О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. II.

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

Статья является продолжением работы [7]. Пусть $M(LG)$ — мультипликативная группа групповой алгебры LG абелевой p-группы G произвольной мощности над полем L характеристики p, и $S(LG)$ — силовская p-подгруппа группы $M(LG)$:

$$S(LG) = \Big\{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \Big/ \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\Big\}.$$

Группа $S(LG)$ описана в [1] С. Д. Берманом в случае, когда L — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p), а G — счетная группа.

В настоящей работе описывается силовская p-подгруппа $S(LG)$ в следующих случаях:

1) L — произвольное алгебраическое расширение K характеристики p простого поля Π (с характеристикой p), а G — такая абелева p-группа, что если P — ее максимальная полная подгруппа, то фактор-группа $A = G/P$ имеет конечный тип n и все ульмовские факторы группы A — прямые произведения циклических групп;

2) L — поле K случая 1, а для абелевой p-группы G требуется следующее: если P — ее максимальная полная подгруппа и $G^{(i)}$ — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы $G^{(i-1)}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, $G^{(0)} = G$, то G/P — такое прямое произведение счетных групп, имеющее бесконечный тип τ, что группа $G^{(n)}$ счетная;

3) абелева p-группа G — счетная, а L — счетное поле характеристики p, являющееся чисто трансцедентным расширением алгебраического расширения K простого поля Π.

Укажем на некоторые *основные обозначения и понятия*, которые будем употреблять неизменно в статье:

G — абелева p-группа с мощностью μ и P — ее максимальная полная подгруппа;

L — поле характеристики p с мощностью Λ, или коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики p (если оговорено противное);

$G^{p^i}(L^{p^i})$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$ — множество p^i-ых степеней элементов группы G (поля или колца L), которое очевидно является группой (полем или кольцом);

$N(H)$ — нижний слой абелевой p-группы H;

$|M|$ — мощность множества M, $\mu_i=|G^{p^i}|$ и $\Lambda_i=|L^{p^i}|$, $i=0, 1, 2, \ldots$ ($\Lambda_0=\Lambda$, $\mu_0=\mu$).

$\aleph_0$ — мощность множества натуральных чисел;

счетное множество — множество, равномощное множеству натуралхных чисел;

знак „Π", или „X" — знак прямого произведения групп.

Терминология абелевых p-групп, которую будем употреблять, соответствует монографии [6], однако, в отличии от [6], групповую опрацию абелевых p-групп будем записывать мультипликативно. Если β — произвольное порядковое число, то анологично [6], стр. 158—159, вводим обозначение $G^{(\beta)}$, соответствующее в [6] обозначению G^{β}, для произвольной абелевой p-группы G, не обязательно редуцированной.

Пусть i и n — натуральные числа и $n\geqq i$, а γ — произвольное кардинальное число. Через $C_\gamma^{i,n}$ (соответственно через C_γ^i) обозначаем прямое произведение циклических p-групп порядков $p^i, p^{i+1}, \ldots, p^{i+n}$ (соответственно порядков p^i, $p^{i+1}, \ldots, p^{i+s}, \ldots$, где s — произвольное натуральное число), причем каждая из циклических групп порядка p^k, $i\leqq k\leqq n$ (соответственно каждая из цикличес ких групп порядка p^l, $l\geqq i$) встречается γ раз. Кроме того обозначаем $C_\gamma^{i+1,i}=1$.

Предложение 1. *Пусть G — абелева p-группа, H — ее подгруппа и L — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики p. Если фактор группа G/H — прямое произведение циклических групп, то фактор-группа $S(LG)/S(LH)$ — также прямое произведение циклических групп.*

Доказательство. Согласно критерию Куликова ([6], стр. 144) фактор-группу G/H можно представить объединением возрастающей последовательности

$$G_1|H\subseteqq G_2|H\subseteqq\cdots\subseteqq G_n|H\subseteqq\cdots \tag{1}$$

таких своих подгрупп, что высоты элементов каждой группы G_n/H в группе G/H конечны и ограничены в совокупности. Пусть N — точная верхняя грань высот элементов группы G_n/H в группе G/H.

