

Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. II.¹⁾

Von WOLFGANG SCHWARZ (Frankfurt am Main)

1. Einleitung. Sei die komplexe Zahl ζ , $0 < |\zeta| < 1$, vorgegeben; die durch

$$(1.1) \quad \Phi(w) = (w - \zeta)(1 - \bar{\zeta}w)^{-1}$$

definierte Funktion Φ bildet den abgeschlossenen Einheitskreis $E = \{w \in \mathbb{C}, |w| \leq 1\}$ konform auf sich ab²⁾).

P. TURÁN [6] warf 1958 die Frage auf, ob das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises eine konforme Invariante sei; TURÁNS überraschende Antwort lautete „nein“ (man vgl. [6], [1] oder [4]).

Wir sagen, daß die Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sich unter der Abbildung Φ „konvergenzschlecht“ verhält, wenn f holomorph im Innern E^0 von E ist, die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ von f in $z=1$ konvergiert, jedoch die Potenzreihe $\sum b_n w^n$ der zusammengesetzten Funktion $f^* = f \circ \Phi$ in

$$(1.2) \quad w_0 = \Phi^{-1}(1) = (1 + \zeta)(1 + \bar{\zeta})^{-1}$$

divergiert. Über TURÁN hinausgehend zeigte J. CLUNIE [1]: *Es gibt in E stetige Funktionen f , die sich unter Φ „konvergenzschlecht“ verhalten.*

Der Verfasser verschärfte in [4] dieses Ergebnis etwas durch Benützung des Satzes von BANACH—STEINHAUS — mit CLUNIES Hilfssätzen. P. TURÁN fragte in einem Brief vom 7. 8. 1967 nach der Existenz in E stetiger Funktionen mit einem gewissen Stetigkeitsmodul, die sich unter Φ konvergenzschlecht verhalten: Gibt es solche Funktionen, die für $h \rightarrow 0+$ die Abschätzung

$$(1.3) \quad \omega(f; h) := \sup_{|\vartheta| \leq \pi, |t| \leq h} |f(e^{i(\vartheta+t)}) - f(e^{i\vartheta})| = O \left\{ \left(\log \frac{1}{h/2\pi} \right)^{-1} \right\}$$

¹⁾ Über die Ergebnisse dieser Note hat der Verfasser in Gießen am 11. 7. 1969 vorgetragen.
— Herrn K. KIRCHGÄSSNER danke ich für nützliche Hinweise.

²⁾ Die Umkehrabbildung zu Φ wird mit Φ^{-1} bezeichnet.

erfüllen?³⁾ TURÁN erzielte das (unveröffentlichte) Ergebnis:

Es gibt eine in E stetige Funktion f mit

$$\omega(f; h) = O \left\{ \left(\log \log \frac{1}{h/4\pi} \right)^{-1} \right\},$$

die sich unter Φ konvergenz-schlecht verhält.

Dieses Ergebnis soll zu folgendem Satz verschärft werden:

Satz 1. *Sei $K(h)$ eine positive, auf $(0, \pi]$ stetige Funktion, die für $h \searrow 0+$ monoton (beliebig langsam) gegen Unendlich strebt und der Abschätzung $K(h) = o \left(\log \frac{1}{h/4\pi} \right)$ genügt; sei weiter $K(h) \cdot \left(\log \frac{1}{h/4\pi} \right)^{-1} \nearrow$ für $h \nearrow$, $h \in (0, \pi]$. Dann gibt es überabzählbar viele in E stetige Funktionen $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Stetigkeitsmodul*

$$(1.4) \quad \omega(f; h) = O \left(K(h) \cdot \left\{ \log \frac{1}{h/4\pi} \right\}^{-1} \right),$$

die sich unter der Abbildung Φ konvergenz-schlecht verhalten.

Korollar 1. *Ist $0 < \delta < 1$, so gibt es überabzählbar viele in E stetige Funktionen f mit dem Stetigkeitsmodul*

$$(1.4') \quad \omega(f; h) = O \left(\left\{ \log \frac{1}{h/4\pi} \right\}^{-\delta} \right),$$

die sich unter der Abbildung Φ konvergenz-schlecht verhalten.

