

Rotoren im regulären Dreieck

Von BERNULF WEISSBACH (Magdeburg)

Mit GOLDBERG [8] sollen jene ebenen konvexen Bereiche, die in einem regulären Vieleck gedreht werden können, dabei jedoch stets alle Seiten berühren, *Rotoren* genannt werden.

Rotoren im Quadrat sind die schon von Euler betrachteten Orbiformen oder Bereiche fester Breite. Unter ihnen besitzt das sogenannte Reuleaux—Dreieck kleinsten Inhalt. Beweise dafür gaben zuerst LEBESGUE [10] und BLASCHKE [2], später FUJIWARA [6], MAYER [11], EGGLESTON [5], BESICOVITCH [1] und CHAKERIAN [4]. Wie Fujiwara und KAKEYA [7] zeigten, ist im regulären Dreieck ein gewisses Zweieck Rotor mit kleinstem Inhalt. Einen einzigen weiteren Beweis hierfür findet man bei JAGLOM und BOLTJANSKI [9]. Im folgenden soll diesen beiden Beweisen ein dritter zur Seite gestellt werden. Einmal erscheint dies im Hinblick auf die Anzahl der Abhandlungen im Fall der Bereiche fester Breite durchaus nicht überflüssig, zum anderen auf Grund des eingeschlagenen Weges. Während Jaglom und Boltjanski dem Vorgehen Lebesgues folgen, ist hier Eggleston Vorbild. Es ist zu vermuten, daß sein Verfahren auch bei allgemeineren Aufgaben mit Vorteil genutzt werden kann.

Die konvexe Menge $\mathfrak{C}$ sei Rotor in einem gleichseitigen Dreieck der Höhe s . Ihre auf einen inneren Punkt und eine feste Richtung bezogene Stützfunktion $h(\varphi)$ genügt dann der Bedingung

$$(1) \quad h(\varphi - \omega) + h(\varphi) + h(\varphi + \omega) = s; \quad \omega = \frac{2\pi}{3}$$

Im weiteren werden nur Rotoren — damit sind stets Rotoren im regulären Dreieck gemeint — betrachtet, deren Randkurve $[\mathfrak{C}]$ in jedem regulären Punkt einen wohlbestimmten Krümmungsradius $\varrho(\varphi)$ besitzt.

Durch

$$(2) \quad \varrho(\varphi) = h(\varphi) + h''(\varphi) \geq 0$$

ist $\varrho(\varphi)$ für beliebiges Argument erklärt. Die Kennzeichnung (1) des Rotors überträgt sich in

$$(3) \quad \varrho(\varphi - \omega) + \varrho(\varphi) + \varrho(\varphi + \omega) = s,$$

woraus noch $\varrho(\varphi) \leq s$ folgt. Rotor $\mathfrak{C}_0$ kleinsten Inhalts ist nach Fujiwara und Kakeya

ein aus zwei Kreisbogen vom Radius s zusammengesetztes Zweieck mit Umfang $2\omega s$. Bei geeigneter Wahl der Bezugsrichtung ist

$$(4) \quad \varrho_0(\varphi) = \begin{cases} s, & \varphi \in \left(0, \frac{\omega}{2}\right) \cup \left(\frac{3\omega}{2}, 2\omega\right) \\ 0, & \varphi \in \left(\frac{\omega}{2}, \frac{3\omega}{2}\right) \cup (2\omega, 3\omega) \end{cases}$$

Bei quadratisch integrierbarem $\varrho(\varphi)$ wird der Inhalt I der konvexen Menge $\mathfrak{C}$ durch

$$2I = \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) h(\varphi) d\varphi$$

gemessen. Über die Zerlegung

$$[0, 2\pi) = \bigcup_{i=0}^5 \left[i \frac{\omega}{2}, (i+1) \frac{\omega}{2} \right)$$

folgt durch Verschiebungen unter Nutzung der Periodizität von Stützfunktion und Krümmungsradius

$$(5) \quad 2I = \int_{\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \cup \left(\frac{3\omega}{2}, 2\omega\right)} [\varrho(\varphi - \omega) h(\varphi - \omega) + \varrho(\varphi) h(\varphi) + \varrho(\varphi + \omega) h(\varphi + \omega)] d\varphi.$$

