar{\xi}) \in b_i.$$

Присоединим к множеству $P_A(\Omega)$ элемент $O = O_A$ и доопределим все частичные операции $*_n$ до операций в множестве $P_A^0(\Omega) = P_A(\Omega) \cup \{O_A\}$, считая, что O_A является нулем в $P_A^0(\Omega)$ относительно каждой из операций $*_n$ ($n \in A$) и что $a *_n b = O_A$ если $a \notin P_n(\Omega)$ или $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ не содержится в каком-либо множестве $(P_k)^n$.¹⁾

¹⁾ Иначе говоря, $P_A^0(\Omega)$ является элементарным глобальным оперативом [4] относительно каждой операции $*_n$. Можно определить и другими способами суперпозицию отношений из $P_A^0(\Omega)$ (см. например, [5]).

Выделим некоторые подалгебры алгебры $P(\Omega)$:

$$X_{Ar\theta}(\Omega) = \bigcup_{n \in A} X_{nri_n}(\Omega) \quad (\text{где } X = P \text{ или } W);$$

$$X_{Ar}(\Omega) = \bigcup_{n \in A} X_{nr}(\Omega) \quad (\text{где } X = P, F, W, V \text{ или } S).$$

Пусть f — произвольное взаимно однозначное отображение множества Ω на себя. Как и в п. 3.1, нетрудно проверить, что преобразование φ_f любой из алгебр $P_A(\Omega)$

$$(33) \quad \bigvee_{\substack{n \in A, \xi \in \Omega^n \\ \eta \in \Omega, x \in P_n(\Omega)}} (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f x \leftrightarrow (f^{-1}\eta, f^{-1}\bar{\xi}) \in x$$

является ее автоморфизмом, переводящим в себя алгебры $P_{Ar\theta}(\Omega)$, $W_A(\Omega)$, $S_A(\Omega)$, $V_A(\Omega)$.

Теорема. *Всякий автоморфизм алгебры $X_{Ar\theta}(\Omega)$ или $X_{Ar}(\Omega)$ имеет вид (33).*

Доказательство. Пусть φ — произвольный автоморфизм алгебры $X_{Ar\theta}(\Omega)$. При любом $n \in A$ φ индуцирует на каждой подалгебре $X_n = X_{nri_n}(\Omega)$, где $n \in A$, автоморфизм φ_{f_n} (см. п. п. 3.1, 3.3), где f_n — взаимно однозначные отображения Ω на себя.

Если $k, n \in A$, $k > n$, то отображение φ_{f_k} является автоморфизмом всей алгебры X_A . Тогда $\varphi' = \varphi_{f_k}^{-1} \varphi$ является автоморфизмом алгебры X_A , тождественными на X_k , следовательно,

$$(34) \quad \bigvee_{x \in X_n, \bar{y} \in (X_k)^n} \varphi' x * \bar{y} = \varphi' x * \varphi' \bar{y} = \varphi' (x * \bar{y}) = x * \bar{y}$$

Пусть $\eta \in \Omega$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Omega^n$, $\bar{\xi} \in \Omega^k$, $y_i = (\xi_i, \bar{\xi})$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Из (32) следует,

$$(\eta, \bar{\xi}) \in x * \bar{y} \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in x,$$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in (\varphi' x) * \bar{y} \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi' x$$

и, вместе с (34),

$$\bigvee_{x \in X_n} \varphi' x = x,$$

т. е. $\varphi = \varphi_{f_k}$ всюду на X_n , $f_k = f_n$, что и требовалось доказать.

§ 4. Гомоморфизмы и конгруэнции алгебр n -отношений

4.1. Лемма. Пусть φ — гомоморфизм оператива S , φA — подмножество оператива φS , A — полный прообраз множества φA . Множество φA тогда и только тогда является s -идеалом (соответственно v -идеалом, l -идеалом) оператива φS , когда A является s -идеалом (v -идеалом, l -идеалом) оператива S .

Доказательство. Для любого $\bar{x} = (x_i) \in S^n$ обозначим $\varphi \bar{x} = (\varphi x_i)$. Пусть, например, A — v -идеал оператива S , $\varphi \bar{a} \in (\varphi A)^n$, x — произвольный элемент из S . Тогда $\varphi x \cdot \varphi \bar{a} = \varphi(x\bar{a}) \in \varphi A$ и φA — v -идеал оператива φS .