Korollar 2. *Es gibt überabzählbar viele in E stetige Funktionen f mit dem Stetigkeitsmodul*

$$(1.4'') \quad \omega(f; h) = O \left(\frac{\log \log \frac{e^e}{h/4\pi}}{\log \frac{1}{h/4\pi}} \right)$$

die sich unter der Abbildung Φ konvergenz-schlecht verhalten.

Bemerkung. Mit der hier verwendeten Methode kann die in (1.3) verlangte Abschätzung des Stetigkeitsmoduls nicht erreicht werden, da dann die Partialsummen der Potenzreihe für f^* beschränkt sind [vgl. Fußnote 3)], also im Satz von BANACH—STEINHAUS die erste Alternative nicht ausgeschlossen werden kann (vgl. § 4).

³⁾ Aus der Theorie der Fourierreihen weiß man, daß für eine periodische, stetige Funktion g aus $\omega(g; h) = o(\{\log 1/(h/4\pi)\}^{-1})$ Konvergenz der Fourierreihe von g folgt ([7], II. 10.3; Satz von DINI—LIPSCHITZ). Ist $\omega(g; h) = O(\{\log 1/(h/4\pi)\}^{-1})$, so sind die Partialsummen der Fourierreihe beschränkt ([7], VIII, 2). Diese Ergebnisse übertragen sich auf unser Problem; stetige Funktionen f mit $\omega(f; h) = o(\{\log 1/(h/4\pi)\}^{-1})$, die sich unter Φ konvergenz-schlecht verhalten, gibt es nicht.

2. Banachräume von Funktionen mit Stetigkeitsmodul. Ist $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so wurde der Stetigkeitsmodul $\omega(f; \cdot)$ von f für $0 \leq h \leq \pi$ durch

$$(2.1) \quad \omega(f; h) = \sup_{\substack{-\pi \leq \vartheta \leq \pi \\ -h \leq t \leq h}} |f(e^{i(\vartheta+t)}) - f(e^{i\vartheta})|$$

definiert. Ist $W: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene, stetige, auf $(0, \pi]$ positive, monoton wachsende Funktion mit $W(0)=0$, so daß $W(h)/h$ monoton abnimmt (für $h \nearrow$), so ist der Vektorraum

$$(2.2) \quad X_W = \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ stetig in } E, \sup_{h \in (0, \pi]} \frac{\omega(f; h)}{W(h)} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$(2.3) \quad \|f\|_W = \max \left\{ \|f\|_u, \sup_{h \in (0, \pi]} (\omega(f; h)/W(h)) \right\}$$

ein Banachraum⁴⁾; hierbei ist

$$(2.4) \quad \|f\|_u = \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

Sei cCA_W der Vektorraum der in E stetigen, in E^0 holomorphen Funktionen f , deren Maclaurinreihen $\sum a_n z^n$ in $z=1$ konvergieren und die $\sup_{h \in (0, \pi]} \{\omega(f; h)/W(h)\} < \infty$ erfüllen. Dann gilt

Lemma 1. *Mit der Norm*

$$(2.5) \quad \|f\| = \max \{ \|f\|_{cs} + \|f\|_u, \|f\|_W \}$$

ist cCA_W ein Banachraum.⁵⁾

BEWEIS. Sei $\{f_n\}$ eine $\|\cdot\|$ -Cauchyfolge in cCA_W . Dann ist $\{f_n\}$ eine $\|\cdot\|_W$ -Cauchyfolge in X_W und konvergiert gegen $f \in X_W$. Ebenso ist $\{f_n\}$ eine $\|\cdot\|_{cCA}$ -Cauchyfolge im Banachraum cCA der in E stetigen, in E^0 holomorphen Funktionen, deren Potenzreihen $\sum a_n z^n$ in $z=1$ konvergieren,⁶⁾ mit der Norm $\|f\|_{cCA} = \|f\|_{cs} + \|f\|_u$; somit konvergiert $\{f_n\}$ in der Norm $\|\cdot\|_{cCA}$ gegen eine Funktion $g \in cCA$. Die Funktionen f und g stimmen in E überein (wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\{f_n\}$ gegen f bzw. g). Somit konvergiert die Cauchyfolge $\{f_n\}$ in cCA_W .

