

Über eine Klasse von Mittelwerten

Von ZOLTÁN DARÓCZY (Debrecen)

1. *Definition. Existenzsatz.* Es sei I ein offenes Intervall und R die Menge der reellen Zahlen. Die Funktion $K: I \times I \rightarrow R$ wird eine *Abweichung* genannt, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $K(x, y)$ ist in y stetig und streng monoton abnehmend;

(b) $K(y, y) = 0$ für alle $y \in I$.

Sind x und y aus I , so nennen wir die Größe $K(x, y)$ die *K-Abweichung* der Zahl y von x . Die Menge aller Abweichungen wird mit $\mathcal{K}$ bezeichnet.

Definition. Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $\underline{x} \in I^n$, wobei

$$I^n = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in I, i = 1, 2, \dots, n\}$$

die Menge aller n -tupel der Zahlen aus I ist. Die Größe $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_K(\underline{x})$ wird der *K-Mittelwert* von $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ genannt, falls die der Gleichung

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^n K(x_i, \mathfrak{M}_K) = 0$$

genügt.

Mit anderen Worten, der *K-Mittelwert* $\mathfrak{M}_K$ von $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist eine solche Größe, welche die folgende Eigenschaft hat: Die Summe von *K-Abweichungen* der Größe $\mathfrak{M}_K$ von x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gibt Null. Es gilt der

Satz 1. Es sei $K \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein und nur ein *K-Mittelwert* $\mathfrak{M}_K: I^n \rightarrow I$, und es gilt

$$(1.2) \quad \text{Min}(\underline{x}) \leq \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq \text{Max}(\underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n = 2, 3, \dots$).

Beweis. Es sei $\underline{x} \in I^n$ und

$$k(t) = \sum_{i=1}^n K(x_i, t) \quad (t \in I).$$

Nach (a) ist $k(t)$ eine stetige und streng monoton abnehmende Funktion in I . Wegen (a) und (b) gilt $\text{sgn } K(x, y) = \text{sgn } (x - y)$, daher ist

$$k(m) \geq 0 \quad \text{und} \quad k(M) \leq 0,$$

wobei $m = \text{Min}(x)$ und $M = \text{Max}(x)$ ist. Aus dieser Behauptung folgt, daß es ein und nur ein $t_0 \in [m, M]$ existiert, für das $k(t_0) = 0$ gilt. Aber $t_0 = \mathfrak{M}_K(x)$ ist nach der Definition. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus der Definition folgt, daß $\mathfrak{M}_K(x)$ stets eine *symmetrische* Funktion auf I^n ist.

2. *Quasiarithmetische Mittelwerte.* Die folgenden Beispielen zeigen, daß die Klasse von K -Mittelwerten ($K \in \mathcal{K}$) eine Verallgemeinerung bekannter Klassen von symmetrischen Mittelwerten ist. Dazu führen wir die folgenden Funktionenklassen ein:

$$D = \{\varphi | \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ stetig und streng monoton}\},$$

$$Q = \{f | f: I \rightarrow \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \text{ ist die Menge der positiven Zahlen}\}.$$

Es sei jetzt $\varphi \in D, f \in Q$ und

$$(2.1) \quad K(x, y) = K_{\varphi f}(x, y) = f(x) \varepsilon_{\varphi}[\varphi(x) - \varphi(y)] \quad (x, y \in I),$$

wobei

$$\varepsilon_{\varphi} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi \text{ wachsend} \\ -1 & \text{falls } \varphi \text{ abnehmend} \end{cases}$$

ist. Es ist leicht einzusehen, daß $K_{\varphi f}$ ein Element von $\mathcal{K}$ ist, und es ist der zur Abweichung $K_{\varphi f}$ gehörige Mittelwert von $x \in I^n$ die Größe

$$(2.2) \quad \mathfrak{M}_{K_{\varphi f}}(x) = M_{\varphi f}(x) = \varphi^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} \right],$$

wobei φ^{-1} die zu φ inverse Funktion bedeutet. Der Mittelwert $M_{\varphi f}(x)$ ($\varphi \in D, f \in Q$) wird einen *quasiarithmetischen Mittelwert mit Gewichtsfunktion* genannt. Diese Klasse von Mittelwerten wurde von M. BAJRAKTAREVIČ [2] eingeführt und von J. ACZÉL—Z. DARÓCZY [1], Z. DARÓCZY [3], Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI [4], L. LOSONCZI [6] [7], [8], [9] eingehend untersucht. Der klassische quasiarithmetische Mittelwert mit der Abbildungsfunktion $\varphi \in D$

$$(2.3) \quad M_{\varphi}(x) = \varphi^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right]$$

läßt sich in (2.2) mit $f(t) = c$ ($c > 0$ Konstant) einreihen. Die Theorie dieser Klasse von Mittelwerten kann man im Buch von G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA [5] finden.

