

Über die Darstellung der rationalen Zahlen durch Normformen

ATTILA PETHŐ (Debrecen)

Herrn Professor Dr. A. Rapcsák zum 60-ten Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Seien $1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ linear unabhängige algebraische Zahlen über dem Körper der rationalen Zahlen R , $K=R(\alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ein algebraischer Zahlkörper mit dem Grad n ; $\alpha=\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ die Konjugierten eines Elements $\alpha \in K$ und $N_{K/R}(\alpha)$ die Norm in diesem Körper. Es sei weiter

$$L^{(k)}(x) = x_1 + \alpha_2^{(k)} x_2 + \dots + \alpha_m^{(k)} x_m \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ein viel untersuchtes Problem ist, wann die diophantische Gleichung

$$(1) \quad N_{K/R}(L(x)) = a$$

unendlich viele $x=(x_1, \dots, x_m)$ ganze rationale Lösungen hat. Wenn im Fall $m=n$ (1) eine ganze Lösung hat, dann hat es auch unendlich viele und diese können wir mit Hilfe der Einheiten von K angeben ([2], 158—161).

Im Fall $m < n$ hängt die Antwort von der Struktur des Moduls $M=\{1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ab. Wir nennen M ausgeartet, wenn der entsprechende Vektorraum L (über R) einen Teilraum L' enthält der einem Teilkörper $K' \subset K$ ähnlich ist, wobei K' weder der Körper der rationalen Zahlen, noch ein imaginär-quadratischer Körper ist.

Wenn M ausgeartet ist gibt es ein $a \in R$, bei dem (1) unendlich viele ganze Lösungen hat ([2], 396—397).

Anderfalls — wenn der Modul nicht ausgeartet ist — hat W. M. SCHMIDT [6] bewiesen, daß (1) nur endlich viele Lösungen hat. Seine Methode ist aber nicht effektiv, ist nicht geeignet für das Aufsuchen sämtlicher Lösungen von (1).

Für die Höhen sämtlicher Lösungen $x=(x_1, \dots, x_m)$ d.h. für $\max_{1 \leq i \leq m} (|x_i|)$ haben

A. BAKER [1] für $m=2$ im allgemeinen, K. GYÖRY und L. LOVÁSZ [3] für $m=3$ im Falle eines nichtreellen Körpers K , zu dem eine normale Erweiterung (über R) F endlichen Grades existiert, deren maximaler reeller Unterkörper ebenfalls normal ist (im folgenden nennen wir solche Körper nichtreelle Kronecker-Körper oder kurz K -Körper, solche sind z. B. die nichtreellen Abelschen Zahlkörper, siehe auch [4]) explizit, eine nur von dem Modul M und von a abhängende Schranke angeben.

Bei einem vollständigen Modul können wir alle Lösungen (1) mit Hilfe der Einheiten von K angeben. Wenn M ausgeartet ist, so gibt es $a \in R$, für die (1) unend-

lich viele Lösungen hat, wir können sogar unendlich viele Lösungen angeben, aber es ist nicht richtig, daß diese alle, oder fast alle Lösungen erschöpfen. *)

Das Ziel dieser Arbeit ist es — in Verknüpfung mit dem Ergebnis von GYÖRY und LOVÁSZ [3] und die Ergebnisse über die Approximierung reeller quadratischer algebraischer Zahlen von S. LANG [5] benutzend — die Größenordnung der Lösungsanzahl der Normform Gleichungen mit drei Unbekannten zu bestimmen wenn K ein nicht reeller K -Körper ist und M ausgeartet ist. Genauer zeigen wir den folgenden Satz:

Satz. Seien $1, \alpha_2, \alpha_3$ solche linear unabhängige algebraische Zahlen über R , für die $K=R(\alpha_2, \alpha_3)$ ein nicht reeller K -Körper und $M=\{1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ausgeartet ist. Dann gibt es eine nur von M abhängende Konstante A , daß wenn $a > A$ ist und wenn wir mit $P(N)$ bezeichnen die Anzahl solcher Lösungen der Ungleichung

$$(2) \quad |N_{K/R}(x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)| \leq a \quad a \in R$$

für die die Bedingung $\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq N$ gilt, solche nur von M und a abhängende Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, daß

$$c_1 \log N \leq P(N) \leq c_2 \log N$$

erfüllt ist.

2. Beweis des Satzes

Zum Beweis des Satzes brauchen wir die folgenden Lemmas.

Lemma 1. (S. LANG [5].) Sei α eine reelle quadratische Zahl und c eine solche natürliche Zahl, daß die Ungleichung

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{c}{q}$$

unendlich viele ganze rationale Lösungen q und p hat, wo $q > 0$. Bezeichne weiter $\lambda(N)$ die Lösungsanzahl dieser Ungleichung im Falle $q \leq N$. Dann existieren Konstanten $c'_1, c'' > 0$, sodaß für alle N die Ungleichung

$$|\lambda(N) - c'_1 \log N| \leq c''$$

richtig ist. Mit anderen Worten

$$\lambda(N) = c'_1 \log N + O(1)$$

BEWEIS. Siehe [5], Seite 80.