3. Hilfssätze.

Lemma 2. (vgl. [1], S. 167). *Die FEJÉRpolynome*

$$(3.1) \quad h_k(z) = \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k-1} + \dots + \frac{z^k}{1} - \frac{z^{k+2}}{1} - \dots - \frac{z^{2k+1}}{k}$$

⁴⁾ Dies findet man im wesentlichen bei LORENTZ [2] (S. 49 f). Die Behauptung kann leicht gezeigt werden, da eine $\|\cdot\|_W$ -Cauchyfolge auch $\|\cdot\|_u$ -Cauchyfolge ist, also einen $\|\cdot\|_u$ -Limes besitzt, der die gewünschten Eigenschaften hat.

⁵⁾ Hierbei ist, wie in [4], $\|f\|_{cs} = \sup_N \left| \sum_{n \leq N} a_n \right|$.

⁶⁾ Vgl. [4], § 2.

haben folgende Eigenschaften:

- a) Mit einer absoluten Konstanten M ist $\|h_k\|_u \leq M$ für $k=1, 2, \dots$
- b) $h_k(1)=0$.
- c) Die k -te Partialsumme von $h_k(z)$ bei $z=1$ ist größer als $\log k$.

Lemma 3. Sei ζ mit $0 < |\zeta| < 1$ gegeben und sei φ durch

$$(3.2) \quad e^{i\varphi} = w_0 = \Phi^{-1}(1)$$

definiert. Ist $k \geq 2|\zeta| \cdot (1-|\zeta|)^{-1}$ und $m \geq m(k)$ mit

$$(3.3) \quad m(k) = k^{1/2},$$

so sind alle Partialsummen der Maclaurinreihe von

$$\{\Phi^{-1}(w)\}^m h_k(e^{-i\varphi} \Phi^{-1}(w))$$

an der Stelle $w=1$ absolut beschränkt durch die nur von ζ abhängige Konstante

$$(3.4) \quad M(\zeta) = 2 \max \left\{ \frac{320e^2}{\{2\pi|\zeta| \cdot (1-|\zeta|)^3\}^{1/2}}; \frac{48e^2}{(1-|\zeta|)^2} \right\}.$$

Dieses Lemma stammt [bis auf unsere sehr grobe Angabe von $m(k)$ und $M(\zeta)$] von CLUNIE [1] (S. 166). Für uns kommt es auf die Abhängigkeit von $m(k)$ von k an; deswegen wird in § 5 der Beweis von Lemma 3 nach Clunie vorgerechnet.

Satz von Banach—Steinhaus (vgl. [3], 5. 8). Sei F ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und A_N ($N=1, 2, \dots$) eine Familie beschränkter linearer Abbildungen von F in Y . Entweder existiert dann eine Konstante $K < \infty$ mit

$$(3.5) \quad \|A_N\| \leq K \quad \text{für alle } N$$

oder es existiert eine dichte G_δ -Menge⁷⁾ $G \subset F$ mit

$$(3.6) \quad \sup_N \|A_N f\|_Y = \infty \quad \text{für alle } f \in G.$$

4. Beweis von Satz 1. Sei W eine Funktion, die die zu Anfang von § 2 gegebenen Bedingungen erfüllt⁸⁾. Sei f aus cCA_W ; mit (1. 1) setzen wir

$$(4.1) \quad f^*(w) = f(\Phi(w)) = \sum b_n \cdot w^n$$

und bilden mit $w_0 = \Phi^{-1}(1) = e^{i\varphi}$ die Partialsummen

$$(4.2) \quad s_N(w_0; f^*) = \sum_{n \leq N} b_n \cdot w_0^n, \quad N = 1, 2, \dots$$

