

Über den Einfluß der Lebesgueschen Funktionen auf die Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Es sei $\{\lambda_n\}_1^\infty$ eine monoton nichtabnehmende Folge mit $\lambda_1 \equiv 1$. Für ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ bilden wir die Lebesgueschen Funktionen

$$L_m(\{\varphi_n\}; x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \quad (m=1, 2, \dots).$$

Wir betrachten diejenigen orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}$, für die

$$(1) \quad \sup \int_0^1 \frac{L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{v(x)}} dx \leq 1$$

besteht, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $v(x)$ mit natürlichen Werten gebildet ist.

Weiterhin bezeichnet $M(\lambda)$ die Klasse derjenigen reellen Zahlenfolgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$(2) \quad \sum a_n \varphi_n(x)$$

bei jedem orthonormierten System $\{\varphi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft (1) in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. (Die Menge der Divergenzpunkte von (2) hängt von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ ab.)

Es sei $\{a_n\}_1^\infty$ eine Zahlenfolge, und m, M ($m \leq M$) natürliche Zahlen, dann bezeichnet $\{a_n\}_m^M$ die Folge $(\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, a_m, \dots, a_M, 0, \dots)$. Wir setzen

$$I(\{a_n\}; \lambda) = \sup \int_0^1 \left(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right) dx,$$

wobei das Supremum für alle orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft (1) gebildet wird. Weiterhin sei

$$\|\{a_n\}; \lambda\| = \lim_{N \rightarrow \infty} I(\{a_n\}_1^N; \lambda).$$

(Der Limes auf der rechten Seite existiert, und ist endlich, oder unendlich, weil

$$I(\{a_n\}_1^N; \lambda) \leq I(\{a_n\}_1^{N+1}; \lambda) \quad (N=1, 2, \dots)$$

offensichtlich besteht.)

In der Arbeit [2] haben wir die folgende Behauptung erwähnt (Hilfssatz XII).

A. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). $\{a_n\} \in M(\lambda)$ gilt dann und nur dann, wenn

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} I(\{a_n\}_m^M; \lambda) \right) = 0.$$

Weiterhin ist in der Note [3] der folgende Satz ausgesprochen.

B. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $\{a_n\} \in M(\lambda)$ gilt dann und nur dann, wenn

$$(4) \quad \|\{a_n\}; \lambda\| < \infty.$$

Der Beweis der Hinlänglichkeit von (3) ist leicht. Ist nämlich (3) erfüllt, dann können wir eine Indexfolge $(0=n_0 < \dots < n_k < \dots)$ derart angeben, daß

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda) < \infty.$$

Es sei nun $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges orthonormiertes System mit (1). Aus (5), auf Grund der Definition von I folgt

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\max_{n_k < i \leq j \leq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right) dx < \infty,$$

und so ist

$$(7) \quad \delta_k(x) = \max_{n_k < i \leq j \leq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

fast überall in $(0, 1)$. Aus (6) ergibt sich weiterhin

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x)| dx < \infty,$$

wobei $s_m(x)$ die m -te Partialsumme der Reihe (2) bezeichnet. Aus (8) erhalten wir, daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(x)$$

fast überall existiert. Es sei nun $n_k < m < n_{k+1}$. Dann ist nach (7)

$$|s_m(x) - s_{n_k}(x)| \leq \delta_k(x) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

fast überall in $(0, 1)$, womit nach obigen $\{a_n\} \in M(\lambda)$ bewiesen ist.

Die Notwendigkeit von (3) ergibt sich leicht durch Anwendung der folgenden Behauptung ([2], Hilfssatz XI).

C. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Ist für die Indexfolge $(0=n_0 < \dots < n_k < \dots)$ $I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda) \cong \varrho > 0$ ($k=0, 1, \dots$), dann gibt es ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) mit (1) derart, daß die Reihe (2) in $(0, 1)$ fast überall divergiert.