Обратно, пусть ϕA — v -идеал оператора ϕS , $\bar{a}$ — произвольный элемент из A^n , x — произвольный элемент из S . Тогда $\phi(x\bar{a}) = \phi x \cdot \phi \bar{a} \in \phi A$, $x\bar{a} \in A$, и A — v -идеал в S .

Аналогично, полагая $\bar{a} \in S^n \setminus (S \setminus A)^n$, $x \in S$ (и соответственно $\bar{a} \in S^n$, $x \in A$), можно доказать и остальные два утверждения леммы.

4. 2. Гомоморфизмы полугруппы $S_1(\Omega)$ и $W_1(\Omega)$ найдены в работах [7, 8]; гомоморфизмы полугрупп $P_1(\Omega)$ и $F_1(\Omega)$ насколько известно автору, до сих пор не изучены. В приведенных ниже теоремах решен вопрос о гомоморфизмах операторов $W_{nr}(\Omega)$, $P_{nr}(\Omega)$, $S_{nr}(\Omega)$ и $F_{nr}(\Omega)$ при $n > 1$. Он решается значительно проще, чем при $n = 1$.

Гомоморфизм ϕ алгебраической системы A называется нетривиальным, если он не является ни изоморфизмом, ни отображением в систему, состоящую из одного элемента.

Теорема. При $n > 1$ оператор $W_{nr}(\Omega)$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.

Доказательство. Пусть ϕ — произвольный собственный (см. п. 21) гомоморфизм оператора $D = W_{nr}(\Omega)$. Существуют элементы $x, y \in D$, $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$ такие, что $\phi x = \phi y$, $(\eta \bar{\xi}, \eta) \in x \setminus y$. Обозначив $c_i = (\xi_i, \bar{\xi})$ (см. п. 1. 7), $\bar{c} = (c_i)$, $a = (\eta, \eta^n)$, получим $(a * x^n) * \bar{c} = (\eta, \bar{\xi}) \neq O = (a * y^n) * \bar{c}$, а в то же время $\phi((a * x^n) * \bar{c}) = (\phi a * \phi x^n) * \phi \bar{c} = (\phi a * \phi y^n) * \phi \bar{c} = \phi((a * y^n) * \bar{c}) = \phi O$.

По лемме п. 4. 1 подмножество $A \subseteq W$, состоящее из всех таких элементов $a \in W$, что $\phi a = \phi O$, является sl -идеалом оператора W . Поскольку $A \neq \{O\}$, из теоремы п. 1. 11. 1 следует, что $A = D$ и, значит $\phi D = \phi O$.

4. 3. **Теорема.** Оператор $P_{nr}(\Omega)$ при $n > 1$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из $P_{nr}(\Omega)$; $\eta \in \Omega$; c_k ($k = 1, 2, \dots, n$), a, w такие элементы из $W_n(\Omega)$, что $pr_v c_k = pr_v a = pr_v x$, $pr_v w = pr_v x \times \{\eta\}^{n-1}$, $c_k \bar{\xi} = \xi_k$ и $a \bar{\xi} = \eta$ для любого $\bar{\xi} = (\xi_i) \in pr_v x$; $w \bar{\xi} = \xi_1$ для любого $\bar{\xi} \in pr_v w$; $\bar{c} = (c_i)$, $\bar{a} = (x, a, a, \dots, a)$. Тогда $a \in W_{nr}(\Omega)$ и из (7) следует

$$(35) \quad x * \bar{c} = w * \bar{a} = x.$$

Если $r \leq t$, то из $|pr_s w| = |pr_v w| = |pr_s x| < r$ имеем $w \in W_{nr}(\Omega)$; если же $r \geq t$, то в силу $|pr_s c_k| \leq |pr_v c_k| = |pr_v x| < t$, $c_k \in W_{nr}(\Omega)$. Гомоморфизм ϕ оператора $P_{nr}(\Omega)$ индуцирует на $W_{nr}(\Omega)$ в силу п. 4. 2 отображение в один элемент ϕO ; поэтому из (35) в обоих случаях вытекает $\phi x = \phi O$, $\phi P_{nr}(\Omega) = \phi O$.