Die durch

$$(4.3) \quad A_N f = s_N(w_0; f^*)$$

definierten linearen Abbildungen A_N des Banachraumes cCA_W in den normierten linearen Raum C sind beschränkt, wie in [4], § 4 vorgerechnet wurde. Der Satz von

⁷⁾ $\|A\| := \sup_{f \in F, f \neq 0} \|Af\|_Y / \|f\|_F$; eine G_δ -Menge ist abzählbarer Durchschnitt offener Mengen.

⁸⁾ W wird in (4. 8) geeignet gewählt.

BANACH—STEINHAUS ist damit anwendbar. Es bleibt, die erste Alternative (3. 5) dieses Satzes auszuschließen.

Wir bilden für $k \cong 2|\zeta| \cdot (1 - |\zeta|)^{-1}$ mit den FEJÉRPOLYNOMEN (3. 1) die Funktion

$$(4. 4) \quad H_k(z) = h_k(e^{-i\varphi} \Phi^{-1}(z)) \cdot \{\Phi^{-1}(z)\}^{m(k)},$$

wobei $m(k)$ durch (3. 3) bestimmt ist. Dann ist $H_k \in cCA$; wegen Lemma 2 und 3 ist⁹⁾

$$(4. 5) \quad \|H_k\|_{cCA} \cong M + M(\zeta).$$

Die Berechnung der $\|\cdot\|_W$ -Norm von H_k ist mühsamer. Zunächst ist nach Lemma 2a) gleichmäßig in k , ϑ und t

$$(4. 6') \quad \Delta(k, \vartheta, t) := |H_k(e^{i(\vartheta+t)}) - H_k(e^{i\vartheta})| \cong 2M.$$

Andererseits ist (nach kurzer Zwischenrechnung)

$$\Delta(k, \vartheta, t) = \left| \int_{\vartheta}^{\vartheta+t} \frac{dH_k(e^{i\theta})}{d\theta} d\theta \right| \cong \frac{1 - |\zeta|^2}{(1 - |\zeta|)^2} \int_{\vartheta}^{\vartheta+t} \{ |h'_k(e^{-i\varphi} \Phi^{-1}(e^{i\theta}))| + M \cdot m(k) \} d\theta.$$

Berücksichtigt man, daß für $|z| \cong 1$

$$|h'_k(z)| \cong (2k+1) \cdot 2k \cong 6k^2$$

ist, so erhält man

$$(4. 6'') \quad \Delta(k, \vartheta, t) \cong \frac{2}{1 - |\zeta|} \cdot (6k^2 + M \cdot m(k)) \cdot t.$$

Nach (2. 3) wird mit (4. 6') und (4. 6'')

$$\begin{aligned} \|H_k\|_W &\cong \sup_{h \in (0, \pi]} \frac{1}{W(h)} \cdot \left(\sup_{|t| \cong h, |\vartheta| \cong \pi} \Delta(k, \vartheta, t) \right) + \|H_k\|_u \cong \\ &\cong \sup_{h \in (0, \pi]} \frac{1}{W(h)} \cdot \min \left\{ 2M, \frac{2}{1 - |\zeta|} \cdot (6k^2 + M \cdot m(k)) \cdot h \right\} + M; \end{aligned}$$

da $h/W(h)$ mit h monoton wächst, folgt

$$(4. 7) \quad \|H_k\|_W \cong C_1 \cdot \left\{ W \left(\frac{1}{6k^2 + M \cdot m(k)} \right) \right\}^{-1} + M$$

mit $C_1 = 2 \max \{(1 - |\zeta|)^{-1}, M\}$.