Gelingt es einen beliebigen Rotor $\mathfrak{C}$ so gegen $\mathfrak{C}_0$ zu lagern, daß die Ungleichungen

$$(6) \quad h(\varphi + i\omega) \cong h_0(\varphi); \quad i=0, \pm 1 \quad \text{für alle } \varphi \in \left(0, \frac{\omega}{2}\right) \cup \left(\frac{3\omega}{2}, 2\omega\right)$$

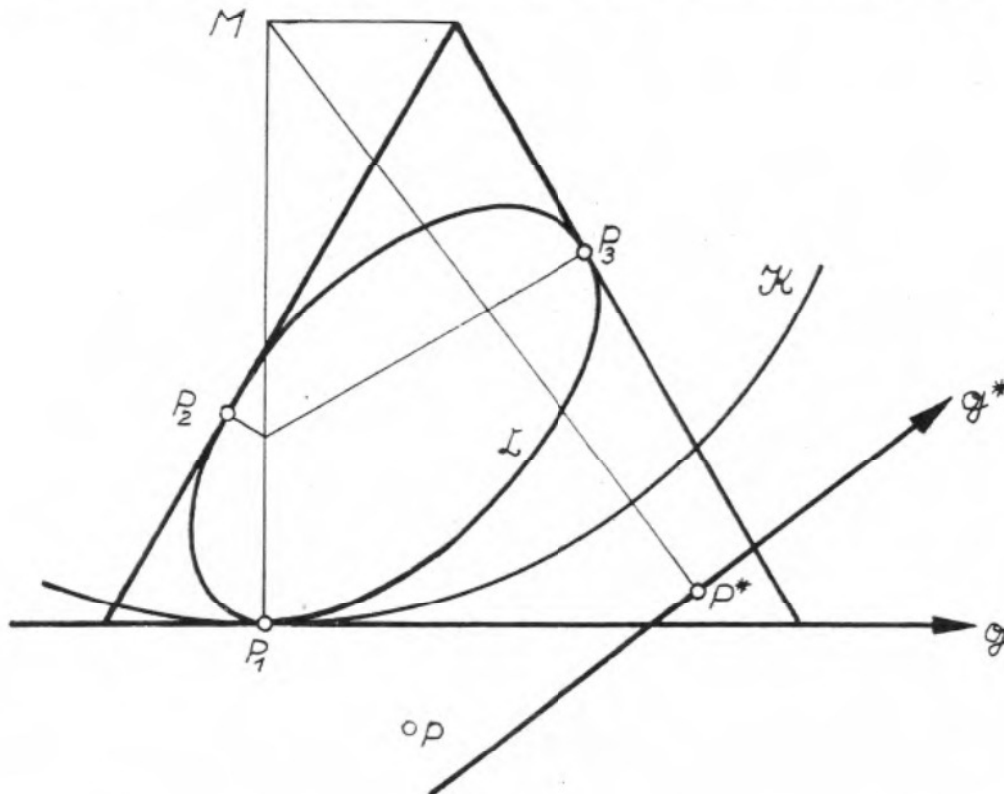
bestehen, so kann über die Abschätzung

$$\begin{aligned} 2I &\cong \int_{\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \cup \left(\frac{3\omega}{2}, 2\omega\right)} [\varrho(\varphi - \omega) + \varrho(\varphi) + \varrho(\varphi + \omega)] h_0(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_{\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \cup \left(\frac{3\omega}{2}, 2\omega\right)} s h_0(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \varrho_0(\varphi) h_0(\varphi) d\varphi = 2I_0 \end{aligned}$$

das Zweieck $\mathfrak{C}_0$ als Rotor kleinsten Inhalts bestätigt werden.