Покажем, что группа $S^*=S(LG)/S(LH)$ является объединением возрастающей последовательности

$$S(LG_1)/S(LH)\subseteqq S(LG_2)/S(LH)\subseteqq\cdots\subseteqq S(LG_n)/S(LH)\subseteqq\cdots$$

своих подгрупп. Действительно, если $x=\left(\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i g_i\right)S(LH)\in S^*$ и $g_i\in G_{r_i}$, $i=1, 2, \ldots, s$, то $x\in S(LG_{r_t})/S(LH)$, где $r_t=\max(r_1, \ldots, r_s)$.

Высоты элементов группы $S_n^*=S(LG_n)/S(LH)$ в группе S^* не превосходит N. Допустим противное. Пусть элемент $\left(\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i g_i\right)S(LH)\neq S(LH)$, принадлежащий группе S_n^*, имеет высоту $m>N$ в группе S^*, т. е. существует элемент $\sum\limits_j \beta_j g_j\in S(LG)$, так, что имеет место

$$\left(\sum_j \beta_j g_j\right)^{p^m} S(LH)=\left(\sum_{i=1}^{s}\alpha_i g_i\right)S(LH) \tag{2}$$

Так как элемент $z=\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i g_i$ не принадлежит группе $S(LH)$, то некоторое $g_i=g$,

которое участвует в записи элемента z, не принадлежит группе H. Тогда из равенства (2) получим

$$g = g_j^{p^m} h_r \qquad (h_r \in H), \tag{3}$$

откуда

$$gH = (g_j H)^{p^m}$$

т. е. неединичный элемент gH фактор-группы G_n/H имеет высоту m $(m > N)$ в фактор-группе G/H, что является противоречием. Согласно критерию Куликова, фактор-группа $S(LG)/S(LH)$ разлогается в прямое произведение циклических групп.

Примечание. Теорема и ее доказательство остаются без изменения, если вместо группы $S(LG)$ рассмотрим силовскую p-подгруппу $S^*(LG)$ группы $M(LG)$ (см. [7]) группового кольца LG, т. е. фактор-группа $S^*(LG)/S^*(LH)$ разлагается в прямое произведение циклических групп.

Следующая лемма исправляет некоторую неточность формулировки и доказательства леммы 1. 2′ работы [1].

Лемма 1. *Пусть $G^{(1)}$ — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы G и P — ее максимальная полная подгруппа, а L — поле характеристики p и K — подполе поля L, составленное из всех алгебраических элементов над простым подполем Π поля L. Пусть L— чисто трансцендентное расширенне поля K. Тогда группы $S(KG^{(1)})$ и $S(KP)$ являются соответственно подгруппой всех элементов бесконечной высоты и максимальной полной подгруппой группы $S(LG)$. Кроме того фактор-группы G/P и $S(LG)/S(KP)$ имеют один и тот же тип τ.*

Доказательство. Мы будем использовать, что алгебраическое расширение K характеристики p простого поля Π (с характеристикой p) является совершенным, т. е. из любого элемента поля K можно извлень p^s-тый корень (s — произвольное натуральное) и наоборот, если из некоторого элемента α поля L извлекается произвольный p^s-тый корень, s — натуральное, то α принадлежит подполю K поля L.

Если $a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$ является элементом группы $S(LG)$ с бесконечной высотой, то для произвольного натурального s имеем $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k = (\sum_i \beta_i g_i)^{p^s}$, откуда получим $g_k = g_{k_1}^{p^s} = \cdots = g_{k_r}^{p^s}$ и $\alpha_k = \beta_{k_1}^{p^s} + \cdots + \beta_{k_r}^{p^s}$, следовательно, $g_k \in G^{(1)}$, $\alpha_k \in K$ и $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \in$ $\in S(KG^{(1)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. подгруппа элементов бесконечной высоты группы $S(LG)$ содержится в $S(KG^{(1)})$. Обратное включение очевидно.

Совпадение группы $S(KP)$ с максимальной полной подгруппй группы $S(LG)$ устанавливается аналогичным способом. Остальная часть доказательства совершается подобно доказательству леммы 1. 2′ работы [1].