Ist (3) nicht erfüllt, dann gibt es auf Grund der Definition von I eine positive Zahl ϱ , für die

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I(\{a_n\}_m^M; \lambda) > \varrho \quad (m=1, 2, \dots)$$

besteht. In diesem Falle kann man aber eine Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit $I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda) > \varrho$ ($k=0, 1, \dots$) angeben. Durch Anwendung der Behauptung C folgt $\{a_n\} \notin M(\lambda)$.

Man kann einsehen, daß die Behauptungen A und B gleichwertig sind. Aus (3) folgt nämlich (4) offensichtlich. Es ist nur die Implikation $(4) \Rightarrow (3)$ zu beweisen. Diese folgt aber aus der folgenden Behauptung ([3], Hilfssatz III).

D. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Ist für eine Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ $I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda) \geq \varrho > 0$ ($k=0, 1, \dots$), dann gibt es ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) mit (1) derart, daß

$$(9) \quad \overline{\lim}_{i, j \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=i}^j a_n \varphi_n(x) \right| = \infty$$

fast überall in $(0, 1)$ besteht.

Ist also (3) nicht erfüllt, erhalten wir auf Grund der Behauptung D ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ mit (1) derart, daß (9) fast überall in $(0, 1)$ besteht, woraus $\|\{a_n\}; \lambda\| = \infty$ folgt. Damit haben wir $(4) \Rightarrow (3)$ gezeigt.

Die ursprünglichen Beweise der Behauptungen C und D sind falsch. In dieser Note möchten wir für diese Behauptungen richtige Beweise angeben. Wir werden eine in [4] oder [5] angewandte Methode brauchen. Da offensichtlich aus der Behauptung D die Behauptung C folgt, ist nur D zu zeigen.

2. Zum Beweis der Behauptung D soll ein bekannter Hilfssatz vorausgeschickt werden.

Hilfssatz ([2], Hilfssatz X.). *Es sei $I(\{a_n\}_1^N; \lambda) \geq 16\sqrt{2}$. Dann gibt es ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ ($n=1, \dots, N$) derart, daß*

$$\sup \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\psi_n\}; x) dx \leq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle messbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten zwischen 1 und N gebildet ist, und

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \psi_j(x)| \leq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteq (0, 1))$ mit $m(E) \geq 1/4$ besteht.

(Eine Menge nennen wir *einfach*, wenn sie als die Vereinigung endlichvieler Intervalle entsteht.)

3. Beweis der Behauptung D. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$(10) \quad I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda) \cong 16\sqrt{2} \quad (k=0, 1, \dots)$$

annehmen.

Es seien I_i, J_i ($i=2, 3, \dots$) solche Intervalle, für die die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\text{mes}(I_i) = \frac{1}{2^s} \quad (i = 2^s + \sigma; \sigma = 0, \dots, 2^s - 1; s = 1, 2, \dots),$$

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad (2^s \leq i, j < 2^{s+1}; i \neq j),$$

$$I_i \cap J_i = \emptyset, \quad \text{mes}(J_i) = \frac{1}{2^{i+a}} \quad (i=2, 3, \dots);$$

$$J_i \cap J_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

Weiterhin sei

$$\alpha_i = \sqrt{2s/12^3} \quad (i = 2^s + \sigma; \sigma = 0, \dots, 2^s - 1; s = 1, 2, \dots).$$

wobei wir die Konstante $a(>0)$ später bestimmen werden.

Durch vollständiger Induktion definieren wir eine Indexfolge $(0=k(1) < \dots < k(i) < \dots$, ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) und eine Folge von einfachen Mengen $F_i(\subseteq I_i)$ ($i=2, 3, \dots$) mit folgenden Eigenschaften:

es gelten

$$(11) \quad L_{n_{k(2)}}(\{\varphi_n\}; x) \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$(12) \quad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx \leq \frac{1}{4},$$

wobei das Supremum für alle messbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten zwischen 1 und $n_{k(2)}$ gebildet wird;

für $i=2, 3, \dots$ sind

$$(13) \quad \varphi_n(x) = 0 \quad (x \notin I_i \cup J_i; n_{k(i)} < n \leq n_{k(i)+1}),$$