3. *Ein weiteres Beispiel.* Wir geben jetzt ein Beispiel für ein K -Mittelwert an, der kein quasiarithmetischer Mittelwert ist. Es sei $I = \mathbb{R}_+$ und

$$(3.1) \quad K(x, y) = x(x-y) + x^2 - y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

Offenbar ist $K(x, y)$ eine Abweichung mit dem K -Mittelwert

$$(3.2) \quad \mathfrak{M}_K(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Man kann sehen, daß der Mittelwert (3. 2) aus den quasiarithmetischen Mittelwerten aufgebaut werden kann. Wir bemerken, daß auch solche K -Mittelwerte existieren, die in expliziter Form nicht dargestellt werden können. Ein Beispiel dafür ist der mit der Abweichung

$$(3.3) \quad K(x, y) = x(x-y) + \ln x - \ln y \quad (x, y \in R_+)$$

erklärte K -Mittelwert.

4. *Vergleich zweier K -Mittelwerte.* Bei vielen Untersuchungen spielt das Vergleichsproblem zweier Mittelwerte eine Rolle (S. [5], [3], [4], [6]). Das Problem ist das folgende: Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abweichungen K und H , damit die Ungleichung

$$(4.1) \quad \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq \mathfrak{M}_H(\underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$) erfüllt wird. Die Lösung dieses Problems ist für die Klasse der quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bekannt. (S. [4]).

Lemma 1. *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $F: I^n \rightarrow I$ eine beliebige Funktion. Für beliebiges $\underline{x} \in I^n$ gilt die Ungleichung*

$$(4.2) \quad \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq F(\underline{x})$$

dann und nur dann, falls die Ungleichung

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n K[x_i, F(\underline{x})] \leq 0$$

gilt für alle $\underline{x} \in I^n$.

BEWEIS. (i) Gilt (4. 1), so erhalten wir wegen (a)

$$K[x_i, F(\underline{x})] \leq K[x_i, \mathfrak{M}_K(\underline{x})] \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

woraus sich mit der Addition (4. 3) ergibt.

(ii) Wir setzen jetzt voraus, daß die Ungleichung (4. 3) für alle $\underline{x} \in I^n$ erfüllt ist und ein Element $\underline{x}^0 \in I^n$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}^0) > F(\underline{x}^0) \quad \underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

existiert.

Dann gilt

$$K[x_i^0, \mathfrak{M}_K(\underline{x}^0)] < K[x_i^0, F(\underline{x}^0)] \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

woraus sich

$$0 < \sum_{i=1}^n K[x_i^0, F(\underline{x}^0)]$$

ergibt. Dieser ist aber ein Widerspruch, damit haben wir das Lemma bewiesen.

Lemma 2. *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und*

$$(4.4) \quad \underline{x}^n = (x, y, y, \dots, y) \in I^n \quad (n=2, 3, \dots),$$

wobei $x, y \in I$ beliebig ist. Dann gilt

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n) = y.$$

BEWEIS. Mit der Bezeichnung

$$y_n = \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n)$$

erhalten wir nach der Definition

$$(4.6) \quad K(x, y_n) + (n-1)K(y, y_n) = 0 \quad (n=2, 3, \dots).$$

In (4.6) ist $K(x, y_n)$ beschränkt, daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(y, y_n) = 0.$$

Wegen der Eigenschaft $K(y, y) = 0$ und der Stetigkeit kommt die Behauptung $y_n \rightarrow y$. Wir bemerken, daß es im Falle $x \neq y$ stets $y_n \neq y$ gilt.

Auf Grund dieser Lemmata können wir das Vergleichsproblem von K -Mittelwerten für die Klasse von Abweichungen aus $\mathcal{K}^*$ lösen, wobei

$$\mathcal{K}^* = \left\{ K \mid K \in \mathcal{K}, K_2(x, y) = \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{ existiert und } \neq 0 \right\}$$

eine Untermenge von $\mathcal{K}$ ist. Ist $K \in \mathcal{K}^*$, so gilt nach dem Darboux'schen Satz $K_2(x, y) < 0$ für alle $x, y \in I$. Für beliebiges $K \in \mathcal{K}^*$ führen wir die Bezeichnung

$$K^*(x, y) = \frac{K(x, y)}{-K_2(y, y)} \quad (x, y \in I)$$

ein.

