

Метод подвижного репера в пространстве линейных элементов с общим законом преобразования

Н. И. КОВАНЦОВ (КИЕВ), ПЕТЕР НАДЬ (СЕГЕД)*

Содержание

- § 1. Введение.
- § 2. Аффинное пространство обобщенных векторов.
- § 3. Метрическое пространство обобщенных векторов.
- § 4. Инварианты.
- § 5. Аффинное пространство обобщенных и обыкновенных векторов.
- § 6. Метрическое пространство обобщенных и обыкновенных векторов.

§ 1. Введение

Пространство линейных элементов определяется как пространство пар (x^i, v^i) $i=1, \dots, n$, где x^i — координаты точки (центра элемента), v^i — координаты вектора, ассоциированного с этой точкой. При преобразовании координат центра $\hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, \dots, x^n)$ координаты вектора меняются по обычным формулам:

$$\hat{v}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} v^j.$$

Теории таких пространств посвящена довольно обширная литература, в рассмотрение которой мы сейчас входить не будем. Классическим примером пространства линейных элементов может служить пространство Финслера [1], в котором в качестве координат вектора v^i берут дифференциалы координат точки пространства dx^i . Впрочем, часто под финслеровым пространством понимают любое пространство линейных элементов.

Э. Картан, вероятно, был первым, приложившим к исследованию финслерова пространства метод подвижного репера [2]. Впоследствии этот метод был использован О. Варгой для изучения геометрии произвольного пространства линейных элементов.

В работе [3] А. Моор рассмотрел теорию параллельного перенесения в пространстве линейных элементов (обозначаем $\mathcal{M}_n$) с более общим, чем обычно, законом преобразования этих элементов. Именно, такое пространство

* Nagy Péter (Szeged)

определяется также как совокупность пар (x^i, v^i) , однако при преобразовании координат центра

$$(1) \quad \hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, \dots, x^n)$$

координаты вектора меняются уже по формулам

$$(2) \quad \hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n),$$

где

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} v^j,$$

а $\hat{v}^i$ — однородные функции первого измерения относительно своих аргументов. В указанной работе А. Моор ввел целый ряд понятий, из которых мы отметим следующие:

1. Обобщенный тензор как такая совокупность функций $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x, v)$, которые при преобразовании координат (1) меняются по формулам

$$\hat{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^{i_1}}{\partial v^{a_1}} \dots \frac{\partial \hat{v}^{i_r}}{\partial v^{a_r}} \frac{\partial v^{b_1}}{\partial \hat{v}^{j_1}} \dots \frac{\partial v^{b_s}}{\partial \hat{v}^{j_s}} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}.$$

2. Псевдотензор как такая совокупность функций $F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x, v)$, которые при преобразовании (1) меняются по формулам

$$(4) \quad \hat{F}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\hat{x}, \hat{v}) = p_{a_1}^{i_1} \dots p_{a_r}^{i_r} q_{j_1}^{b_1} \dots q_{j_s}^{b_s} F_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}(x, v),$$

где p_a^i и q_j^b есть производные $\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}$, $\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a}$ и $\frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}$, $\frac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^j}$, но при этом оба типа величин, содержащих ∂x и ∂v , в формулу (4) обязательно входят одновременно.

В частности имеют обобщенные контравариантные и ковариантные векторы. Псевдовекторы как таковые не существуют.