Лемма 2. *Пусть $G^{(1)} \neq 1$, $|G^{p^k}| = \mu_k$, $|(G/G^{(1)})^{p^k}| = \nu_k$ и $|G^{(1)}| = \varrho$. Тогда $\mu_k = \max(\nu_k, \varrho)$.*

Доказательство. Легко получается, что $(G/G^{(1)})^{p^k} = G^{p^k}/G^{(1)}$, откуда для мощности группы G^{p^k} имеем $\mu_k = \nu_k \varrho$. Однако ν_k — бесконечное кардинальное

число, так как порядки элементов группы $(G/G^{(1)})^{p^k}$ неограничены в совокупности. Следовательно $\mu_k=\max(\nu_k, \varrho)$.

Лемма 3. *Пусть H — бесконечная периодическая группа, b — ее фиксированный элемент и A — ее подгруппа с мощностью $\varrho \geqq \aleph_0$. Тогда мы можем вполне упорядочить элементы группы A таким образом, чтобы в A найти подмножество F: $g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots$ с мощностью ϱ со следующим свойством: для любых двух элементов g_α и g_β этого подмножества, для которых $\alpha<\beta$, равенство $g_\alpha=g_\beta b$ является невозможным.*

Доказательство. Положим $g_1=1$. Пусть α — произвольное порядковое число, мощность которого не превосходит ϱ. Допустим, что выбраны все элементы g_γ искомого подмножества для $\gamma<\alpha$. Пусть x_γ являются решениями уравнений $g_\gamma=x_\gamma b$, $\gamma<\alpha$. Тогда выбираем элемент $g_\alpha \in A$, $g_\alpha \neq g_\gamma, x_\gamma$, $\gamma<\alpha$, в качестве элемента искомого подмножества. Этим образом получим подмножества элементов $g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots$ и $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots$, имеющие мощность ϱ. Легко видеть, что первое из них является искомым подмножеством F.

Лемма 4. *Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p). Если $G^{(1)} \neq 1$ и фактор-группа $G/G^{(1)}$ — прямое произведение циклических групп, то*

$$S(KG)/S(KG^{(1)}) \cong \prod_{k=0}^{\infty} C_{\mu_k}^{k+1,k+1}, \qquad \mu_0=\mu.$$

Доказательство. По предложению 1 фактор-группа $B=S(KG)/S(KG^{(1)})$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Порядки элементов $(G/G^{(1)})^{p^k}=G^{p^k}/G^{(1)}$ неограничены в совокупности. Покажем, что число прямых множителей порядка p^{k+1}, $k=0, 1, 2, \ldots$ в прямом разложении группы B равняется числу μ_k. Мы будем использовать, что по лемме 2 $\mu_k=\max(\nu_k, \varrho)$. Обозначим $D=G/G^{(1)}$, $N[B^{p^s}]=\tilde{N}_s$, $s=0,1\,2, \ldots$

и

$$D^{p^k} = \prod_{i \in I} (a_i G^{(1)}), \quad D^{p^{k+1}} = \prod_{i \in I} (a_i^p G^{(1)}). \tag{4}$$

Различаем следующие случаи:

1. $\varrho \leqq \nu_k$ $(\nu_k=\mu_k)$.

Образуем элементы

$$A_j = [1+a_j(g'-1)]S(KG^{(1)}), \qquad g' \neq 1,\ i \in I,\ g'^p=1,\ g' \in G^{(1)}.$$