$$(14) \quad \varphi_n(x) = 0 \quad (x \notin J_i; n_{k(i)+1} < n \leq n_{k(i+1)}),$$

$$(15) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)+1}+1}^{n_{k(i+1)}} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$(16) \quad \lambda_{n_{k(i)+1}}^{-1} \left(1 + \sum_{j=2}^{i-1} (M(j) + 1) \right) \leq \frac{1}{4 \cdot 2^{2s}} \quad (2^s \leq i < 2^{s+1}; s = 1, 2, \dots)$$

mit

$$(17) \quad M(j) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \left| \sum_{n_{k(j)}+1}^{n_{k(j)}+1} \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt,$$

$$\sup_{I_i} \int \frac{1}{\lambda_v(x)} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{s}{12^3 2^{2s}} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+1+a}} 12^3} \frac{1}{2^s} \quad (i = 2^s + \sigma; \sigma = 0, \dots, 2^s - 1),$$

$$(18) \quad \sup_{J_i} \int \frac{1}{\lambda_v(x)} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+1+a}} 12^3 2^s} + \frac{3}{2^{i+a}} \quad (i = 2^s + \sigma; \sigma = 0, \dots, 2^s - 1),$$

wobei das Supremum für alle messbaren Funktionen $v(x)$ mit ganzzahligen Werten zwischen $n_{k(i)}+1$ und $n_{k(i+1)}$, gebildet wird;
für jedes i ($i=2, 3, \dots$) gelten

$$(19) \quad \text{mes}(F_i) \leq \frac{1}{4 \cdot 2^s} \quad (i = 2^s + \sigma; \sigma = 0, \dots, 2^s - 1),$$

$$(20) \quad \max_{n_{k(i)} < p \leq q \leq n_{k(i+1)}} |a_p \varphi_p(x) + \dots + a_q \varphi_q(x)| \leq \alpha_i \quad (x \in F_i; i = 2^s + \sigma; \sigma = 0, \dots, 2^s - 1).$$

Weiterhin die Mengen

$$G_s = \bigcup_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} F_i \quad (s=1, 2, \dots)$$

sind stochastisch unabhängig.

Es sei $k(2)$ die kleinste positive ganze Zahl mit $\lambda_{n_{k(2)}+1}^{-1} \leq 1/4$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\chi_n(4x) & (0 \leq x \leq 1/4), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, n_{k(2)}$), wobei $\chi_n(x)$ die n -te Haarsche Funktion bezeichnet. Es ist bekannt (s. z. B. G. ALEXITS [1], S. 46—50), daß

$$(21) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \chi_n(x) \chi_n(t) \right| dt \leq 1 \quad (N=1, 2, \dots)$$

gilt. Daraus, durch einfache Rechnung erhalten wir (11) und (12).

Es sei $i_0 (\geq 1)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die Indizes $k(i)$ ($i=2, \dots, i_0+1$), die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+1)}$) und die einfachen Mengen F_i ($i=2, \dots, i_0$) schon definiert sind derart, daß diese Funktionen ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System bilden, weiterhin (16) für $i=2, \dots, i_0+1$, (13), (14), (15), (17), (18), (19) und (20) für $i=2, \dots, i_0$ bestehen.

Da diese Funktionen Treppenfunktionen und diese Mengen einfach sind, können wir das Intervall I_{i_0+1} , bzw. das Intervall J_{i_0+1} in paarweise disjunkte Intervalle $\bar{I}_r$ ($r=1, \dots, \varrho$), bzw. $\bar{J}_s$ ($s=1, \dots, \sigma$) derart zerlegen, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+1)}$) in jeden Intervalle $\bar{I}_r$, $\bar{J}_s$ ($r=1, \dots, \varrho$; $s=1, \dots, \sigma$) konstant ist, und jede Menge $F_i \cap I_{i_0+1}$ ($i=2, \dots, i_0$) mit $F_i \cap I_{i_0+1} \neq \emptyset$ die Vereinigung gewisser $\bar{I}_r$ ist. Die zwei Hälften von $\bar{I}_r$, bzw. von $\bar{J}_s$ bezeichnen wir mit $\bar{I}'_r$, $\bar{I}''_r$, bzw. mit $\bar{J}'_s$, $\bar{J}''_s$.

