

Eine Bemerkung über das Maximum von Summen orthogonaler Funktionen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Für ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ bilden wir die Lebesgueschen Funktionen

$$L_N(\{\varphi_n\}; x) = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \quad (N=1, 2, \dots).$$

Es sei $\{\lambda_n\}_1^\infty$ eine Folge von Zahlen $\lambda_n \geq 1$ ($n=1, 2, \dots$). Für eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| = \sup_{\{\varphi_n\}} \int_0^1 \left(\sup_{1 \leq i \leq j} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right) dx,$$

wobei $\sup_{\{\varphi_n\}}$ bedeutet, daß das Supremum für jedes in $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ gebildet wird, für welches

$$(1) \quad \int_0^1 \left(\sup_N L_N(\{\varphi_n\}; x) / \lambda_N \right) dx \leq 1$$

besteht.

In einer vorigen Arbeit ([2], S. 138.) haben wir die untere Abschätzung

$$\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| \geq C_1 |a_i| \quad (i=1, 2, \dots)$$

bewiesen. (Im folgenden bezeichnen $C_1, C_2, \dots$ positive, absolute Konstanten.)

In dieser Note werden wir die folgende, stärkere untere Abschätzung zeigen.

$$\text{Es gilt } \|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| \geq C_2 \left\{ \sum_{n=1}^\infty a_n^2 \right\}^{1/2} \text{ für jede Folge } \{a_n\}_1^\infty.$$

2. Es sei

$$\|\{a_n\}_1^\infty\|^* = \sup_{\{\varphi_n\}} \int_0^1 \left(\sup_{1 \leq i \leq j} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \right) dx,$$

wobei $\sup_{\{\varphi_n\}}$ bedeutet, daß das Supremum für jedes in $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ gebildet ist, für welches

$$(2) \quad L_N(\{\varphi_n\}; x) \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1; N=1, 2, \dots)$$

gilt. Da aus (2) die Ungleichung (1) für jede Folge $\{\lambda_n\}_1^\infty$ mit $\lambda_n \geq 1$ ($n=1, 2, \dots$) folgt, gilt

$$\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| \equiv \|\{a_n\}_1^\infty\|^*$$

für jede Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$. Unsere Behauptung folgt also aus dem folgenden Satz.

Satz. Für jede Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$ besteht

$$\|\{a_n\}_1^\infty\|^* \equiv C_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}.$$

3. Nach der Definition von $\|\{a_n\}_1^\infty\|^*$ ist es genügend, die Ungleichung

$$(3) \quad \|\{a_n\}_1^N\|^* \equiv C_3 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2}$$

für jede natürliche Zahl N zu beweisen, wobei $\{a_n\}_1^N$ die Folge $\{a_1, \dots, a_N, 0, \dots\}$ bedeutet.

Mit $\chi_n^{(x)}$ ($n=1, 2, \dots$) bezeichnen wir die Haarschen Funktionen: es sei also

$$\chi_1(x) \equiv 1 \quad (0 < x < 1),$$

$$\chi_k(x) = \chi_m^{(l)}(x) \quad (k = 2^m + l; \quad m = 0, 1, \dots; \quad 1 \leq l \leq 2^m),$$

wobei

$$\chi_m^{(l)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & (x \in ((2k-2)/2^{m+1}, (2k-1)/2^{m+1})), \\ -\sqrt{2^m} & (x \in ((2k-1)/2^{m+1}, 2k/2^{m+1})), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bekanntlich gilt

$$(4) \quad L_N(\{\chi_n\}; x) \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1; \quad N = 1, 2, \dots).$$

(Siehe z. B. [1], 46—50.)

Zum Beweis von (3) benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. Ist $\{b_n\}_1^\infty$ eine monoton nichtwachsende Folge von nichtnegativen Zahlen, dann gilt

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N b_k \chi_k(x) \right| dx \equiv C_3 \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 \right)^{1/2} \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe [3], Bemerkung an der Seite 935.)