4. 4. Всякая эквивалентность на операторе $S_{n2}(\Omega)$ является, как нетрудно проверить, конгруэнцией.

Теорема. Оператор $S_{nr}(\Omega)$ при $n > 1$, $r > 2$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.

Доказательство. Пусть ϕ — произвольный гомоморфизм оператора $S_{nr}(\Omega)$, не являющийся изоморфизмом. Как и в п. 2. 6, существуют $\eta, \varepsilon \in \Omega$

($\eta \neq \varepsilon$) такие, что $\varphi c_\eta \neq \varphi c_\varepsilon$. Для любого элемента $\xi \in \Omega$ при $r > 2$ элемент $a \in S_{nr}(\Omega)$ такой, что $a\eta^n = \eta$, $a\varepsilon^n = \xi$. Тогда $a * (c_\eta)^n = c_\eta$, $a * (c_\varepsilon)^n = c_\varepsilon$, и $\varphi c_\xi = \varphi a * \varphi c_\varepsilon^n = \varphi a * \varphi c_\eta^n = \varphi(a * c_\eta^n) = \varphi c_\eta$; $\varphi S_{n2} = \varphi c_\eta$.

Пусть теперь x — произвольный элемент из $S_{nr}(\Omega)$. Обозначим через w элемент из $S_n(\Omega)$ такой, что $w\bar{\xi} = \xi_1$, если $\bar{\xi} = (\xi_1, \eta, \eta, \dots, \eta)$, $\xi_1 \in pr_s x$, и $w\bar{\xi} = \varepsilon$ для всех остальных $\bar{\xi} \in \Omega^n$ (ε — фиксированный элемент из $pr_s x$). Тогда $|pr_s w| = |pr_s x| < r$ и, следовательно, $w \in S_{nr}(\Omega)$. Кроме того, обозначив $\bar{a} = (x, c_\eta, \dots, c_\eta)$, $\bar{c} = (x, c_\varepsilon, c_\varepsilon, \dots, c_\varepsilon)$, получим из (7) $w * \bar{a} = x$, $w * \bar{c} = c_\varepsilon$; следовательно, $\varphi x = \varphi(w * \bar{a}) = \varphi w * \varphi \bar{a} = \varphi w * \varphi \bar{c} = \varphi(w * \bar{c}) = \varphi c_\varepsilon$, и $\varphi S_{nr}(\Omega) = \varphi c_\varepsilon$.

4. 4. 1. Обозначим $F_{nr}(\Omega) = P_{nr}(\Omega) \cap F(\Omega)$ (см. п. п. 1. 9, 1. 10). Очевидно, что $F_{n2}(\Omega) = S_{n2}(\Omega)$.

Теорема. При $n > 1$, $r > 2$ оператив $F_{nr}(\Omega)$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.

Доказательство аналогично случаю $r \leq t$ в п. 4. 3.

4. 5. Оператив $V_{n2}(\Omega) = W_{n22}(\Omega)$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами в силу п. 4. 2. При $r > 2$ оператив $V_{nr}(\Omega)$ содержит собственные I -идеалы (см. п. 1. 13)* и, в силу п. 4. 1, обладает нетривиальными гомоморфизмами.

Пусть v — некоторое натуральное число; $v < r$; Σ — фиксированное подмножество Ω , $|\Sigma| = v$; N — нормальный делитель группы G всех взаимно однозначных отображений множества Σ на себя. Обозначим через σ_{nN} следующую эквивалентность на оперативе $V_{nr}(\Omega)$: для любых $a, b \in V_{nr}(\Omega)$ ($a, b \in \sigma_{nN}$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: а) $a = b$, в) $|pr_s a| < v$, $|pr_s b| < v$, с) $|pr_s a| = v$, $pr_s a = pr_s b$, $pr_v a = pr_v b$, $b = x^{-1} \circ d \circ x \circ a$, где x — взаимно однозначное отображение множества $pr_s a$ на Σ , $d \in N$.