3. Инвариантный дифференциал обобщенного контравариантного вектора

$$(5) \quad DX^i = dX^i + M_{jk}^i X^j dv^k + L_{jk}^i X^j dx^k.$$

Из требования, что DX^i должен быть также обобщенным контравариантным вектором, следуют такие формулы преобразования коэффициентов M_{pq}^i и L_{pq}^i :

$$(6) \quad \begin{aligned} \hat{M}_{pq}^i &= M_{jk}^i \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q} - \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^j \partial v^k} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q}, \\ \hat{L}_{pq}^i &= L_{sr}^i \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \hat{M}_{pk}^i \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial x^r \partial v^s} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p}. \end{aligned}$$

Из требования, что равенство (5) должно быть инвариантным относительно замены v^i на pv^i , следует, что коэффициенты L_{jk}^i должны быть однородными функциями от v нулевого измерения, а M_{jk}^i — однородными функциями измере-

ния -1 также относительно v . При этом эти функции могут зависеть также от x и, кроме того, выполняются следующие равенства:

$$M_{j0}^i \stackrel{\text{def}}{=} M_{jk}^{i'} v^k = 0.$$

Понятие инвариантного дифференциала может быть перенесено на обобщенные тензоры, обычные векторы и псевдотензоры.

В настоящей заметке мы делаем попытку применить к изучению пространства $\mathfrak{M}_n$ метод подвижного репера и получить ряд формул, содержащихся в [3], из условной инвариантности уравнений движения репера.

§ 2. Аффинное пространство обобщенных векторов

Возьмем n — мерное аффинное пространство, отнесенное к подвижному реперу R, l_i ($i=1, \dots, n$). Пусть R — радиус-вектор текущей точки пространства. Мы предполагаем, что этот радиус-вектор зависит от переменных x^i, v^i . Дери- вационные уравнения пространства определим равенствами

$$(7) \quad \begin{aligned} dR &= \omega^i l_i, \\ dl_i &= \omega_i^j l_j, \end{aligned}$$

где

$$(8) \quad \begin{aligned} \omega^i &= dv^i + L_{0r}^i dx^r, \\ \omega_i^j &= M_{ik}^j dv^k + L_{ik}^j dx^k = M_{ik}^j \omega^k + (L_{ij}^j - M_{it}^j L_{0k}^t) dx^k, \end{aligned}$$

причем, как это сделано А. Моором, мы полагаем

$$(9) \quad M_{ik}^j v^k = 0, \quad L_{0r}^i \stackrel{\text{def}}{=} L_{jr}^i v^j.$$

Пространство, дериационные уравнения которого имеют вид (7), назовем аффинным пространством обобщенных векторов.

При переходе от переменных x^i, v^j к переменным $\hat{x}^i, \hat{v}^j$ векторы и формы меняются по формулам:

$$(10) \quad \begin{aligned} \hat{\omega}^i &= \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^k} \omega^k, \\ \hat{l}_i &= \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^i} l_k, \\ \hat{\omega}_i^j &= \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^i} \omega_t^k + \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \frac{\partial^2 v^k}{\partial \hat{v}^i \partial \hat{v}^p} d\hat{v}^p + \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \frac{\partial^2 v^k}{\partial \hat{v}^i \partial \hat{x}^j} d\hat{x}^j. \end{aligned}$$

Полагая здесь

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_i^j &= \hat{M}_{ik}^j d\hat{v}^k + \hat{L}_{ik}^j d\hat{x}^k, \\ d\hat{x}^k &= \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} dx^i, \\ d\hat{v}^k &= \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^s} dx^s + \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^t} dv^t \end{aligned}$$

и сравнивая коэффициенты при dx^k , dv^k , мы придем к равенствам (6). Это и есть одна из целей, которые мы перед собой ставили.

Всякий обобщенный контравариантный вектор X может быть определен равенством

$$(11) \quad X = X^i l_i.$$

Условие его неподвижности имеет вид $d(X^i l_i) = 0$, откуда, в силу независимости координатных векторов l_i , получаем

$$(12) \quad DX^i = dX^i + (M_{jk}^i dv^k + L_{jk}^i dx^k) X^j = 0.$$

Слева, как видим, стоят координаты абсолютного дифференциала вектора X , которые мы, в соответствии с равенством (5), обозначили символом DX^i .

В произвольном пространстве $\mathfrak{M}_n$ уравнения (12) не являются вполне интегрируемыми. Поэтому на эти уравнения следует смотреть как на условия параллельного перенесения вектора, аналогичные условиям Леви-Чивита.