Zum Vergleich der Stützfunktionen wird benötigt, daß ein Kreisbogen vom Radius s , nicht länger als πs , der zwei Punkte eines Rotors $\mathfrak{C}$ verbindet, ganz zu $\mathfrak{C}$ gehört. Nach BÜCKNER [3] ist dieser Sachverhalt bei analytischer Randkurve $[\mathfrak{C}]$ mit der Einschränkung $\varrho(\varphi) \leq s$ gleichwertig, und allgemein genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{C}$ mit dem Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller Kreise vom Radius s , die $\mathfrak{C}$ enthalten, übereinstimmt. $\mathfrak{D}$ ist nicht leer und umfaßt $\mathfrak{C}$, nachzuweisen bleibt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{D}$ auch zu $\mathfrak{C}$ gehört. Wäre das für einen Punkt P nicht der Fall, so könnte er durch eine Stützgerade von $\mathfrak{C}$ getrennt werden. Dann gibt es aber einen Kreis vom Radius s , der $\mathfrak{C}$ umschließt jedoch P nicht enthält, denn der Kreis $\mathfrak{K}$, der diese Stützgerade g im gleichen Punkt P_1 wie $\mathfrak{C}$ berührt, überdeckt den Rotor (Abb. 1). Um dies zu zeigen wird angenommen, daß Punkte von $\mathfrak{C}$ nicht in $\mathfrak{K}$ lägen. Da $\mathfrak{C}$

abgeschlossen und beschränkt ist müßte wenigstens einer unter ihnen größten Abstand vom Mittelpunkt M des Kreises $\mathfrak{R}$ besitzen. Sei P^* dieser Punkt, und g^* die zu MP^* senkrechte Stützgerade von $\mathfrak{C}$, ($P^* \in g^*$). Ausgehend von g und g^* werden $\mathfrak{C}$ reguläre Dreiecke umschrieben. Das durch g^* bestimmte Dreieck muß auch die Punkte P_2 und P_3 enthalten, in denen das durch g bestimmte Dreieck $\mathfrak{C}$ berührt.



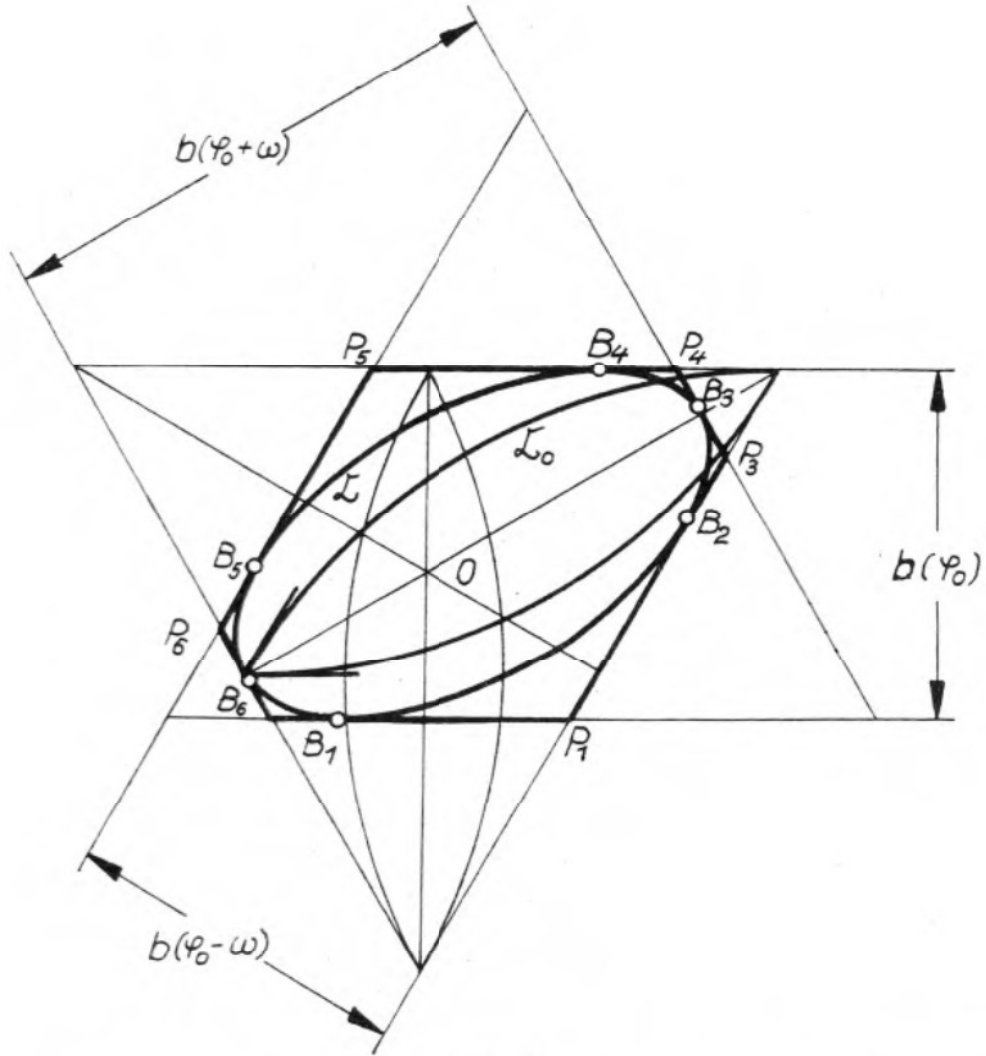
(Abb. 1)