Пусть теперь θ — конечная последовательность бесконечных кардинальных чисел μ_i, v_i таких, что

$$\mu_n < \mu_{n-1} < \dots < \mu_1 \leq v = v_1 < v_2 < \dots < v_n < v_{n+1} < r.$$

Если $a, b \in V_n(\Omega)$, то обозначим через Ω_{ab} множество всех элементов $\bar{\xi} \in pr_v a \cap pr_v b$, что $a\bar{\xi} \neq b\bar{\xi}$; обозначим, кроме того $r_{ab} = |\Omega_{ab} \cup (pr_v a \setminus pr_v b)|$. Пусть далее $\sigma_{n\theta}$ — следующая эквивалентность на оперативе $V_{nr}(\Omega)$: ($a, b \in \sigma_{n\theta}$) тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: а) $a = b$, в) $|pr_s a| < v$, $|pr_s b| < v$, с) $v_i \leq |pr_s a| = |pr_s b| < v_{i+1}$, $r_{ab} < \mu_i$ при некотором i .

Как и в [15, 8] нетрудно проверить, что σ_{nN} являются конгруэнциями на оперативе $V_{nr}(\Omega)$. В статье [15] (см. также [8]) показано, что всякая конгруэнция на полугруппе $V_1(\Omega)$ совпадает с одной из эквивалентностей σ_{1N} или $\sigma_{1\theta}$; этот результат справедлив и для полугрупп $V_{1r}(\Omega)$ — метод доказательства остается тем же.

4. 5. 1. Теорема. Всякая конгруэнция на оперативе $V_{nr}(\Omega)$ совпадает с одной из эквивалентностей σ_{nN} или $\sigma_{n\theta}$.

Доказательство. Пусть $V_\Delta = V_{nr}(\Omega, \Delta)$ — подмножество $V_{nr}(\Omega)$ состоящее из всех $u \in V_{nr}(\Omega)$, для которых $pr_v u \subseteq \Delta(\Omega^n)$ (см. введение). Каждому

отношению $u^{(1)} \in V_{1r}(\Omega)$ поставим во взаимно однозначное соответствие отношение $u \in V_{nr}(\Omega)$:

$$(36) \quad \forall_{\xi, \eta \in \Omega} (\eta, \xi) \in u^{(1)} \leftrightarrow (\eta, \xi^n) \in u.$$

Из (36), (8), (4) следует для любых $u, w \in V_n(\Omega, \Delta)$

$$(37) \quad (w \circ u^n)^{(1)} = w^{(1)} \circ u^{(1)}$$

В самом деле, если η, ξ — произвольные элементы из Ω , то

$$\begin{aligned} (\eta, \xi) \in (w \circ u^n)^{(1)} &\leftrightarrow (\eta, \xi) \in w \circ u^n \leftrightarrow \exists_{\xi^n \in \Delta(\Omega^n)} (\eta, \xi^n) \in \\ &\in w \wedge (\xi, \xi^n) \in u \leftrightarrow (\eta, \xi) \in w^{(1)} \wedge (\xi, \xi) \in u^{(1)} \leftrightarrow (\eta, \xi) \in w^{(1)}. \end{aligned}$$

Пусть σ — произвольная конгруэнция оператора $V_{nr}(\Omega)$. Обозначим через σ' следующую эквивалентность на полугруппе $V_{1r}(\Omega)$: для любых $u, w \in V_{\Delta}$

$$(38) \quad (u^{(1)}, w^{(1)}) \in \sigma' \leftrightarrow (u, w) \in \sigma$$

Из (37), (38), (8) и (4) следует, что σ' является конгруэнцией на полугруппе $V_{1r}(\Omega)$, а из п. 4. 5, — что $\sigma' = \sigma_{1N}$ или $\sigma' = \sigma_{1\theta}$. Но тогда из (37) получим $\sigma|_{v_{\Delta}} = \sigma_{nN}|_{v_{\Delta}}$ или $\sigma|_{v_{\Delta}} = \sigma_{n\theta}|_{v_{\Delta}}$ (см. п. 1. 3).