Ist $f(x)$ eine in $(0, 1)$ definierte Funktion, H eine Menge und $I=(a, b)$ ein endliches Intervall, dann sei

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $H(I)$ bezeichne die Menge die aus H mit der Transformation $y = (b-a)x + a$ entsteht.

Wir wenden den Hilfssatz für die Folge $\{a_n\}_{n_{k(i_0+1)}+1}^{n_{k(i_0+1)}+1}$ an. (Wegen (10) können wir den Hilfssatz benutzen.) Die entsprechenden Funktionen, bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\psi_n(x)$ ($n = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$), bzw. mit E . Es sei $i_0 + 1 = 2^s + \sigma$ ($1 \leq \sigma < 2^s$). Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \sqrt{\frac{2s}{12^3}} \left(\sum_{r=1}^{\varrho} \psi_n(\bar{I}'_r; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \psi_n(\bar{I}''_r; x) \right) + \\ & + \sqrt{\frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})}} \left(\sum_{s=1}^{\sigma} \psi_n(\bar{J}'_s; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_n(\bar{J}''_s; x) \right) \\ & (n = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}), \end{aligned}$$

und

$$F_{i_0+1} = \left(\bigcup_{r=1}^{\varrho} E(\bar{I}'_r) \right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{\varrho} E(\bar{I}''_r) \right).$$

Diese Funktionen sind Treppenfunktionen, und F_{i_0+1} ist einfach. Durch einfache Rechnung erhalten wir, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$) ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System bilden.

Es sei $k(i_0+2)$ die kleinste natürliche Zahl mit $k(i_0+2) \cong k(i_0+1) + 1$, für die (16) für $i = i_0 + 2$ besteht. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$) Treppenfunktionen sind, können wir das Intervall J_{i_0+1} auf paarweise disjunkte Intervalle $\bar{J}_r$ ($r=1, \dots, \tilde{\varrho}$) derart zerlegen, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$) in jedem Intervall $\bar{J}_r$ ($r=1, \dots, \tilde{\varrho}$) konstant ist; die zwei Hälften von $\bar{J}_r$ bezeichnen wir mit $\bar{J}'_r$ bzw. $\bar{J}''_r$ ($r=1, \dots, \tilde{\varrho}$). Es sei dann

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(J_{i_0+1})}} \left(\sum_{r=1}^{\tilde{\varrho}} \chi_n(\bar{J}'_r; x) - \sum_{r=1}^{\tilde{\varrho}} \chi_n(\bar{J}''_r; x) \right) \\ & (n = n_{k(i_0+1)+1} + 1, \dots, n_{k(i_0+2)}). \end{aligned}$$

Diese sind auch Treppenfunktionen, und durch einfache Rechnung ergibt sich, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+2)}$) in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System bilden.

Aus der Definition der Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+2)}$) folgt (13) und (14) für $i = i_0 + 1$. Aus (21) ergibt sich durch einfache Rechnung, daß (15) für $i = i_0 + 1$ gilt, und

$$(22) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq 1 \quad (x \in J_{i_0+1})$$

$$(n_{k(i_0+1)} + 1 < m \leq n_{k(i_0+2)})$$

besteht. Weiterhin auf Grund des Hilfssatzes, aus der Definition von F_{i_0+1} und der Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+1)+1}$) erhalten wir leicht, daß auch (19) und (20) für $i = i_0 + 1$ gelten.