Es umfaßt dann das reguläre Dreieck der Höhe s , das von der zu g^* parallelen Tangente an $\mathfrak{R}$ und Geraden durch P_2 und P_3 gebildet wird. Das widerspricht der Kennzeichnung des Rotors.

Dem Rotor $\mathfrak{C}$ werde nun ein gleichwinkliges Sechseck P_1, P_6 umschrieben, unter Umständen artet es in einen Rhombus aus. Enthält dieses Sechseck auf seinem Rand alle Seitenmitten der beiden regulären Dreiecke der Höhe s , als deren Durchschnitt es aufgefaßt werden kann, so lassen sich die Ungleichungen (6) wie folgt gewinnen: Man wähle als Ursprung den Schwerpunkt eines dieser Dreiecke, und lege das Zweieck $\mathfrak{C}_0$ so, daß sein Durchmesser mit einer der Höhen zusammenfällt.

(Abb. 2.) Da die Halbtangenten in den Ecken von $[\mathfrak{C}_0]$ den Winkel $\frac{\omega}{2}$ bilden, hat

$\mathfrak{C}_0$ im betrachteten Fall nur mit der Seite P_3P_4 des Sechsecks innere Punkte gemeinsam. Durch die Berührungspunkte $B_1, \dots, B_6$ des Rotors mit dem Sechseck wird seine Randkurve in sechs Teilbogen zerlegt. Kein Punkt von $\mathfrak{C}_0$ kann in den beschränkten offenen Gebieten liegen, die durch die Bogen B_1B_2 bzw. B_4B_5 und die



(Abb. 2)

durch ihre Endpunkte gehenden Seiten des Sechsecks begrenzt werden. Wie ersichtlich, gäbe es sonst auf $B_1 B_2$ bzw. $B_4 B_5$ durch einen nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Kreisbogen vom Radius s verbundene Punkte — im Widerspruch zu den vorangegangenen Bemerkungen. Demzufolge ist:

$$h(\varphi) \equiv h_0(\varphi) \quad \varphi \in \left[0, \frac{\omega}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\omega, 2\omega\right]$$

falls die Bezugsgerade parallel zu $P_1 P_2$ und $P_4 P_5$ gewählt wird. Nach Drehungen von $\mathfrak{C}_0$ um den Ursprung mit den Winkeln $\pm\omega$ führen gleiche Betrachtungen auf

$$h(\varphi) \equiv h_0(\varphi - \omega), \quad \varphi \in \left[\omega, \frac{3}{2}\omega\right] \cup \left[\frac{5}{2}\omega, 3\omega\right]$$

$$h(\varphi) \equiv h_0(\varphi + \omega), \quad \varphi \in \left[\frac{\omega}{2}, \omega\right] \cup \left[2\omega, \frac{5}{2}\omega\right]$$

gleichwertig mit:

$$h(\varphi \pm \omega) \cong h_0(\varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\omega}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\omega, 2\omega\right].$$

Man bemerkt noch leicht, daß Gleichheit nur für $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$ besteht.

Es bleibt zu bestätigen, daß jedem Rotor ein — unter Umständen ausartendes — gleichwinkliges Sechseck umbeschrieben werden kann, zu dessen Rand die Seitenmitten der von je drei Seiten gebildeten regulären Dreiecke gehören. Das ist der Fall, sobald die Abstände zwischen parallelen Seiten des Sechsecks $\frac{s}{2}$ nicht unterschreiten. Wird mit $b(\varphi) = b(\varphi + \pi) = h(\varphi) + h(\varphi + \pi)$ die Breite einer konvexen Menge bezeichnet, so ist zu zeigen, daß bei jedem Rotor $\mathfrak{C}$ die Ungleichungen

$$(7) \quad b(\varphi_0 - \omega) \cong \frac{s}{2}, \quad b(\varphi_0) \cong \frac{s}{2}, \quad b(\varphi_0 + \omega) \cong \frac{s}{2}$$

für wenigstens einen Wert φ_0 gleichzeitig bestehen.