Somit erhält man, zunächst mit (4. 3) und Lemma 2c), dann mit (4. 5) und (4. 7)

$$\begin{aligned} \|A_{k+m(k)}\| &\cong \frac{|A_{k+m(k)} H_k|}{\|H_k\|} = \frac{|S_{k+m(k)}(e^{i\varphi}; h_k(e^{-i\varphi} z) \cdot z^{m(k)})|}{\|H_k\|} \cong \\ &\cong \frac{\log k}{2M + M(\zeta) + C_1 \cdot \left\{ W \left(\frac{1}{6k^2 + M \cdot m(k)} \right) \right\}^{-1}}. \end{aligned}$$

⁹⁾ Vgl. [4], § 4. $M(\zeta)$ ist in (3. 4) gegeben.

Wir wählen schließlich

$$(4.8) \quad W(h) = K(h) \cdot \left\{ \log \frac{1}{h/4\pi} \right\}^{-1} \quad \text{für } h \in (0, \pi], \quad W(0) = 0,$$

mit der in Satz 1 gegebenen Funktion $K(\cdot)$; diese Wahl ist zulässig, denn W in (4.8) ist stetig, positiv in $(0, \pi]$, es ist $W(0)=0$ und W und $h/W(h) = \frac{1}{K(h)} \cdot h \log \frac{1}{h/4\pi}$ wachsen monoton mit h . Wegen $m(k)=k^{12}$ folgt (für großes k) mit einer von k unabhängigen Konstanten C_2

$$\begin{aligned} \|A_{k+m(k)}\| &\cong \log k \cdot \left\{ 2M + M(\zeta) + C_1 \frac{\log \{(6k^2 + M \cdot k^{12}) \cdot 4\pi\}}{K(1/(6k^2 + M \cdot k^{12}))} \right\}^{-1} \cong \\ &\cong C_2(K, \zeta) \cdot K(1/(6k^2 + M \cdot k^{12})). \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck für großes k beliebig groß gemacht werden kann, muß im Satz von BANACH—STEINHAUS die Alternative (3.6) gelten, d.h. es gibt überabzählbar viele¹⁰⁾ Funktionen $f \in cCA_W$, für die $\sup |A_N f| = \infty$ ist, d.h. für die die Maclaurinreihe von $f^* = f \circ \Phi$ im Punkte w_0 divergiert. Damit ist Satz 1 bewiesen.¹¹⁾

5. Beweis von Lemma 3. In diesem Paragraphen folgen wir CLUNIES Beweisen in [1], achten jedoch auf die Abhängigkeit der Abschätzungen von ζ und k . Zunächst beweisen wir

Lemma 4. ([1], S. 166). *Das Integral*

$$(5.1) \quad I = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=1} \lambda^m \{\Phi(e^{i\varphi} \lambda)\}^{-(j+1)} d\lambda$$

kann für alle ganzen Zahlen $m \geq 1, j \geq 0$ durch

$$(5.2) \quad |I| \leq 3(1 - |\zeta|)^{-1} \cdot \frac{j+1}{m}$$

und für alle natürlichen Zahlen m, j durch

$$(5.3) \quad |I| \leq 20 \{2\pi |\zeta| \cdot (1 - |\zeta|)\}^{-1/2} \cdot j^{-1/3}$$

abgeschätzt werden.

BEWEIS. Wir setzen $\lambda = e^{it}$ und $\{\Phi(e^{i\varphi} \cdot \lambda)\}^{-1} = \exp \{i\psi(t)\}$ mit einer reellwertigen Funktion $\psi(t)$. Mit $\zeta = |\zeta| \cdot e^{i\eta}$ ist

$$(5.4) \quad \psi'(t) = \frac{e^{i(\varphi+t)}(|\zeta|^2 - 1)}{(1 - \bar{\zeta} e^{i(\varphi+t)})(e^{i(\varphi+t)} - \zeta)} = - \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - 2|\zeta| \cos(\varphi - \eta + t) + |\zeta|^2},$$

also wird

$$(5.5) \quad |\psi'(t)| \leq 2(1 - |\zeta|)^{-1}.$$

¹⁰⁾ Vgl. [4], Lemma 4.