Пусть теперь a, b — произвольные элементы из $V_{nr}(\Omega)$, $(a, b) \in \sigma$, $|pr_v a| \leq |pr_v b|$ ($< r$), $\Pi = pr_v a \cup pr_v b$. Если $|\Pi| < r$, то выберем такое подмножество $\Xi \subseteq \Omega$, для которого $|\Xi| = |\Pi|$, и пусть f — взаимно однозначное отображение Ξ на Π . Обозначим через u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) следующий элемент из $V_{nr}(\Omega)$: $pr_v u_i = \Delta(\Xi^n)$ и, если для некоторого $\xi \in \Xi$ $f\xi = \bar{\eta} = (\eta_i) \in \Pi$, то $u_i(\xi^n) = \eta_i$. Тогда для $\bar{u} = (u_i)$ получим в силу (6), (7) $a \circ \bar{u} = a * \bar{u} \in V_{\Delta}$, $b \circ \bar{u} \in V_{\Delta} = V_{nr}(\Omega, \Delta)$, $(a \circ \bar{u}, b \circ \bar{u}) \in \sigma|_{v_{\Delta}}$ и, следовательно, $(a \circ \bar{u}, b \circ \bar{u}) \in \sigma_{nN}|_{v_{\Delta}}$ или соответственно $(a \circ \bar{u}, b \circ \bar{u}) \in \sigma_{n\theta}|_{v_{\Delta}}$. Поскольку u взаимно однозначно отображает множества $pr_v a$ и $pr_v b$ в $\Delta(\Omega^n)$, из определения отношений $\sigma_{n\theta}$ и σ_{nN} теперь следует $(a, b) \in \sigma_{nN}$ или $(a, b) \in \sigma_{n\theta}$.

Если же $|\Pi| \geq r$, то (в силу $|pr_v b| < r$) множество $\Pi' = pr_v b$ конечно и $\Pi'' = pr_v a \cap pr_v b \neq pr_v b$. Выбрав $\Xi \subseteq \Omega$ так, чтобы $|\Xi| = |\Pi'|$, построим (как ранее для Π) элемент $\bar{u} = (u_i)$ так, что $u(\Xi) = \Pi'$, $a \circ \bar{u} \in V_{nr}(\Omega, \Delta)$, $b \circ \bar{u} \in V_{nr}(\Omega, \Delta)$ и $(a \circ \bar{u}, b \circ \bar{u}) \in \sigma_{nN}|_{v_{\Delta}}$. Но $|pr_v(b \circ \bar{u})| = |pr_v b|$, $|pr_v(a \circ \bar{u})| = |\Pi''| < |pr_v b|$; следовательно, $v > |pr_v b|$ (см. п. 4. 5), а значит и $|pr_v a| < v$; таким образом, $(a, b) \in \sigma_{nN}$. Теорема доказана.

4. 6. Пусть S, T — две алгебраические системы с частичными операциями; S^0 и T^0 — алгебры, полученные из S и T (как и в п. 3. 4) присоединением нуля O ; Φ_0 — гомоморфизм алгебры S^0 в алгебру T^0 . Ограничение Φ гомоморфизма Φ_0 на множестве S называется гомоморфизмом алгебраической системы S . Гомоморфизм Φ называется сильным [4], если $\Phi S \subseteq T$. Как и для обычных алгебр, всякий гомоморфизм алгебраической системы S порождается некоторой ее конгруэнцией σ :

$$(39) \quad \forall_{x, y \in S} (x, y) \in \sigma \leftrightarrow \Phi x = \Phi y.$$

Гомоморфизмы алгебры $P_A(\Omega)$ и ряда ее подалгебр при $|A| = 1$ рассмотрены

в п. п. 4. 2—4. 5. 1. Легко проверить, что следующие два отношения на алгебре $P_{Ar\theta}(\Omega)$ являются ее конгруэнциями (O_m — нуль оператора $P_m(\Omega)$):

$$(x, y) \in \sigma_1 \leftrightarrow \exists_{n \in A} x \in P_n(\Omega) \wedge y \in P_n(\Omega),$$

$$(x, y) \in \sigma_2 \leftrightarrow x = y \vee \{x = O_k \wedge y = O_n\}.$$

При этом гомоморфизм алгебры $P_{Ar\theta}(\Omega)$, порожденный (в смысле соотношения (39)) эквивалентностью σ_1 , является сильным.

Теорема. Если $|A| \neq 1$, то алгебра $X_{Ar\theta}(\Omega)$ обладает тремя нетривиальными гомоморфизмами, порожденными конгруэнциями σ_1, σ_2 и $\sigma_1 \cup \sigma_2$ ($X = P$ или W).