Es sei $x \in I_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)} < m \leq n_{k(i_0+1)+1}$. Dann ist $x \in \bar{I}'_r$, oder $x \in \bar{I}''_r$ mit einem r order $\bar{r}$ ($1 \leq r, \bar{r} \leq \varrho$); bezeichnen wir mit I dieses $\bar{I}'_r$, bzw. dieses $\bar{I}''_r$. Dann erhalten wir

$$(23) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt =$$

$$= \frac{2s}{12^3} \sum_{l=1}^{\varrho} \left(\int_{I'_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(\bar{I}'_l; t) \right| dt + \right.$$

$$\left. + \int_{I''_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(\bar{I}''_l; t) \right| dt \right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})}} \sum_{l=1}^{\sigma} \left(\int_{J'_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(\bar{J}'_l; t) \right| dt + \right.$$

$$\left. + \int_{J''_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(\bar{J}''_l; t) \right| dt \right) =$$

$$= \frac{2s}{12^3} \sum_{l=1}^{\varrho} (\text{mes}(I'_l) + \text{mes}(I''_l)) \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(t) \right| dt +$$

$$+ \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})}} \sum_{l=1}^{\sigma} (\text{mes}(J'_l) + \text{mes}(J''_l)) \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(t) \right| dt =$$

$$= \left(\frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1}) + \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})}} \text{mes}(J_{i_0+1}) \right) \times$$

$$\times \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \psi_n(I; x) \psi_n(t) \right| dt.$$

Ist aber $x \in I_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)+1} < m \leq n_{k(i_0+2)}$, dann bekommen wir nach (14)

$$(24) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt = \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^{n_{k(i_0+1)+1}} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt =$$

$$= \left(\frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1}) + \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})} \text{mes}(J_{i_0+1})} \right) \times$$

$$\times \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^{n_{k(i_0+1)+1}} \psi_n(I; x) \psi_n(t) \right| dt,$$

wobei I mit einem I'_r ($1 \leq r \leq \varrho$), bzw. mit einem $I''_{\bar{r}}$ ($1 \leq \bar{r} \leq \varrho$) gleich ist. Aus (23), (24) und aus dem Hilfssatz, auf Grund der Definition von I_{i_0+1} und J_{i_0+1} erhalten wir (17) im Falle $i = i_0 + 1$.

Es sei nun $x \in J_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)} < m \leq n_{k(i_0+1)+1}$. Dann ist $x \in J'_s$ mit einem $1 \leq s \leq \sigma$, oder $x \in J''_{\bar{s}}$ mit einem $1 \leq \bar{s} \leq \sigma$; bezeichnen wir mit J dieses J'_s , bzw. dieses $J''_{\bar{s}}$. Dann erhalten wir nach obiger Methode

$$(25) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt = \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})} \text{mes}(I_{i_0+1}) +$$

$$+ \left(1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1}) \right) \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^m \psi_n(J; x) \psi_n(t) \right| dt}.$$

Ist aber $x \in J_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)+1} < m \leq n_{k(i_0+2)}$, dann ergibt sich nach (22) und (25)

$$(26) \quad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^{n_{k(i_0+1)+1}} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leq$$

$$\leq \left(\sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1})}{\text{mes}(J_{i_0+1})} \text{mes}(I_{i_0+1})} + \left(1 - \frac{2s}{12^3} \text{mes}(I_{i_0+1}) \right) \right) \times$$

$$\times \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}}^{n_{k(i_0+1)+1}} \psi_n(J; x) \psi_n(t) \right| dt + 1,$$

wobei J mit einem J'_s ($1 \leq s \leq \sigma$), bzw. mit einem $J''_{\bar{s}}$ ($1 \leq \bar{s} \leq \sigma$) gleich ist. Aus (25),

(26) und aus dem Hilfssatz, auf Grund der Definition von I_{i_0+1} und J_{i_0+1} erhalten wir (18) im Falle $i = i_0 + 1$. Weiterhin aus (13) ergibt sich

$$(27) \quad \int_1^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^m \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt = 0$$

$$(x \notin I_{i_0+1} \cup J_{i_0+1}; m = n_{k(i_0+1)} + 1, \dots, n_{k(i_0+2)}).$$

Wir haben also die Indizes $(0=k(1) < \dots < k(i_0+1))$, das in $(0, 1)$ orthonormierte System von Treppenfunktionen $\{\varphi_n(x)\}$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+2)}$) und die einfachen Mengen F_i ($i=2, \dots, i_0+1$) derart bestimmt, daß (16) für $i=2, \dots, i_0+2$, weiterhin (13), (14), (15), (17), (18), (19) und (20) für $i=1, \dots, i_0+1$ gelten. Die Indexfolge $\{k(i)\}$, das System $\{\varphi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{F_i\}$ mit den erwähnten Eigenschaften bekommen wir dann durch Induktion.