Очевидно $A_j \in \tilde{N}_k$. Обозначим $\bar{A}_j = 1+a_j(g'-1)$. Элементы A_i и A_j, при $i \neq j$, $j \in I$, лежат в разных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае получим $\bar{A}_i S(KG^{(1)})=\bar{A}_j S(KG^{(1)})E$, где $E \in B^{p^{k+1}} = S(KG^{p^{k+1}})/S(KG^{(1)})$. Так как произвольный элемент группы $S(KG^{p^{k+1}})$ записываем в виде $A = \sum_{i_j, \ldots, i_r} a_{i_1}^{p^{\alpha_{i_1}}} \ldots a_{i_r}^{p^{\alpha_{i_r}}} A_{i_1 \ldots i_r}$, где $A_{i_1 \ldots i_r} \in S(KG^{(1)})$, то из вышеуказанного равенства получим

$$\bar{A}_i = \bar{A}_j AC, \quad \text{где} \quad C \in S(KG^{(1)}),$$

или

$$1+a_i(g'-1) = [1+a_j(g'-1)] \sum_{i_1,\ldots,i_r} a_{i_1}^{p_{\alpha i_1}} \ldots a_{i_r}^{p_{\alpha i_r}} A_{i_1 \ldots i_r} C.$$

Это равенство однако невозможно, так как в левой его части классу $a_i G^{(1)}$ принадлежат только элементы $a_i g'$ и a_i, в то время как в его правой части не встречаются элементы этого класса. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \geqq v_k$. С другой стороны $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \leqq |S(KG^{p^k})| = \max(\aleph_0, \mu_k) = \mu_k = v_k$. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| = v_k$, т. е. число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $v_k = \mu_k$.

2. $v_k = \varrho$.

Можем предполагать, что порядок фиксированного элемента $a_i = a$ группы G^{p^k} из (4) равняется p^m, где $m > 1$. $G^{p^k} = \mu_k = \varrho$. Обозначим $a^{p^{m-1}} = b$. Согласно лемме 3 элементы подгруппы $G^{(1)}$ группы G^{p^k} можно вполне упорядочить и из ней выделить такое подмножество F: $g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots$ с мощностью ϱ, что равенство $g_\alpha = g_\beta b$ невозможно при $\alpha < \beta$. Образуем элементы

$$A(g_\alpha) = (1 + g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}}) S(KG^{(1)}), \qquad g_\alpha \in F.$$

Очевидно $A(g_\alpha) \in \tilde{N}_k$. Если $g_\alpha, g_\beta \in F$ и $g_\alpha \neq g_\beta$, $\alpha < \beta$, то $A(g_\alpha)$ и $A(g_\beta)$ лежат в разных смежных классах подгруппы $\tilde{N}_k$ по группе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае, используя обозначения случая 1, получим

$$1 + g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}} = (1 + g_\beta a - g_\beta a^{1+p^{m-1}}) AC.$$

В правой части этого равенства при умножении единицы 1 на элементы произведения AC получаются всегда степени элемента a, показатели которого кратни числу p, а при умножении элементов $g_\beta a$ и $g_\beta a^{1+p^{m-1}}$ на элементы, которые входят в AC, так как

$$1 + lp \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 + p^{m-1} + lp \not\equiv 0 \pmod{p}, \qquad m - 1 \geqq 1,$$

не получаем таких степеней. Отсюда следует, что $1 = AC$, что приводит к равенству

$$g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}} = g_\beta a - g_\beta a^{1+p^{m-1}}.$$

Если $p \neq 2$, то это равенство невозможно. Если $p = 2$, то должно было быть $g_\alpha = g_\beta a^{2^{m-1}}$, что согласно рассматриванию в начале случая ($a^{2^{m-1}} = b$), также невозможно. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \geqq \varrho$, однако $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \leqq \varrho$, так как $|B^{p^k}| \leqq \varrho$. Мы получили, что число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\varrho = \mu_k$, чем доказательство закончено.

Пусть бесконечная абелева p-группа G разлагается в прямое произведение циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^n равняется τ_n. Говорят, что последовательность

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots \tag{5}$$

является последовательностью группы G. В [7] введены понятия последовательность первого и последовательность второго рода и критические числа группы G. Эти понятия используем для формулировки следующей теоремы.