Продифференцируем внешним образом уравнения (12):

$$D(dX^i + M_{jk}^i X^j dv^k + L_{jk}^i X^j dx^k) = 0$$

(D -символ внешнего дифференцирования). Выполняя дифференцирования и приравнявая нулю коэффициенты при $[dx^l dx^k]$, $[dv^l dv^k]$, $[dx^l dv^k]$, мы, учитывая сами равенства (12) и то, что вектор X совершенно произволен, придем к соотношениям

$$(13) \quad \begin{aligned} R_{pkl}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L_{pk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial L_{pl}^i}{\partial x^k} + L_{pk}^j L_{jl}^i - L_{pl}^j L_{jk}^i = 0, \\ S_{pkl}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M_{pk}^i}{\partial v^l} - \frac{\partial M_{pl}^i}{\partial v^k} + M_{pk}^j M_{jl}^i - M_{pl}^j M_{jk}^i = 0, \\ P_{pkl}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M_{pk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial L_{pl}^i}{\partial v^k} + L_{jl}^i M_{pk}^j - L_{pl}^j M_{jk}^i = 0. \end{aligned}$$

Выражения, стоящие в левых частях последних равенств, лишь несущественно отличаются от коэффициентов R_{pkl}^i , S_{pkl}^i , P_{pkl}^i , которые приведены в формулах (7.5) работы [3]. Мы имели бы совпадение, если бы записали уравнения (12) в виде

$$dX^i + M_{jk}^i X^j \omega^k + L_{jk}^{*i} X^j dx^k = 0,$$

где

$$L_{jk}^{*i} = L_{jk}^i - M_{jr}^i L_{ok}^r$$

(см. (4.4) и (4.5) работы [3]) и собрали бы после внешнего дифференцирования коэффициенты при $[dx^l dx^k]$, $[\omega^l \omega^k]$, $[dx^l \omega^k]$.

Условия (13) есть условия полной интегрируемости системы (12). Записывая уравнения последней системы в виде

$$dX^i + X^j \omega_j^i = 0,$$

мы видим, что условия (13) равносильны следующим

$$(14) \quad D\omega_l^j = [\omega_l^k \omega_k^j],$$

а это в свою очередь означает полную интегрируемость системы уравнений стоящей во второй строчке равенств (7).

Входящие в уравнения (12) функции M_{jk}^i вообще говоря не симметричны относительно индексов j, k . Условие $M_{jk}^i v^k = 0$, которому подчиняются эти функции, имеют ту особенность, что суммирование производится по второму индексу. Лишь в этом случае абсолютный дифференциал (см. (5)) будет сохранять свое значение при замене v^k на $q v^k$.

В статье [3], в равенстве (4.2), допущена описка, в соответствии с которой суммирование берется по первому индексу. Писки не было бы лишь в том случае, когда функции M_{jk}^i симметричны по нижним индексам.

Покажем, что условий (13) не достаточно для того, чтобы система (7) была вполне интегрируема — необходимым и достаточным условием полной интегрируемости этой системы являются равенства (13) вместе с дополнительным условием

$$(15) \quad M_{jk}^i = M_{kj}^i.$$

Действительно, дифференцируя равенство $M_{jk}^i v^k = 0$ по x^l и v^l , будем иметь

$$(16) \quad v^k \frac{\partial M_{jk}^i}{\partial x^l} = 0,$$

$$(17) \quad M_{jl}^i + v^k \frac{\partial M_{jk}^i}{\partial v^l} = 0.$$

Дифференцируя внешним образом систему (7), мы, кроме (14), получим еще равенства

$$(18) \quad D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i].$$

Равенства (14) выполнены в силу (13). Что же касается равенств (18), то, принимая во внимание (13), мы сведем эти равенства к следующим

$$M_{jk}^i = M_{kj}^i, \\ v^j \left(\frac{\partial L_{jr}^i}{\partial v^l} + M_{kl}^i L_{jr}^k \right) = 0.$$