Доказательство. Пусть ϕ — произвольный собственный гомоморфизм алгебры $X_{Ar\theta}(\Omega)$. Допустим сначала, что существует хотя бы одна пара различных элементов x, x' в одном и том же операторе $X_n = X_{nrn}(\Omega)$, для которых $\phi x = \phi x'$. Тогда найдется элемент $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n$ такой, что $x \langle \bar{\xi} \rangle \neq x' \langle \bar{\xi} \rangle$. Если k — произвольный индекс из A и

$$(40) \quad \bar{\xi} \in \Omega^k, \quad \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_k = (\xi_i, \bar{\xi}) \in X_k$$

то в силу (32), $x * \bar{y} \langle \bar{\xi} \rangle = x \langle \bar{\xi} \rangle$, $x' * \bar{y} \langle \bar{\xi} \rangle = x' \langle \bar{\xi} \rangle$ и $x * \bar{y} \neq x' * \bar{y}$. В то же время оба эти элемента содержатся в X_k и $\phi(x * \bar{y}) = \phi x * \phi \bar{y} = \phi x' * \phi \bar{y} = \phi(x' * \bar{y})$. Из п. п. 4. 2, 4. 3 следует, что $\phi X_n = \phi O_n$ при $n \neq 1$.

Если $1 \notin A$ и A содержит хотя бы один элемент $n \neq 1$, то как и выше, $\phi X_n = \phi O_n$. Если $r \leq t_n$, то поступаем с X_1 так же, как и в п. 4. 3. Пусть z — произвольный элемент из X_1 , $\eta \in \Omega$, $w \in W_{nrn}(\Omega)$, $a \in W_{1r1}(\Omega)$, $pr_v a = pr_v z$, $a \bar{\xi} = \eta$ для любого $\bar{\xi} \in pr_v x$; $pr_v w = pr_s z \times \{\eta\}^{n-1}$, $w \bar{\xi} = \xi_1$, для любого $\bar{\xi} = (\xi_i) \in pr_v w$; $\bar{a} = (z, a, a, \dots, a)$. Тогда $w * \bar{a} = x$, $w \in W_{nrn}(\Omega)$, $\phi x = \phi(w * \bar{a}) = \phi w * \phi \bar{a} = \phi O_n * \phi \bar{a} = \phi(O_n * \bar{a}) = \phi O_1$.

Если же $r \geq t_n$, то выберем элементы $u \in X_n(\Omega)$, $c \in X_1(\Omega)$ так, что $pr_v u = pr_v z \times \{\eta\}^{n-1}$, $pr_v c = pr_v z$ и для всякого $\xi \in pr_v z$ (обозначая $\bar{\xi} = (\xi, \eta, \eta, \dots, \eta)$, $\bar{c} = (c, a, a, \dots, a)$) $c \bar{\xi} = \xi$, $u \bar{\xi} = z \bar{\xi}$. Тогда $u * \bar{c} = z$ и снова $\phi z = \phi u * \bar{c} = \phi O_n * \bar{c} = \phi(O_n * \bar{c}) = \phi O_1$.

Если $\phi x \neq \phi z$ при любых x, z из различных X_n, X_k , то гомоморфизм ϕ порождается конгруэнцией σ_1 . Пусть теперь $\phi x = \phi z$, $x \in X_n$, $z \in X_k$, $k \neq n$; $\bar{y} = (y_i) \in X_k^n$ (см. (40)). Тогда из п. 4. 3 следует, что $z_k = x * \bar{y} \in X_k$ и

$$(41) \quad \phi z_k = \phi(x * \bar{y}) = \phi x * \phi \bar{y} = \phi z * \phi \bar{y} = \phi(z * \bar{y}) = \phi O$$

В силу п. 4. 3 элемент O является нулем оператора $P_{nrn}(\Omega)$; из п. 4. 1 и (43) следует, что при любом $k \in A$ множество I_k всех элементов $z_k \in X_k$ таких, что $\phi z_k = \phi O$, является sl -идеалом оператора X_k . Из п. п. 1. 11, 1 и 4. 3 следует, что при $k \neq 1$ либо $I_k = \{O_k\}$ либо $I_k = X_k$.