Теорема А. *Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p) и G — такая абелева p-группа, что $G^{(1)} \neq \mathbf{P}$ и фактор-группа $G/G^{(1)}$ разлагается в прямое призведение циклических групп, причем мощность множества прямых множителей порядка p^i равняется τ_i. Тогда фактор-группа $B=S(KG)/S(KG^{(1)})$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем*

1) если (5) — последовательность первого рода группы $G/G^{(1)}$, то $B \cong C_\mu^1$;

2) если (5) — последовательность второго рода группы $G/G^{(1)}$ с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$B \cong C_\mu^{1,\alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1+1,\alpha_2} \times \cdots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s} \times C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1}.$$

Доказательство. По предложению 1 группа B разлагается в прямое произведение циклических групп. Теорема вытекает из леммы 4 и из леммы 2, 3 статьи [7].

Теорема Б. *Если G — полная абелева p-группа мощности μ, а K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π, то группа $S(KG)$ разлагается в прямое произведение μ групп типа p^∞.*

Доказательство. По лемме 1 группа $S(KG)$ является полной и, следовательно, она разлагается в прямое произведение групп типа p^∞. При $\mu=\aleph_0$ в силе доказательства леммы 1. 12 статьи [1]. Пусть $\mu>\aleph_0$. Тогда по следствию 2 леммы 4 работы [7] имеем $|S(KG)|=\mu$. Пусть $S(KG)=\prod\limits_{i\in I} P_i$, где P_i — группа типа p^∞. Если предположим, что $|I|<\mu$, то по лемме 4 статьи [7] получим $|S(KG)|=\max(\aleph_0, |I|)<\mu$, что является противоречием, Аналичично предположение $|I|>\mu$ приводит к противоречию. Остается $|I|=\mu$.

Теорема В. *Пусть G — счетная полная абелева p-группа, а L — такое счетное поле характеристики p, что оно является чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения K простого поля Π. Тогда фактор-группа $S(LG)/S(KG) \cong C_{\aleph_0}^1$.*

Доказательство. Мощность фактор-группы $S=S(LG)/S(KG)$ не превосходит $\aleph_0$ (см. следствие 2 леммы 4 статьи [7]). Группа S не содержит элементов бесконечной высоты, ибо по лемме 1 группа $S(KG)$ совпадает с подгруппой элементов бесконечной высоты группы $S(LG)$ и, следовательно, S разлагается в прямое произведение циклических групп. Обозначим $\tilde{N}_k=N(S^{p^k})$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Пусть a — фиксированный элемент нижнего слоя группы G. Согласно лемме 3, элементы группы G можно вполне упирядочить и из ней выделить такое счетное подмножество F: $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, что равенство $b_r=b_s a$ — невозможно при $r<s$. Пусть $(x_i)_{i\in I}$ — является базисом трансцендентности поля L (см. [2]). Рассматриваем элементы

$$A_r = [b_r + (1+a)x_1^{p^k}]\,S(KG), \qquad b_r \in F.$$

Очевидно $A_r \in \tilde{N}_k$. При $b_r \neq b_s$ элементы A_r и A_s лежат в разных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае

$$b_r + (1-a)x_1^{p^k} = [b_s + (1-a)x_1^{p^k}] \sum_t \frac{f_t}{h_t} g_t,$$

или

$$\tilde{h}[b_r+(1-a)x_1^{p^k}] = [b_s+(1-a)x_1^{p^k}]\sum_t \tilde{f}_t g_t, \qquad g_t \in G, \tag{6}$$

где h_t, $\tilde{h}$, f_t и $\tilde{f}_t$ являются полиномами неизвестных $x_1^{p^{k+1}}, \ldots, x_n^{p^{k+1}}$ над полем K. Обозначим $I'=I\setminus 1$. Пусть K_1 является таким чистым расширением поля K, что $(x_i)_{i\in I'}$ — чистый базис поля K_1 над K (см. [2], стр. 108). Легко видеть, что LG является свободным K_1G-модулем, в L — свободным K_1-модулем и $1, x_1, x_1^2, \ldots$ входят в их базис, следовательно

$$\sum_t \tilde{f}_t g_t = \sum_{i=0}^{m} u_i (x_1^{p^{k+1}})^i, \quad \tilde{h} = \sum_{i=0}^{m} v_i (x_1^{p^{k+1}})^i, \qquad u_i \in K_1 G,\ v_i \in K_1. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует

$$\sum_{i=0}^{m} [b_r v_i x_1^{ip^{k+1}} + (1-a) v_i x_1^{ip^{k+1}+p^k}] = \sum_{i=0}^{m} [b_s u_i x_1^{ip^{k+1}} + (1-a) u_i x_1^{ip^{k+1}+k}]. \tag{8}$$