Учитывая (15) и (9), последнее равенство можно записать в виде:

$$v^j \left(\frac{\partial L_{jr}^i}{\partial v^l} - \frac{\partial M_{jl}^i}{\partial x^r} + L_{jr}^k M_{kl}^i - L_{kr}^i M_{jl}^k \right) = 0.$$

Но это соотношение выполнено в силу третьего равенства (13). Остается, таким образом, лишь равенство (15), а это и доказывает утверждение.

Интегрируя уравнения (7) в случае, когда система вполне интегрируема, получаем радиус-вектор текущей точки аффинного пространства вместе с сопровождающим репером:

$$R = R(x^i, v^i),$$

$$I_i = I_i(x^i, v^i).$$

Все функции зависят от $2n$ переменных x^i, v^i .

Примечание: Можно было бы получить все соотношения, рассматриваемые в работе [3], взяв не аффинное, а проективное пространство P_{n-1} , отнесенное к подвижному реперу $l_1, \dots, l_n$. В этом случае достаточно было бы ограничиться лишь второй строчкой системы (7), для полной интегрируемости которой равенства $M_{jk}^i = M_{kj}^i$ не были бы необходимыми.

При $M_{jk}^i \neq M_{kj}^i$ разности $M_{jk}^i - M_{kj}^i$ образуют тензор, который было бы естественно назвать тензором кручения.

§ 3. Метрическое пространство обобщенных векторов

Полагая

$$l_i l_j = g_{ij},$$

где g_{ij} — функции от x^i, v^i , получим метрическое пространство обобщенных векторов. Дифференцируя последнее равенство и принимая во внимание соотношения (7), будем иметь

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik},$$

или

$$dg_{ij} = g_{kj}(M_{ip}^k dv^p + L_{ip}^k dx^p) + g_{ik}(M_{jp}^k dv^p + L_{jp}^k dx^p).$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^p} = g_{kj} M_{ip}^k + g_{ik} M_{jp}^k,$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} = g_{kj} L_{ip}^k + g_{ik} L_{jp}^k.$$

Если $M_{jk}^i = M_{kj}^i$ и $L_{jk}^i = L_{kj}^i$, то из последних равенств получаем

$$(20) \quad \begin{aligned} M_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial v^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial v^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^l} \right), \\ L_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \end{aligned}$$

где функции g^{kl} определяются алгебраическими уравнениями

$$(21) \quad g^{kl} g_{il} = \delta_i^k,$$

разрешимыми в силу линейной независимости векторов l_i и тем самым невырожденности определителя $|g_{ij}|$. Впрочем, равенства $L_{jk}^i = L_{kj}^i$ не инвариантны относительно преобразования координат (2).

Если же коэффициенты M_{ij}^k и L_{ij}^k не симметричны по нижним индексам, то вместо равенств (20) мы получим более сложные равенства. Именно, пола-

гая

$$(22) \quad M_{ij}^k - M_{ji}^k = T_{ij}^k,$$

$$(23) \quad L_{ij}^k - L_{ji}^k = U_{ij}^k,$$

мы из равенств (19) получаем

$$(24) \quad M_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial v^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial v^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^l} \right) + \frac{g^{kl}}{2} (g_{si} T_{jl}^s + g_{js} T_{il}^s + g_{sl} T_{ij}^s),$$

$$(25) \quad L_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{g^{kl}}{2} (g_{si} U_{jl}^s + g_{js} U_{il}^s + g_{sl} U_{ij}^s).$$