4. Beweis des Satzes. Es sei $\{a_n\}_1^\infty$ eine Zahlenfolge und N eine natürliche Zahl. Die Indexfolge $\{1, \dots, N\}$ zerlegen wir in Indexfolgen $I_1^{(1)}, \dots, I_r^{(1)}, I_1^{(2)}, \dots, I_q^{(2)}$ folgenderweise: jede $I_p^{(1)}$ ($1 \leq p \leq r$), bzw. jede $I_q^{(2)}$ ($1 \leq q \leq q$) ist eine im

strengen Sinne monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen zwischen 1 und N , zwei verschiedene Indexfolgen haben kein gemeinsames Glied, jede natürliche Zahl zwischen 1 und N gehört zu einer von diesen Indexfolgen, weiterhin ist jede Folge $\{a_n\}_{n \in I_p^{(1)}} (1 \leq p \leq r)$ monoton nichtwachsend mit positiven Gliedern, bzw. jede Folge $\{a_n\}_{n \in I_q^{(2)}} (1 \leq q \leq \varrho)$ ist monoton nichtabnehmend mit nichtpositiven Gliedern.

Es seien

$$\lambda_p^2(1) = \sum_{n \in I_p^{(1)}} a_n^2 / 2 \sum_{s=1}^r a_s^2 \quad (p=1, \dots, r),$$

$$\lambda_q^2(2) = \sum_{n \in I_q^{(2)}} a_n^2 / 2 \sum_{t=1}^{\varrho} a_t^2 \quad (q=1, \dots, \varrho).$$

Wir setzen weiterhin

$$J_p(1) = (\lambda_1^2(1) + \dots + \lambda_{p-1}^2(1), \lambda_1^2(1) + \dots + \lambda_p^2(1)) \quad (1 \leq p \leq r),$$

$$J_q(2) = (\lambda_1^2(2) + \dots + \lambda_{q-1}^2(2), \lambda_1^2(2) + \dots + \lambda_q^2(2)) \quad (1 \leq q \leq \varrho).$$

Offensichtlich sind diese Intervalle paarweise disjunkt, und gilt

$$(0, 1) = \left(\bigcup_{p=1}^r J_p(1) \right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{\varrho} J_q(2) \right).$$

Für eine in $(0, 1)$ definierte Funktion $f(x)$ und für ein Intervall $I = (a, b) (\subseteq (0, 1))$ setzen wir

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Länge eines Intervalles I bezeichnen wir mit $|I|$.

Wir definieren ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ folgenderweise. Die Indexfolge $\{N+1, N+2, \dots\}$ zerlegen wir beliebigerweise in paarweise disjunkte Indexfolgen $J_1^{(1)}, \dots, J_p^{(1)}, J_1^{(2)}, \dots, J_q^{(2)}$. Es sei $\varphi_n(x)$ für $n \in I_p^{(1)} \cup J_p^{(1)}$ der Reihe nach mit den Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{|J_p(1)|}} \chi_1(J_p(1); x), \frac{1}{\sqrt{|J_p(1)|}} \chi_2(J_p(1); x), \dots$$

gleich, und es sei $\varphi_n(x)$ für $n \in I_q^{(2)} \cup J_q^{(2)}$ der Reihe nach mit den Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{|J_q(2)|}} \chi_1(J_q(2); x), \frac{1}{\sqrt{|J_q(2)|}} \chi_2(J_q(2); x), \dots$$

gleich. Offensichtlich ist dieses Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ orthonormiert. Weiterhin, aus (4) ergibt sich durch einfacher Rechnung, daß (2) besteht.

Auf Grund der Definition von $\|\{a_n\}_1^N\|^x$ und des Hilfssatzes erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} \|\{a_n\}_1^N\|^x &\equiv \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx = \\ &= \sum_{p=1}^r \int_{J_p(1)} \left| \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx + \sum_{q=1}^q \int_{J_q(2)} \left| \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx \equiv \\ &\equiv C_3 \left\{ \sum_{p=1}^r \sqrt{J_p(1)} \left(\sum_{n \in I_p^{(1)}} a_n^2 \right)^{1/2} + \sum_{q=1}^q \sqrt{J_q(2)} \left(\sum_{n \in I_q^{(2)}} a_n^2 \right)^{1/2} \right\} = \\ &= C_3 \left\{ \left(\sum_{n \in \bigcup_{p=1}^r I_p^{(1)}} a_n^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n \in \bigcup_{q=1}^q I_q^{(2)}} a_n^2 \right)^{1/2} \right\} \equiv C_3 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir (3) bewiesen.

Schriftenverzeichnis

- [1] ALEXITS, G., Convergence problems of orthogonal series (*Budapest*), 1961.
- [2] TANDORI, K., Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III, *Publ. Math. (Debrecen)* **12** (1965), 127—157.
- [3] Ульянов, П. Л., О рядах по системе Хаара с мономонными коэффициентами, *Изв. Акад. Наук СССР*, **28** (1964), 925—950.

(Eingegangen am 14. Juli 1971.)