¹¹⁾ Tatsächlich wurde eine etwas schärfere Fassung von Satz 1 bewiesen, die ähnlich wie in [4], § 4 ausgesprochen werden könnte und wie in [4], § 5, verschärft werden könnte.

Aus

$$(5.6) \quad 2\pi I = \int_0^{2\pi} e^{i(j+1)\psi(t)} \cdot e^{i(m+1)t} dt$$

folgt durch partielle Integration mit (5.5) sofort

$$|2\pi I| \leq 2 \cdot (m+1)^{-1} + (j+1) \cdot (m+1)^{-1} \cdot 4\pi(1-|\zeta|)^{-1},$$

also ist (5.2) richtig.

Um (5.3) herzuleiten, nehmen wir o. B. d. A. an, daß $\varphi = \eta = 0$ ist; wir zerlegen das Integral (5.6) in

$$2\pi I = \int_0^{j^{-1/3}} + \int_{j^{-1/3}}^{\pi-j^{-1/3}} + \int_{\pi-j^{-1/3}}^{\pi+j^{-1/3}} + \int_{\pi+j^{-1/3}}^{2\pi-j^{-1/3}} + \int_{2\pi-j^{-1/3}}^{2\pi} = I_1 + \dots + I_5.$$

I_1, I_3, I_5 werden trivial abgeschätzt; man erhält

$$(5.7) \quad |I_1| + |I_3| + |I_5| \leq 4j^{-1/3}.$$

I_2 und I_4 werden mit Hilfe eines VAN DER CORPUT-Lemmas abgeschätzt; hierzu darf die zweite Ableitung des Exponenten $\{(j+1) \cdot \psi(t) + (m+1)t\}$ des Integranden in (5.6) der Null nicht zu nahe kommen. Wegen (5.4) (und mit $\varphi = \eta = 0$) ist

$$\{(j+1)\psi(t) + (m+1)t\}'' = (j+1) \cdot \frac{(1-|\zeta|^2)2|\zeta| \sin t}{(1-2|\zeta| \cos t + |\zeta|^2)^2};$$

im Intervall $[j^{-1/3}, \pi-j^{-1/3}]$ wird somit

$$\{\dots\}'' \geq (j+1) \cdot 2|\zeta|(1-|\zeta|^2) \cdot 2\pi^{-1}j^{-1/3} \cdot \{1+|\zeta|\}^{-4} \geq C_3 j^{2/3}$$

mit $C_3 = |\zeta|(1-|\zeta|)/2\pi$. Nach [5], Lemma 4.4 erhält man also

$$(5.8) \quad |I_2| \leq 8 \cdot C_3^{-1/2} j^{-1/3}.$$

Dieselbe Abschätzung gilt für I_4 , und aus (5.7) und (5.8) folgt schließlich

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} j^{-1/3} \left\{ 4 + \frac{16\sqrt{2\pi}}{\{|\zeta|(1-|\zeta|)\}^{1/2}} \right\} \leq \frac{20}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\zeta|(1-|\zeta|)}} \cdot j^{-1/3}.$$

Nun kann Lemma 3 bewiesen werden. Sei

$$H_k(w) = \{\Phi^{-1}(w)\}^m \cdot h_k(e^{-i\varphi} \Phi^{-1}(w)).$$

Die j -te Partialsumme von $H = H_k$ bei $w = 1$ ist ¹²⁾

$$s_j = H(0) + \frac{1}{1!} H'(0) + \dots + \frac{1}{j!} H^{(j)}(0) = (2\pi i)^{-1} \int_{|w|=1} \left(\frac{H(w)}{1-w} \right) \cdot \frac{dw}{w^{j+1}}.$$

¹²⁾ Man beachte, daß $H(w) (1-w)^{-1}$ wegen $h_k(1) = 0$ auf $|w| = 1$ holomorph ist.