§ 4. Инварианты

Обратимся к равенствам (13). Легко обнаруживается, что функции S_{pkl}^i образуют четырехвалентный обобщенный тензор — это было отмечено А. Моором. Четырехвалентный четырехждыковариантный обобщенный тензор образуют также функции

$$(26) \quad S_{ipkl} = g_{ij} S_{pkl}^j.$$

Пусть теперь ξ^i — компоненты обобщенного вектора, следовательно, при переходе в новой системе координат эти компоненты меняются по формулам

$$(27) \quad \hat{\xi}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} \xi^j.$$

Два таких обобщенных вектора ξ_1^i, ξ_2^i определяют бивектор и, следовательно, некоторую двумерную площадку в аффинном пространстве обобщенных векторов. Величина

$$(28) \quad K = \frac{S_{ijkl} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_2^i \\ \xi_1^j & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^k & \xi_2^k \\ \xi_1^l & \xi_2^l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_2^i \\ \xi_1^j & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^k & \xi_2^k \\ \xi_1^l & \xi_2^l \end{vmatrix}}$$

есть инвариант, соответствующий этой площадке. По аналогии с римановой геометрией эту величину можно назвать обобщенной кривизной метрического пространства обобщенных векторов в заданном двумерном направлении. Однако, в отличие от римановой геометрии, инвариант K не может быть истолкован как предел отношения угла приращения, приобретенным обобщенным вектором X при параллельном перенесении по некоторому контуру, к площади геодезической поверхности, ограниченной этим контуром.

Кроме инварианта (28), можно отметить два других инварианта, так или иначе обобщающих понятие кривизны двумерной геодезической поверхности

в римановом пространстве (кривизны пространства в заданном двумерном направлении):

$$(29) \quad K_1 = \frac{R_{ijkl} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1^k & \eta_1^l \\ \eta_2^k & \eta_2^l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^k & \xi_1^l \\ \xi_2^k & \xi_2^l \end{vmatrix}},$$

$$(30) \quad K_2 = \frac{P_{ijkl} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1^k & \eta_1^l \\ \eta_2^k & \eta_2^l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^k & \xi_1^l \\ \xi_2^k & \xi_2^l \end{vmatrix}}.$$

Здесь $R_{ijkl} = g_{pi} R_{jkl}^p$, $P_{ijkl} = g_{pi} P_{jkl}^p$, а R_{jkl}^p и P_{jkl}^p определяются равенством (7.5) работы [3]. ξ^i — координаты обобщенного, η^i — координаты обыкновенного вектора, которые при изменении параметризации пространства меняются по формулам

$$(31) \quad \hat{\eta}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k} \eta^k.$$

Как показывают равенства (29) и (30), оба инварианта K_1 и K_2 определяются четверкой векторов, из которых два обыкновенных и два обобщенных.

§ 5. Аффинное пространство обобщенных и обыкновенных векторов

Вместо уравнений (7) можно рассматривать более общие уравнения

$$(32) \quad \begin{aligned} dR &= \omega^i l_i + dx^i f_i, \\ dl_i &= \omega_i^j l_j, \\ df_i &= v_i^j f_j, \end{aligned}$$

где

$$(33) \quad v_i^j = K_{ik}^j dx^k + N_{ik}^j \omega^k.$$

Назовем пространство с такими деривационными уравнениями аффинным пространством обобщенных и обыкновенных векторов.

Для инвариантности уравнений (32) необходимо и достаточно, чтобы, кроме соотношения (14), выполнялись также соотношения

$$(34) \quad \begin{aligned} \hat{f}^i &= \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} f_j, \\ \hat{v}_i^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \hat{x}^i} v_l^k + \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \hat{x}^i \partial \hat{x}^p} d\hat{x}^p. \end{aligned}$$

Полагая

$$\hat{v}_i^j = \hat{K}_{ik}^j d\hat{x}^k + \hat{N}_{ik}^j \hat{\omega}^k,$$

мы приходим к следующим формулам преобразования коэффициентов K_{ik}^j , N_{ik}^j :

$$(35) \quad \begin{aligned} \hat{K}_{ik}^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} K_{qr}^p + \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \hat{x}^i \partial \hat{x}^k}, \\ \hat{N}_{ik}^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial v^q}{\partial \hat{v}^p} N_{lq}^k. \end{aligned}$$