Satz 2. Es sei $K, H \in \mathcal{K}^*$. Für beliebiges $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$) gilt die Ungleichung (4.1) dann und nur dann, falls die Ungleichung

$$(4.7) \quad K^*(x, y) \leq H^*(x, y)$$

für alle $x, y \in I$ besteht.

BEWEIS. (i) Die Voraussetzung ist notwendig. Gilt die Ungleichung (4.1) für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$), so erhalten wir nach dem Lemma 1 die Ungleichung

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^n K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq 0$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$). Wir setzen in (4.8)

$$\underline{x} = \underline{x}^n = (x, y, y, \dots, y) \in I^n,$$

wobei $x, y \in I$ ($x \neq y$) beliebig wählbar ist. Mit der Bezeichnung $y_n = \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n)$ gilt dann

$$(4.9) \quad K(x, y_n) + (n-1)K(y, y_n) \leq 0. \quad (n=2, 3, \dots)$$

Dabei ist $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ($y_n \neq y$) nach dem Lemma 2. Mit der Berücksichtigung der Gleichung

$$H(x, y_n) + (n-1)H(y, y_n) = 0 \quad (n=2, 3, \dots)$$

bekommen wir aus (4. 9)

(4. 10)

$$K(x, y_n) \leq -(n-1)K(y, y_n) = -(n-1)H(y, y_n) \frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)} = H(x, y_n) \frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)}.$$

Wegen $K, H \in \mathcal{K}^*$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)} = \frac{K_2(y, y)}{H_2(y, y)}.$$

Mit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir aus (4. 10) die Ungleichung (4. 7) für alle $x, y \in I$ ($x \neq y$). Im Falle $x=y$ ist (4. 7) trivial.

(ii) *Die Voraussetzung ist hinreichend.* Gilt die Ungleichung (4. 7) für alle $x, y \in I$, so setzen wir in (4. 7) $x=x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) und $y=\mathfrak{M}_H(\underline{x})$, wobei $\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ beliebig ist. Dann gilt

$$K^*[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq H^*[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Addieren wir jetzt diese Ungleichungen für $i=1, 2, \dots, n$, so gilt

$$-\frac{1}{K_2[\mathfrak{M}_H(\underline{x}), \mathfrak{M}_H(\underline{x})]} \sum_{i=1}^n K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq 0,$$

woraus sich

$$\sum_{i=1}^n K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq 0$$

ergibt. Nach dem Lemma 1 erhalten wir (4. 1) aus der obigen Ungleichung, damit haben wir den Satz restlos bewiesen.

Aus Satz 2 ergibt sich das folgende

Korollar (Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI [4]). *Es seien $\varphi, \psi \in D^*$, $f, g \in \mathcal{Q}$. Die Ungleichung*

$$(4. 11) \quad M_{\varphi f}(\underline{x}) \leq M_{\psi g}(\underline{x})$$

gilt für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$) dann und nur dann, falls die Ungleichung

$$(4. 12) \quad \frac{f(x)[\varphi(x) - \varphi(y)]}{f(y)\varphi'(y)} \leq \frac{g(x)[\psi(x) - \psi(y)]}{g(y)\psi'(y)}$$

für alle $x, y \in I$ besteht. Dabei ist

$$D^* = \{\varphi | \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ differenzierbar, } \varphi'(x) \neq 0 \text{ } (x \in I)\}.$$

BEWEIS. Die Ungleichung (4. 11) lautet:

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq \mathfrak{M}_H(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in I^n, n=2, 3, \dots)$$

mit den Bezeichnungen

$$K(x, y) = f(x)\varepsilon_\varphi[\varphi(x) - \varphi(y)], \quad H(x, y) = g(x)\varepsilon_\psi[\psi(x) - \psi(y)].$$

Die Ungleichung (4. 12) folgt aus (4. 7) wegen der Beziehungen

$$K^*(x, y) = \frac{f(x)[\varphi(x) - \varphi(y)]}{f(y)\varphi'(y)} \quad \text{und} \quad H^*(x, y) = \frac{g(x)[\psi(x) - \psi(y)]}{g(y)\psi'(y)}.$$

5. *Gleichheit zweier K-Mittelwerte. Homogene K-Mittelwerte.* Das Gleichheitsproblem von K -Mittelwerten ist das folgende: Es seien K und H Abweichungen und wir betrachten die Gleichung

$$(5. 1) \quad \mathfrak{M}_K(\underline{x}) = \mathfrak{M}_H(\underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$). Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abweichungen K und H , damit (5. 1) für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$) erfüllt wird. Die Lösung dieses Problems ist für die Klasse der quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bekannt (S. [1] und vgl. [9]). Aus Satz 2 ergibt sich der

Satz 3. *Es sei $K, H \in \mathcal{K}^*$. Dann besteht die Gleichheit (5. 1) für alle $\underline{x} \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$) dann und nur dann, falls*

$$(5. 2) \quad K^*(x, y) = H^*(x, y)$$

für alle $x, y \in I$ erfüllt ist.