Пусть $I_n \neq \{O_n\}$ хотя бы при одном $n \in A$; например, элемент x в (41) отличен от O_n . Тогда из (40), (41) следует, что $z_k \in I_k \setminus \{O\}$ при любом $k \in A$, и $I_k = X_k$ при $k \neq 1$. Кроме того, $\phi z_1 = \phi O_1$, $z_1 \neq O_1$; как и выше, в силу $|A| \neq 1$ отсюда следует $\phi X_1 = \phi O_1$. В этом случае $\phi X_{Ar\theta}(\Omega) = \phi O$.

Если же все $I_k = \{O_k\}$ (из (41) следует, что все I_k в рассматриваемом случае непусты), то гомоморфизм Φ порождается конгруэнцией σ_2 или $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

4. 6. 1. Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. Если $|A| \neq 1$, $r > 2$, то единственным нетривиальным гомоморфизмом алгебры $Y_{Ar}(\Omega)$ ($Y=F$ или $Y=S$) является гомоморфизм, порожденный конгруэнцией σ_1 .

4. 6. 2. Пусть σ — произвольная эквивалентность на множестве Ω . Отношение σ_{AS} на алгебре $S_{A2}(\Omega) = F_{A2}(\Omega)$

$$(x, y) \in \sigma_{AS} \leftrightarrow \exists_{n \in A} x \in S_{n2} \wedge y \in S_{n2} \wedge (x \langle \Omega^n \rangle, y \langle \Omega^n \rangle) \in \sigma$$

является ее конгруэнцией, порождающей сильный гомоморфизм.

Теорема. Всякий нетривиальный гомоморфизм алгебры $S_{A2}(\Omega)$ порождается одной из конгруэнций σ_{AS} .

Доказательство. Пусть Φ — произвольный гомоморфизм алгебры $S_{A2}(\Omega)$. Для каждого $n \in A$ Φ индуцирует эквивалентность ϱ_n на множестве Ω : $(\xi, \eta) \in \varrho_n \leftrightarrow \Phi c_{\xi n} = \Phi c_{\eta n}$, где $c_{\xi n}$ — отображение Ω^n на $\{\xi\}$. Если $\Phi c_{\xi n} = \Phi c_{\eta n}$, то для любого $k \in A$ имеем, обозначая $c = c_{\xi k}$,

$$\Phi c_{\xi k} = \Phi(c_{\xi n} * c^n) = \Phi c_{\xi n} * \Phi c^n = \Phi c_{\eta n} * \Phi c^n = \Phi(c_{\eta n} * c^n) = \Phi c_{\eta k}.$$

Таким образом $\varrho_n = \varrho_k (= \sigma)$ для любого $k \in A$.

Из п. 1. 12, как и в п. 4. 6, следует, что для нетривиального гомоморфизма алгебры $S_{A2}(\Omega)$ $\Phi S_{n2}(\Omega) \cap \Phi S_{k2}(\Omega) = \emptyset$ при $k \neq n$.

4. 7. Каждая из эквивалентностей на алгебре $V_{Ar}(\Omega)$ (см. п. п. 3. 4, 4. 5).

$$(42) \quad (x, y) \in \sigma_{AN} \leftrightarrow \{ \bigcup_{n \in A} x \in V_n \wedge y \in V_n \wedge (x, y) \in \sigma_{nN} \},$$

$$(x, y) \in \sigma_{A\emptyset} \leftrightarrow \{ \bigcup_{n \in A} x \in V_n \wedge y \in V_n \wedge (x, y) \in \sigma_{n\emptyset} \},$$

$$(x, y) \in \sigma_{AZ}^{\circ} \leftrightarrow (x, y) \in \sigma_{AZ} \vee \{ |pr_s x| < v \wedge |pr_s y| < v \}.$$

(где $V_n = V_n(\Omega)$, $Z=N$ или $Z=\emptyset$), является, как нетрудно проверить, ее конгруэнцией; σ_{AN} и $\sigma_{A\emptyset}$ порождают сильный гомоморфизм алгебры $V_{Ar}(\Omega)$.

Теорема. Всякий гомоморфизм алгебры $V_{Ar}(\Omega)$ порождается одной из конгруэнций (42).