Из компонент N_{ij}^k и K_{ij}^k можно образовать тензоры и псевдотензоры, совершенно аналогичные тензорам и псевдотензорам R_{ikl}^j , P_{ikl}^j , S_{ikl}^j работы [3]. Так, требуя, чтобы система (32) была вполне интегрируема, мы, кроме равенств (14) и (18), получаем еще равенства

$$(36) \quad Dv_i^j = [v_i^k v_k^j], \quad [v_i^j dx^j] = 0.$$

С другой стороны, дифференцируя внешним образом формы (33), будем иметь

$$Dv_i^j = [dK_{ik}^j dx^k] + dN_{ik}^j \omega^k + N_{ik}^j [\omega^l \omega_l^k],$$

Внося это в первое равенство (36), получим:

$$(37) \quad \tilde{R}_{ikl}^j [dx^l dx^k] + \tilde{P}_{ikl}^j [dx^l \omega^k] + \tilde{S}_{ikl}^j [\omega^k \omega_l^j] = 0,$$

где

$$(38) \quad \begin{aligned} \tilde{R}_{ikl}^j &= \frac{\partial K_{ik}^j}{\partial x^l} - \frac{\partial K_{il}^j}{\partial x^k} + \frac{\partial K_{il}^j}{\partial v^q} L_{0k}^q - \frac{\partial K_{ik}^j}{\partial v^q} L_{0l}^q + K_{ik}^s K_{sl}^j - K_{il}^s K_{sk}^j, \\ \tilde{P}_{ikl}^j &= -\frac{\partial K_{il}^j}{\partial v^k} + \frac{\partial N_{ik}^j}{\partial x^l} - \frac{\partial N_{il}^j}{\partial v^s} L_{0l}^s - N_{is}^j L_{kl}^{*s} + K_{sl}^j N_{ik}^s - K_{il}^s N_{sk}^j, \\ \tilde{S}_{ikl}^j &= \frac{\partial N_{ik}^j}{\partial v^l} - \frac{\partial N_{il}^j}{\partial x^k} + N_{is}^j M_{ik}^s - N_{is}^j M_{kl}^s + N_{ik}^s N_{sl}^j - N_{il}^s N_{sk}^j. \end{aligned}$$

Если уравнения $df_i = v_i^j f_j$ не образуют вполне интегрируемой системы, то левая часть (37) не равна нулю. Так как обращение ее в нуль имеет инвариантный смысл, то это наводит на легко проверяемую мысль о том, что она представляет собой некоторый двухвалентный обыкновенный тензор. Но в таком случае, учитывая, что dx^i — обыкновенный, а ω^i — обобщенный вектор, заключим, что $\tilde{R}_{ikl}^j$ есть обыкновенный четырехвалентный тензор, а $\tilde{P}_{ikl}^j$ и $\tilde{S}_{ikl}^j$ — псевдотензоры:

$$(39) \quad \begin{aligned} \hat{\tilde{R}}_{ikl}^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^c}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^l} \tilde{R}_{bc p}^a, \\ \hat{\tilde{P}}_{ikl}^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial v^c}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^l} \tilde{P}_{bc p}^a, \\ \hat{\tilde{S}}_{ikl}^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial v^c}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial v^p}{\partial \hat{v}^l} \tilde{S}_{bc p}^a. \end{aligned}$$

Если теперь принять во внимание второе равенство системы (36), то оно приводит к следующим соотношениям:

$$K_{ik}^j = K_{ki}^j, \quad N_{ik}^j = 0.$$

В этом случае условие интегрируемости (37), которое сводится к равенствам $\tilde{K}_{ikl}^j = \tilde{P}_{ikl}^j = \tilde{S}_{ikl}^j = 0$, приводит к тому, что коэффициенты K_{ij}^k не зависят от v^p , а $\tilde{K}_{ikl}^j$ представляют собой компоненты обыкновенного тензора кривизны.