Mit der Anwendung des Satzes 3 kann man das Gleichheitsproblem für die Mittelwerte $M_{\varphi f}$ ($\varphi \in D^*, f \in Q$) — wie in der Arbeit [9] — lösen (vgl. [1]).

Im folgenden sei $I = R_+$. Ein K -Mittelwert wird *homogen* genannt, wenn die Homogenitätsgleichung

$$(5. 3) \quad \mathfrak{M}_K(t\underline{x}) = t\mathfrak{M}_K(\underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in R_+^n$ ($n=2, 3, \dots$) $t \in R_+$ gilt, wobei $t\underline{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ ist. Die Bestimmung der homogenen Mittelwerte spielt in der Theorie der Mittelwerte eine grundlegende Rolle (S. [5], [1]).

Satz 4. *Es sei $K \in \mathcal{K}^*$. Ist $\mathfrak{M}_K$ ein homogener Mittelwert, so muß*

$$(5. 4) \quad K^*(x, y) = yK^*\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

für alle $x, y \in R_+$ gelten. Andererseits, gilt (5. 4) für alle $x, y \in R_+$ mit $K \in \mathcal{K}^*$, so ist $\mathfrak{M}_K$ homogen.

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{M}_K$ homogen ($K \in \mathcal{K}^*$). Dann ist

$$K_t(x, y) = \frac{1}{t} K(tx, ty) \in \mathcal{K}^*$$

für alle $t \in R_+$, und wegen (5. 3) gilt

$$\mathfrak{M}_{K_t}(\underline{x}) = \mathfrak{M}_K(\underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in R_+^n$ ($n=2, 3, \dots$). Daraus folgt nach dem Satz 3

$$K_t^*(x, y) = K^*(x, y)$$

d.h.

$$K^*(tx, ty) = tK^*(x, y).$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir (5.4) mit $t=1/y$. Gilt (5.4) für eine $K \in \mathcal{K}^*$, so kann man leicht prüfen, daß $\mathfrak{M}_K$ homogen sein muß. Damit ist der Beweis beendet.

Auf Grund dieses Satzes kann man die homogenen quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bestimmen. (S. [1], [9]). Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}_h^*$ die Menge der Abweichungen aus $\mathcal{K}^*$, für die die K -Mittelwerte ($K \in \mathcal{K}_h^*$) homogen sind. Dann erhalten wir aus den Sätzen 2 und 4 das

Korollar. Es sei $K, H \in \mathcal{K}_h^*$. Dann besteht die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_K(x) \leq \mathfrak{M}_H(x)$$

für alle $x \in I^n$ ($n=2, 3, \dots$) dann und nur dann, falls

$$K^*(t, 1) \leq H^*(t, 1)$$

für alle $t \in R_+$ gilt.

Eine eingehende Untersuchung findet man in [4] über die homogenen quasiarithmetischen Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind.

Literatur

- [1] J. ACZÉL—Z. DARÓCZY, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, (1963), 171—190.
- [2] M. BAJRAKTAREVIC, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.*, **13**, (1958), 243—248.
- [3] Z. DARÓCZY, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte. *Monatshefte für Math.* **68**, (1964), 102—112.
- [4] Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI, Über den Vergleich von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen*, **17**, (1970), 289—297.
- [5] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge 1952.
- [6] L. LOSONCZI, Über den Vergleich von Mittelwerten, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, **17**, (1970), 203—208.
- [7] L. LOSONCZI, Subhomogene Mittelwerte. *Acta Math. Hung.* **22**, (1971), 187—195.
- [8] L. LOSONCZI, Subadditive Mittelwerte. *Archiv der Math.*, **22**, (1971), 168—174.
- [9] L. LOSONCZI, Über eine neue Klasse von Mittelwerten. *Acta Sci. Math.*, **32**, (1971), 71—81.

(Eingegangen 13. März 1970.)