

Berichtigung zur Arbeit „Über die Iteration reeller Funktionen II“

Von B. BARNA (Debrecen)

In meiner genannten Arbeit — wie das Herr M. KRÜPPEL bemerkte — ist der Beweis des Satzes 9. (in Bd. 13. dieser Zeitschrift, S. 169)¹⁾ unvollständig.

Im Beweis bekam ich das Zwischenresultat, daß für alle Punkte eines abgeschlossenen Intervalls

$$(1) \quad f_m(x) = f_n(x)$$

gilt, wobei m, n ein gewisses Zahlenpaar ist ²⁾.

Man soll jetzt den Beweis, wie folgt, fortsetzen: Nimmt man $m > n$ an, so kann man für (1) auch schreiben

$$(*) \quad f_{m-n}(x) = x, \quad x \in (\Delta x)_n.$$

Aus (*) folgt, daß $(\Delta x)_n$ aus Fixpunkten besteht, deren Ordnungen Teiler der Zahl $m-n$ sind. Da es nur endlich viele solche Teiler gibt, existiert ein Teiler so, daß die Fixpunkte k -ter Ordnung wenigstens in einem Teilintervall (c, d) von $(\Delta x)_n$

¹⁾ In der Fußnote 3. der genannten Arbeit statt „die Vereinigung“ „der Durchschnitt“ zu lesen ist.

²⁾ Ich schreibe später (S. 170): „Es sei $f_p(x)$ die erste iterierte Funktion von $f(x)$ die sich in Δx durch Iteration wiederholt, und $f_{p+\mu}(x)$ die erste Wiederholung von $f_p(x)$, d.h.

$$f_{p+1}(x) \neq f_p(x), \dots, f_{p+\mu-1}(x) \neq f_p(x), f_{p+\mu}(x) = f_p(x), \quad x \in \Delta x.$$

Ich folgere dann hieraus, daß das p -te iterierte Intervall von Δx aus Fixpunkten μ -ter Ordnung besteht. Dies gilt aber im allgemeinen nicht, wie die Funktion $f(x) = 1-x$, $I \equiv [0, 1]$ zeigt. Für alle Punkte aus I gilt dann

$$f_2(x) = f(x)$$

und $x = \frac{1}{2}$ ist ein Fixpunkt erster Ordnung, alle andere Punkte sind Fixpunkte zweiter Ordnung.

Da das Intervall I also nicht aus Fixpunkten derselben Ordnung besteht, gibt es bei diesem Beispiel keine solchen Zahlen p und μ , daß das p -te iterierte Intervall aus Fixpunkten μ -ter Ordnung besteht.

dicht liegen, während die Menge der Fixpunkte aus $(\Delta x)_n$, deren Ordnungen kleiner sind als k , nirgends dicht ist. Wegen der Stetigkeit der Funktion $f_k(x)$ gilt für alle $x \in (c, d)$

$$f_k(x) = x.$$

Da die Fixpunkte, deren Ordnungen kleiner sind als k , in $(\Delta x)_n$ und somit in (c, d) nirgends dicht liegen, können wir aus (c, d) ein Teilintervall (a, b) auswählen, welches nur aus Fixpunkten k -ter Ordnung besteht. Damit ist Satz 9 vollständig bewiesen.

Ich verdanke diesen Beweis einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. Krüppel, dem ich an dieser Stelle aufrichtigen Dank sagen möchte.

(Eingegangen am 20. December 1972.)