Mit $h(\varphi)$ ist auch $b(\varphi)$ stetig. Die Eigenschaften des Rotors bedingen für jedes φ

$$(8) \quad 0 < b(\varphi) \cong s$$

und nach (1)

$$(9) \quad b(\varphi - \omega) + b(\varphi) + b(\varphi + \omega) = 2s$$

Bedingung (9) besagt, daß die — stetige — Raumkurve

$$(10) \quad \mathbf{x}(\varphi) = [b(\varphi - \omega), b(\varphi), b(\varphi + \omega)]$$

and die feste Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 2s$ gebunden ist, durch (8) werden ihre Punkte auf ein Dreieck Q_1, Q_2, Q_3 , die Ecken Q_i ausgenommen, eingeschränkt (Abb. 3). Die Ungleichungen (7) sind erfüllt für jene Punkte der Kurve $\mathbf{x}(\varphi)$ die im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks mit den Ecken Q'_1, Q'_2, Q'_3 , den Seitenmitten im Dreieck Q_1, Q_2, Q_3 liegen.

Nun betrachte man neben einem Punkt $\mathbf{x}(\varphi^*)$ die Punkte

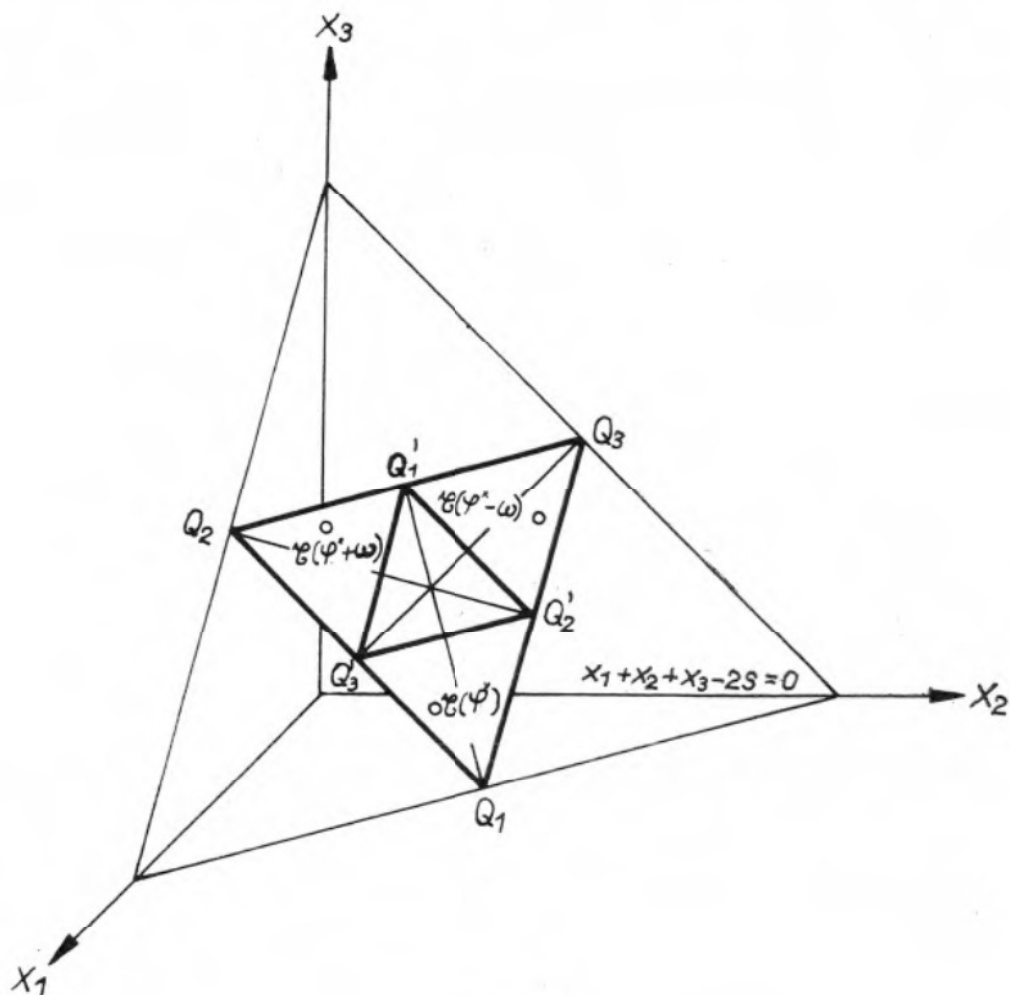
$$(12) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(\varphi^* + \omega) &= [b(\varphi^*), b(\varphi^* + \omega), b(\varphi^* - \omega)] \\ \mathbf{x}(\varphi^* - \omega) &= [b(\varphi^* + \omega), b(\varphi^* - \omega), b(\varphi^*)] \end{aligned}$$