Доказательство. Гомоморфизм Φ алгебры $V_{Ar}(\Omega)$ при любом $n \in A$ индуцирует на $V_{nr}(\Omega)$ гомоморфизм, порожденный конгруэнцией σ_n . Из п. 4. 5 следует, что $\sigma_n = \sigma_{nN}$ или $\sigma_n = \sigma_{n\emptyset}$.

Пусть $k, n \in A$, $k < n$, $x, y \in V_{nr}(\Omega)$, $(x, y) \in \sigma_n$. Тогда при любом $u \in V_{kr}(\Omega)$, в силу (32), $x * u^n, y * u^n \in V_{kr}(\Omega)$ и $(x * u^n, y * u^n) \in \sigma_k$. Выбирая подходящим образом элементы $u \in V_{kr}(\Omega)$, как и в п. 4. 5. 1, можно показать, что $\sigma_n = \sigma_{nN} \rightarrow \sigma_k = \sigma_{kN}$ (при одном и том же выборе N и v) и аналогично $\sigma_n = \sigma_{n\emptyset} \rightarrow \sigma_k = \sigma_{k\emptyset}$.

Если $\phi V_{nr}(\Omega) \cap \phi V_{kr}(\Omega) = \emptyset$ при любых $k, n \in A$, $k \neq n$ то гомоморфизм ϕ порождается одной из конгруэнций σ_{AZ} , где $Z=N$ или $Z=\emptyset$. В противном случае, как и в доказательстве теоремы п. 4.6, покажем, что все идеалы I_k , где $\phi I_k = \phi O$, не пусты. Из строения конгруэнций σ_n вытекает только одна возможность — $I_k = V_{kv}(\Omega)$, и тогда гомоморфизм ϕ порождается одной из конгруэнций ϕ_{AZ}^0 , где $Z=N$ или $Z=\emptyset$.

Литература

- [1] K. Menger, The algebra of functions: past, present, future. *Rendiconti di matematica*, **20** (1961), 409—430.
- [2] H. I. Whitlock, A composition algebra for multiplace functions. *Math. Ann.*, **157** (1964), 167—168.
- [3] R. Dickson, The substitutive law. *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), 493—510.
- [4] В. В. Вагнер, Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. I, 3—178. Саратов, 1965.
- [5] Б. М. Шайн, Теория полугрупп как теория суперпозиции многоместных функций. В сб. «Межвузовский симпозиум по общей алгебре». Тарту, 1966, стр. 169—190.
- [6] Л. М. Глушкин, Алгебры многоместных функций. В сб. «Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре». Тарту, 1966, стр. 32—37.
- [7] А. И. Мальцев, Симметрические группоиды. *Матем. сб.*, **31** (73), № 1, (1952), 136—151.
- [8] Э. Г. Шуров, Гомоморфизмы полугруппы всех частичных преобразований. Известия вузов, *Математика*, № 3 (22), (1961), 177—184.
- [9] Л. М. Глушкин, О плотных вложениях. *Матем. сб.*, **61** (103), № 2, 175—206.
- [10] Е. С. Ляпин, Ассоциативные системы всех частичных преобразований. ДАН СССР, **88**, № 1, (1953), 13—16.
- [11] Л. М. Глушкин, Идеалы полугрупп преобразований. *Матем. сб.*, **47** (89), № 1, (1959), 111—130.
- [12] Л. М. Глушкин, Идеалы полугрупп. *Матем. сб.* **55** (97), № 4, (1961), 421—448.
- [13] Л. М. Глушкин, Идеалы полугрупп. В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. I. Саратов, 1965, стр. 198—228.
- [14] Я. В. Хон, Ω -системы. В сб. «Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре». Тарту, 1966, стр. 123—130.
- [15] А. Е. Либер, О симметрических обобщенных группах. *Матем. сб.*, **33** (75), № 3, (1953), 531—544.
- [16] Л. М. Глушкин, Автоморфизмы полугрупп бинарных отношений. Математические записки Уральского государственного университета им. Горького, **6**, № 1, (1967), 44—54.
- [17] В. В. Вагнер, Теория обобщенных групп и обобщенных групп. *Матем. сб.*, **32** (74), № 3, (1953), 545—632.

(Поступило 24. IV. 1968 г.)