§ 6. Метрическое пространство обобщенных и обыкновенных векторов

Наряду с обобщенным тензором g_{ij} можно ввести обыкновенный дважды ковариантный тензор

$$(40) \quad \gamma_{ij} = f_i f_j.$$

Пространство с таким тензором (а также с тензором g_{ij}) назовем метрическим пространством обобщенных и обыкновенных векторов.

Дифференцируя (40), находим

$$d\gamma_{ij} = v_i^k \varphi_{kj} + v_j^k \gamma_{ik},$$

или

$$(41) \quad d\gamma_{ij} = \gamma_{kj} (K_{il}^k dx^l + N_{il}^k \omega^l) + \gamma_{ik} (K_{jl}^k dx^l + N_{jl}^k \omega^l).$$

Предполагая, что векторы f_i линейно независимы, заключаем, что $|\gamma_{ij}| \neq 0$, а тогда мы можем однозначно решить равенства

$$(42) \quad \gamma_{ij} \gamma^{jk} = \delta_i^k.$$

Если $\tilde{K}_{ij}^k \neq K_{ji}^k$ ($\tilde{K}_{ij}^k = K_{ij}^k + N_{il}^k L_{0j}^l$), то полагая

$$(43) \quad \tilde{K}_{ij}^k - \tilde{K}_{ji}^k = \tilde{V}_{ij}^k,$$

мы из (41) найдем

$$(44) \quad \tilde{K}_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{kl} \left(\frac{\partial \gamma_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\gamma^{kl}}{2} \left(g_{sl} \tilde{V}_{ji}^s g_{js} \tilde{V}_{il}^s + g_{sl} \tilde{V}_{ij}^s \right) \right).$$

В случае симметрии $\tilde{K}_{ij}^k = \tilde{K}_{ji}^k$ получаем

$$(45) \quad \tilde{K}_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{kl} \left(\frac{\partial \gamma_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Полагая

$$(46) \quad \tilde{S}_{ijkl} = g_{is} \tilde{S}_{jkl}^s,$$

можно найти инвариант

$$(47) \quad \tilde{K} = \frac{\tilde{S}_{ijkl} \begin{vmatrix} \eta_1^i & \eta_1^j \\ \eta_2^i & \eta_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1^k & \eta_1^l \\ \eta_2^k & \eta_2^l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_{ik} & \gamma_{il} \\ \gamma_{jk} & \gamma_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1^i & \eta_1^j \\ \eta_2^i & \eta_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1^k & \eta_1^l \\ \eta_2^k & \eta_2^l \end{vmatrix}},$$

являющийся новым обобщением кривизны риманова пространства в двумерном направлении, определяемом обыкновенными векторами η_1^i, η_2^i .

$$(48) \quad \eta = \eta^i f_i.$$

Условием неподвижности такого вектора является равенство $d\eta = 0$, или

$$(49) \quad D\eta^i = d\eta^i + v_j^i \eta^j = 0.$$

Полная интегрируемость этой системы уравнений будет имать место лишь при выполнении равенств (37). При невыполнении этих равенств условия (49) следует рассматривать как аналог параллельного перенесения обыкновенного вектора в пространстве $\mathfrak{M}_n$. Однако, в отличие от риманова пространства, инвариант $\tilde{K}$ в общем случае не имеет геометрического смысла, в соответствии с которым он равен пределу отношения угла приращения параллельно обнесенного в соответствии с (49) обыкновенно вектора к площади обнесенной поверхности.

Можно было бы выписать и инварианты, аналогичные инвариантам K_1 и K_2 .

Литература

- [1] P. FINSLER, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, *Diss.* Göttingen, 1918.
- [2] E. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Paris*, 1937.
- [3] A. MOÓR, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 263—287.

(Поступило 23. VI. 1969.)