die mit $\mathbf{x}(\varphi^*)$ über lineare Transformationen

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(\varphi^* + \omega) &= \mathbf{x}(\varphi^*) \cdot T \\ \mathbf{x}(\varphi^* - \omega) &= \mathbf{x}(\varphi^*) \cdot T^{-1} \end{aligned} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

verbunden sind. Bei diesen Abbildungen wird die Ebene der Kurve $\mathbf{x}(\varphi)$ in sich um ω bzw. $-\omega$ gedreht, fest bleibt der Schwerpunkt des Dreiecks Q_1, Q_2, Q_3 . Liegt $\mathbf{x}(\varphi^*)$ nicht bereits in $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ sondern etwa in $Q_1 Q'_2 Q'_3$, so liegt $\mathbf{x}(\varphi^* + \omega)$ in

$Q'_1 Q'_2 Q'_3$, $x(\varphi^* - \omega)$ in $Q'_1 Q'_2 Q'_3$. Da die Kurve $x(\varphi)$ auf das Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ eingeschränkt und stetig ist, muß sie beim Übergang von $x(\varphi^*)$ zu $x(\varphi^* + \omega)$ bzw. $x(\varphi^* - \omega)$ in das sperrende Dreieck $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ eintreten oder wenigstens seine Ecken treffen.



(Abb. 3)

Damit ist der Beweis abgeschlossen. Es sei noch angemerkt, daß sich genau so leicht erkennen läßt, daß für wenigstens einen Wert φ' die Bedingungen

$$b(\varphi') > \frac{s}{3}, \quad b(\varphi' + \omega) = b(\varphi' - \omega)$$

erfüllt sind, Jaglom und Boltjanski ([9]), die hiervon in ihrem eingangs erwähnten Beweis Gebrauch machen, leiten das mit wesentlich größerem Aufwand her.

Literatur

- [1] BESICOVITCH, A. S., Minimum area of a set of constant width *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 7 Convexity (Amer. Math. Soc. 1963), 13—14.
- [2] BLASCHKE, W., Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts. *Math. Ann.*, **76** (1915), 509—513.
- [3] BÜCKNER, H., Über Flächen von fester Breite *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **46** (1936), 96—139.
- [4] CHAKERIAN, G. D., Sets of constant width *Pacific J. Math.* **19** (1966), 13—21.
- [5] EGGLESTON, H. G., A proof of Blaschke's theorem on the Reuleaux triangle. *Quart. J. Math. Oxford* (2) **3** (1952), 296—297.
- [6] FUJIWARA, M., Analytical proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area I, II, *Proc. Imp. Acad. Jap.*, **3** (1927), 307—309, **7** (1931), 300—302.
- [7] FUJIWARA, M.—KAKEYA, S., On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth and the in-revolvable curve of the equilateral triangle, *Tôhoku Math. J.*, **11** (1917), 92—110.
- [8] GOLDBERG, M., Rotors in polygons and polyhedra, *Math. of computation* **14** (1960), 229—239.
- [9] JAGLOM, J. M.—BOLTJANSKI, W. G., Konvexe Figuren *Berlin*, 1956.
- [10] LEBESGUE, Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante, *Bull. Soc. Math. France C. R.* (1914), 72—76.
- [11] MAYER, A. E., Der Inhalt der Gleichdicke. Abschätzungen für ebene Gleichdicke *Math. Ann.*, **110** (1934—1935), 97—127.

(Eingegangen am 25. Oktober 1970.)