Сравнивая в (8) коэффициенты перед одинаковыми степенями элемента x_1, получается $b_r v_i = b_s u_i$, $(1-a)v_i = (1-a)u_i$, откуда

$$(1-a)v_i = (1-a)b_s^{-1}b_r v_i \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m).$$

Так как по крайней мере одно $v_i \neq 0$ и $v_i \in K_1$, то $1-a = b_s^{-1}b_r - ab_s^{-1}b_r$. Элемент a левой части этого равенства не встречается в его правой части согласно выбору элементов b_r и b_s, что является противоречием. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \geqq \aleph_0$, чем теорема доказана.

Теорема Г. *Пусть для абелевой p-группы G имеет место $G = P\times G_1$, где $P\neq 1$ — полная группа, а G_1 — прямое произведение циклических групп, причем $|G|=\mu$, $|G_1|=\nu$, $|P|=\gamma$, а K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π. Тогда группа $B=S(KG)/S(KP)$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем*

1) если (5) — последовательность первого рода группы G_1, то $B \cong C_\mu^1$ или $B \cong C_\mu^{1,\alpha}$ в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы G_1 соответственно неограниченными в совокупности или показатель этой группы равняется p^α;

2) если (5) — последовательность второго рода групып G_1 с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$B \cong C_\mu^{1,\alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1+1,\alpha_2} \times \cdots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s} \times B',$$

где группа B' описывается следующим образом:

а) если порядки элементов группы G_1 неограничены в совокупности, то

$$B' \cong C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1}$$

б) если показатель группы G_1 равняется p^α, то

$$B' \cong C_\gamma^{\alpha_s+1,\alpha}.$$

Теорема Д. *Пусть G — такая счетная абелева p-группа (необезательно редуцированная), что $G \neq G^{(1)} \neq 1$ и L — такое счетное поле характеристики p, что оно является чисто трансцендетным расширением алгебраического расширения K простого поля Π. Тогда фактор-группа $B=S(LG)/S(KG^{(1)}) \cong C^1_{\aleph_0}$.*

Доказательство. Теоремы Д и Г можно доказать одновременно. Их доказательство аналогично доказательству теоремы А. Мощность фактор-группы $B=S(LG)/S(KG^{(1)})$ не превосходит $\aleph_0$ и так как не содержит элементов бесконечной высоты, то она разлагается в прямое произведение циклических групп. Если порядки элементов фактор-группы $G/G^{(1)}$ неограничены в совокупности, то рассуждаем как в случае 2 леммы 4, имея ввиду, что $v_k=\aleph_0$. Если фактор-группа $G/G^{(1)}$ имеет показатель p^α, то мощность множества прямых множителей порядка $p^{\alpha+i}$, $i=1, 2, \ldots$ в прямом разложении группы B на циклические группы равняется кардинальному числу $\aleph_0$. Действительно, мощность множества прямых множителей порядка $p^{\alpha+i}$, $i=1, 2, \ldots$, в прямом разложении группы B на циклические группы равняется мощности множетсва прямых множителей порядка p^i в прямом разложении группы $B^{p^\alpha}=S(L^{p^\alpha}P)/S(KP)$, а эта мощность по теореме В действительно равнаяется $\aleph_0$.

Для установления формулы разложения группы B в сличае 2 теоремы Γ необходимо отметить, что $\max(\gamma,\nu)=\mu$, $\max(\gamma, \tau_{\alpha_i})=\mu_{\alpha_{i-1}}$, $1 \leqq i \leqq s$, $\mu_{\alpha_0}=\mu$.