Wir zeigen erstens, daß das System $\{\varphi_n(x)\}$ die Eigenschaft (1) besitzt. Es sei $v(x)$ eine beliebige messbare Funktion mit positiven ganzzahligen Werten. Es sei $E_1 (\subseteq (0, 1))$ die Menge der Punkte x , für die $v(x) \leq n_{k(2)}$ gilt, weiterhin sei $E_i (\subseteq (0, 1))$ die Menge der Punkte x , für die $n_{k(i)} < v(x) \leq n_{k(i+1)}$ ($i=2, 3, \dots$) besteht. Diese Mengen sind paarweise disjunkt. Ist $x \in E_i$ ($2^s \leq i < 2^{s+1}$; $s=1, 2, \dots$), dann bekommen wir auf Grund von (11), (15) und (16)

$$(28) \quad \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) \equiv \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}}+1} \left(L_{n_{k(i)}}(\{\varphi_n\}; x) + \right.$$

$$+ \sum_{j=2}^{i-1} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j+1)}+1} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j+1)}+1}^{n_{k(j+2)}+1} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}}+1} \left(1 + \sum_{j=2}^{i-1} (M(j)+1) \right) + \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4 \cdot 2^{2s}} + \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt.$$

Aus (12), (17), (18), (27) und (28) erhalten wir durch einfacher Rechnung

$$\int_0^1 \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx =$$

$$= \int_{E_1} \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \int_{E_i} \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx \right) \equiv$$

$$\equiv \int_{E_1} \frac{1}{\lambda_{v(x)}} L_{v(x)}(\{\varphi_n\}; x) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \int_{E_i} \left(\frac{1}{4 \cdot 2^{2s}} + \frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \right) \equiv \\
& \equiv \frac{1}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{4 \cdot 2^{2s}} \int_{E_i} dx \right) + \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \int_{F_i} \left(\frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) dx \right) + \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \int_{J_i} \left(\frac{1}{\lambda_{v(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{v(x)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \right) \right) \equiv \\
& \equiv \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \left(\frac{s}{12^3 2^{2s}} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+a+1}} 12^3 2^s} \right) + \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+a+1}} 12^3 2^s} + \frac{3}{2^{i+a}} \right) < 1,
\end{aligned}$$

wenn a genügend groß ist. Also besitzt das System die Eigenschaft (1).

Auf Grund der Konstruktionsmethode der Mengen F_i können wir einsehen, daß die Mengen G_s ($s=1, 2, \dots$) stochastisch unabhängig sind. Weiterhin aus (19), $F_i \subseteq I_i$ und $F_i \cap F_j = \emptyset$ ($i \neq j$, $2^s \leq i, j < 2^{s+1}$) folgt

$$\text{mes}(G_s) \equiv \frac{1}{4}.$$

Nach dem zweiten Borel—Cantellischen Lemmas erhalten wir

$$(29) \quad \text{mes}(\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} G_s) = 1.$$

Ist $x \in \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} G_s$, dann folgt aus (20), daß (9) gilt. Nach (29) gilt aber (9) fast überall.

Damit haben wir die Behauptung D bewiesen.

Schriftenverzeichnis

- [1] G. ALEXITS, Convergence problems of orthogonal series *Budapest*, 1961.
- [2] K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III, *Publicationes Math., Debrecen*, **12**, (1965), 127—157.
- [3] K. TANDORI, Beitrag zu der Arbeit „Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III“, *Publicationes Math., Debrecen*, **13**, (1966), 307—311.
- [4] K. TANDORI, Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **28**, (1967), 147—153.
- [5] F. MÓRICZ—K. TANDORI, On a problem of summability of orthogonal series, *Acta Sci. Math.*, **29**, (1968), 331—350.

(Eingegangen am 18. Oktober 1970.)