Mit $\lambda = e^{-i\varphi} \cdot \Phi^{-1}(w)$ ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(5.9) \quad s_j = \frac{e^{im\varphi}}{2\pi i} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1+\bar{\zeta}} \right) \cdot \int_{|\lambda|=1} \lambda^m \left(\frac{h_k(\lambda)}{1-\lambda} \frac{1}{1-\bar{\zeta}\lambda e^{i\varphi}} \right) \{\Phi(\lambda e^{i\varphi})\}^{-(j+1)} d\lambda.$$

Entwickelt man nun (für $|\lambda| < |\zeta|^{-1}$)

$$(5.10) \quad h_k(\lambda) \cdot \{(1-\lambda)(1-\bar{\zeta}\lambda e^{i\varphi})\}^{-1} = \sum_0^{\infty} \beta_r \lambda^r$$

in eine Potenzreihe, so ist für $k \geq 2|\zeta|(1-|\zeta|)^{-1}$

$$\beta_r = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=1+1/k} \frac{h_k(\lambda)}{(1-\lambda)(1-\bar{\zeta}\lambda e^{i\varphi})} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda^{r+1}}.$$

Hieraus folgt, wenn man die Abschätzung $\sup_{|\lambda|=1+1/k} |h_k(\lambda)| \leq 2k \cdot (1+1/k)^{2k+1} \leq 4k \cdot e^2$ und die Ungleichung $|1-\bar{\zeta}\lambda e^{i\varphi}| \geq \frac{1}{2}(1-|\zeta|)$ für $|\lambda| = 1+1/k$ beachtet,

$$\begin{aligned} |\beta_r| &\leq \sup_{|\lambda|=1+1/k} |h_k(\lambda)| \cdot \left\{ \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} (1-|\zeta|) \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right\}^{-1} \leq \\ &\leq 2(1-|\zeta|)^{-1} \cdot 4e^2 k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-r}, \end{aligned}$$

also ist

$$(5.11) \quad \sum_0^{\infty} |\beta_r| \leq 2(1-|\zeta|)^{-1} \cdot 4e^2 k^2 (k+1) \leq \frac{16e^2}{1-|\zeta|} \cdot k^3.$$

Aus (5.9) und (5.10) folgt nun

$$|s_j| \leq \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\zeta|} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} |\beta_r| \cdot \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=1} \lambda^{r+m} \{\Phi(\lambda e^{i\varphi})\}^{-(j+1)} d\lambda \right|.$$

Die Integrale können nach Lemma 2 abgeschätzt werden. Nach (5.3) und (5.11) ist für $j \geq k^9$ und alle m

$$|s_j| \leq 2 \cdot \frac{16e^2}{1-|\zeta|} k^3 \cdot \frac{20}{\{2\pi|\zeta|(1-|\zeta|)\}^{1/2}} \cdot k^{-3}.$$

Ist $0 \leq j < k^9$, so ist nach (5.2) und (5.11) für $m \geq m(k) = k^{12}$

$$|s_j| \leq 2 \cdot \frac{16e^2}{1-|\zeta|} \cdot k^3 \cdot \frac{3}{1-|\zeta|} \cdot \frac{k^9}{m(k)},$$

also folgt Lemma 3 mit der in (3.4) gegebenen Konstanten $M(\zeta)$.

Zusatz bei der Korrektur (26. 5. 1972).

Inzwischen hat Herr K. H. INDLEKOFER die unter (1.3) genannte Vermutung von P. TURÁN bewiesen; seine Arbeit wird in den Monatsh. für Math. erscheinen.

Literatur

- [1] J. CLUNIE, On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 165—169.
- [2] G. G. LORENTZ, Approximation of functions, *New York* 1966.
- [3] W. RUDIN, Real and complex analysis. *New York* 1966.
- [4] W. SCHWARZ, Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. *Publ. Math. Debrecen* **16** (1969), 67—73.
- [5] E. C. TITCHMARSH, The theory of the Riemann zeta-function. *Oxford* 1961.
- [6] P. TURÁN, A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.*, **12** (1958), 19—26.
- [7] A. ZYGMUND, Trigonometric series I. *Cambridge* 1959.

(Eingegangen am 22. September 1969.)