Теорема 1. *Пусть G — такая бесконечная абелева p-группа мощности μ, что, если P — ее максимальная полная подгруппа мощности p, то фактор-группа $A=G/P$ имеет конечный тип n (является единичной группой) и ульмовские факторы группы A — прямые произведения циклических групп. Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π. Тогда силовская p-подгруппа $S(KG)$ мильтипликативной группы групповой алгебры KG описывается следующим образом.*

Имеет место прямое разложение

$$S(KG) = S(KP) \times Q \tag{7}$$

Силовская p-подгруппа $S(KP)$ мультипликативной группы групповой алгебры KP — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$. Если $P=1$, то $S(KP)=1$, а если $P \neq 1$, то группа $S(KP)$ разлагается в прямое произведение γ групп типа p^∞.

Если G — полная абелева p-группа, то $Q=1$.

Пусть G — неполная абелева p-группа. Обозначаем через $G^{(i+1)}$ подгруппу, составленную из всех элементов группы $G^{(i)}$, имеющих в $G^{(i)}$ бесконечную высоту, $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$; $G^{(0)}=G$, $G^{(n)}=P$. Группа Q имеет тип n и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своим ульмовскими факторами $\overline{Q}_i$, для которых имеем

$$\overline{Q}_i \cong S(KG^{(i)})/S(KG^{(i+1)}, \qquad i=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Факторы $\overline{Q}_i$, $0 \leqq i \leqq n-2$, разлагаются в прямые произведения циклических групп и характеризуются теоремой А (при подходящем изменении обозначений).

При $P=1$ последний фактор $\overline{Q}_{n-1} \cong S(KG^{(n-1)})/S(KP)$ разлагается в прямое произведение циклических p-групп, причем он характеризуется теоремой A^* работы [7].

При $P \neq 1$ фактор $\overline{Q}_{n-1}$ разлагается в прямое произведение циклических групп и его можно характеризовать теоремой Г.

Доказательство. Теорема следует из леммы 1, теорем А* работы [7] Б, А, Г и теоремы CRAWLEY [5]. Считаемся с тем, что порядки элементов групп $G^{(i)}/G^{(i+1)}$, $i=0, 1, \ldots, n-2$, неограничены в совокупности, так как $G^{(i)}/G^{(i+1)} \cong A^{(i)}/A^{(i+1)}$) ([6], стр. 161) и с тем, что ряд Ульма группы Q состоит из членов, соответственно изоморфных членам ряда

$$S(KG)/S(KP) \supset S(KG^{(1)})/S(KP) \supset \cdots \supset S(KG^{(n-1)})/S(KP) \supset 1.$$

Теорема 2. *Пусть G — такая счетная абелева p-группа, что если P — ее максимальная полная подгруппа, то $A=G/P$ имеет тип τ или является единичной группой, L — счетное поле характеристики p, Π — простое подполе поля L и K — подполе поля L, составленное из всех алгебраических элементов над полем Π. Пусть L— чисто трансцендентное расширение поля K. Тогда силовская p-подгруппа $S(LG)$ мультипликативной группы групповой алгебры LG описывается следующим образом. Имеет место прямое разложение*

$$S(LG) = S(KP) \times Q. \tag{8}$$

Группа $S(KP)$ — максимальная полная подгруппа группы $S(LG)$ и если $P \neq 1$, то она разлагается в прямое произведение счетного числа групп типа p^∞.

Если G — полная абелева p-группа, то $Q \cong C^1_{\aleph_0}$.

Пусть G не является полной абелевой p-группой. Группа Q имеет τ и определяется с точностью до изомофизма своим типом и своими ульмовскими факторами которые, за исключением последнего, при положении, что τ — непредельное, порядковое число, являются изоморфными группе $C^1_{\aleph_0}$.

Пусть τ не является предельным порядковым числом. Последний ульмовский фактор $\overline{Q}_{\tau-1} \cong S(KG^{(\tau-1)})/S(KG^{(\tau)})$ характеризуется при $P=1$ теоремой A^* работы [7], а при $P \neq 1$ — теоремой Г.

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из леммы 1, теорем А, Б, В, Г, Д, и из теоремы Ульма, причем применяется схема рассуждения теоремы 1. 3 работы [1].

Теорема 3. *Пусть K — алгебраичвское расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p). Пусть абелева p-группа G имеет максимиальную подгруппу P с мощностью γ, и фактор-группа G/P — такое прямое произведение счетных групп, имеющее бесконечный тип τ, что группа $G^{(n)}$ счетная (n — натуральное число). Тогда силовская p-подгруппа $S(KG)$ мультипликативной группы групповой алгебры KG описывается следующим образом.*

Имеет место прямое разложение (7). Группа $S(KP)$ характеризуется тем же самым образом, как в теореме 1.

Группа Q имеет тип τ и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами $\overline{Q}_\alpha$, для которых имеет место $\overline{Q}_\alpha \cong S(KG^{(\alpha)})/S(KG^{(\alpha+1)})$, где α — порядковое число, меньше τ или равно нулю.

Факторы $\overline{Q}_0$ и $\overline{Q}_\alpha$, $\alpha<\tau$, разлагаются в прямые произведения циклических групп и описываются теоремой А (при подходящем изменении обозначений).

Пусть τ не является предельным порядковым числом. При $P=1$ последний ульмовский фактор $\overline{Q}_{\tau-1}=S(KG^{(\tau-1)})/S(KG^{(\tau)})$ характеризуется теоремой A^* работы [7], а при $P\neq 1$ — теоремой Γ.

Доказательство. По лемме 1 группа Q имеет тип τ. Так как $G^{(n)}\neq P$ и $G^{(n)}$ счетная, то из теоремы A следует, что группа $Q^{(n)}\cong S(KG^{(n)})/S(KP)$ является также счетной. Фактор-группа $A=G/P$ — прямое произведение счетных групп, следовательно, фактор-группы $G^{(i-1)}/G^{(i)}\cong A^{(i-1)}/A^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n$ — прямые произведения циклических групп, откуда по предложению 1 вытекает, что фактор-группы $S(KG^{(i-1)}/S(KG^{(i)})$, $i=1, 2, \ldots, n$, являются прямыми произведениями циклических групп. Однако $Q^{(i-1)}/Q^{(i)}\cong S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$, т. е. $Q^{(i-1)}/Q^{(i)}$ — прямые произведения циклических групп, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда из работы [3] Ирвина и Рихмана вытекает, что группа Q является прямым произведением счетных групп, следовательно, по теореме Колеттиса [4], группа Q определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своим ульмовскими факторами, описание которых дано в фпрмулировке теоремы.

Условия изоморфизма. Пусть абелева p-группа G и коммутативное кольцо L с единицей и характеристики p, а также абелева p-группа $\overline{G}$ и коммутативное кольцо $\overline{L}$ с единицей и характеристики p такие, что они удовлетворяют условиям некоторых формулитованных теорем настоящей работы и работы [7]. В таком случае можно указать на необходимые и достаточные условия изоморфизма групп $S(LG)$ и $S(\overline{L}\overline{G})$. Мы не будем останавливаться на этом вопросе из-за большого числа возможных случаев, и, главным образом, из-за того, что руководствуясь формулировками уже доказанных теорем, указание на изоморфизм происходит без затруднений (это указание состоит из обычного комбинирования случаев разложения группы $S(LG)$ с случаями разложения группы $S(\overline{L}\overline{G})$ и описания непротиворечивных комбинированных случаев на основании вышедоказанных теорем).

Литература

[1] Берман С. Д., Групповые алгебры счетных абелевых р-групп, *Publ. Math.* (*Debrecen*) **14** (1967), 365—405.
[2] Бурбаки Н., Алгебра, многочлены и поля, упорядоченные группы, *Москва*, 1965.
[3] Irwin J. and Richman F., Direct sums of countable groups and related concepts, *J. Algebra* **2** (1965), 443—450.
[4] Kolettis, G., Direct sums of countable groups, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 111—125.
[5] Crawley P., Abelian p-groups determined by their Ulm sequens, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 235—239.
[6] Курош А. Г., *Теория групп,* Москва 1967.
[7] Моллов Т. Ж., О мультипливативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I., *Publ. Math. (Debrecen)* **18** (1971), 9—21.

(Поступило 25. III. 1969.)