Wir bemerken, daß S. Lang in [5] den obigen Satz mit der Untersuchung der Lösungsanzahl der vollständigen zerlegbaren Formen mit zwei Unbekannten bewies. Da die in [5] vorkommenden Lemmas (wegen gewissen Nebenbedingungen) nicht mit den jetzt folgenden Lemmas 2. und 3. identisch sind, beweisen wir zur Vollständigkeit auch Lemma 2. und 3.

*) Zusatz bei der Korrektur: Neuerdings bewies W. M. SCHMIDT (*Annals of Math.* **96** (1972), 526—551.) allgemein, daß die Lösungen von (1), unabhängig von der Struktur M , zu endlich vielen Lösungsfamilien gehören.

Lemma 2. Sei $d > 1$ eine quadratfreie ganze Zahl, $K = \mathbb{R}(\sqrt{d})$ und $1, \omega$ die Ganzheitsbasis von K , wo $\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{wenn } d \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{\sqrt{d}+1}{2} & \text{wenn } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$ Sei weiter f eine natürliche Zahl. Dann existieren Konstanten $c_3, c_4 > 0$ sodaß die Anzahl $R(N)$ der Lösungen (x, y) der Gleichung

$$(3) \quad |N_{K/\mathbb{R}}(x + f\omega y)| = 1$$

welchen der Bedingung $\max(|x|, |y|) \leq N$ genügt

$$c_3 \log N \leq R(N) \leq c_4 \log N$$

gilt.

BEWEIS. Zuerst beweisen wir die Abschätzung nach oben. Wir können annehmen, daß $x, y > 0$, denn wenn für eine Lösung (x, y) , $y < 0$ wäre dann ist $(-x, -y)$ auch eine Lösung von (3), weil

$$|N_{K/\mathbb{R}}(-x - f\omega y)| = |N_{K/\mathbb{R}}(-(x + f\omega y))| = |N_{K/\mathbb{R}}(-1)| = 1.$$

Weiter können wir zu jeder Lösung $y > 0$ höchstens 2 Lösungen geben, nämlich bei festem y ist (3) eine quadratische Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten in x , die höchstens zwei Lösungen hat. Von diesen ist eine nicht negativ, weil bei festem y (3) die Gestalt

$$x^2 + xy \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{R}}(f\omega) + y^2 N_{K/\mathbb{R}}(f\omega) \pm 1 = 0$$

hat. Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_{1,2} = \frac{-y \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{R}}(f\omega) \pm \sqrt{y^2 \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{R}}^2(f\omega) - 4(y^2 N_{K/\mathbb{R}}(f\omega) \pm 1)}}{2}$$

und weil

$$N_{K/\mathbb{R}}(f\omega) = \begin{cases} -df^2 & \text{wenn } d \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1-d}{4}f^2 & \text{wenn } d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

ist die Zahl unter der Wurzel mindestens $(y \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{R}}(f\omega))^2$.

Sei also (x, y) eine nicht negative Lösung von (3). Dann

$$(4) \quad |yf\omega^{(2)} + x| = \frac{1}{|yf\omega^{(1)} + x|} < \frac{1}{y}$$

denn wegen $\omega^{(1)} > 1$ ist $|yf\omega^{(1)} + x| = yf\omega^{(1)} + x > y$. Darum gilt (4) für alle nicht negativen Lösungen von (3). Weil $f\omega$ eine reelle quadratische algebraische Zahl ist, hat (4) nach dem Approximationssatz von Dirichlet unendlich viele ganzrationale Lösungen (x, y) .

Also sind die Bedingungen von Lemma 1. erfüllt und für die Lösungsanzahl $\lambda(N)$ von (4) gilt bei der Bedingung $1 \leq y \leq N$

$$R(N) \leq 4\lambda(N) = 4c'_1 \log N + O(1) \leq c_4 \log N$$

Danach beweisen wir die Abschätzung nach unten. Sei (x, y) die Lösung der Ungleichung $|yf\omega^{(2)} + x| < \frac{1}{y}$ und nehmen wir an, daß $|y| < \frac{1}{4f} \sqrt{\frac{N}{d+1}}$. Dann ist auf Grund von Lemma 1. die Anzahl dieser Lösungen

$$2\lambda \left(\frac{1}{4f} \sqrt{\frac{N}{d+1}} \right) = 2c'_1 \log \frac{1}{4f} \sqrt{\frac{N}{d+1}} + O(1).$$

Wegen $|x| \leq |-yf\omega^{(2)}| + |yf\omega^{(2)} + x|$ ist weiter $|x| \leq \frac{1}{2} \sqrt{N}$ und

$$|N_{K/R}(x + f\omega y)| = |x + f\omega^{(1)}y| |x + f\omega^{(2)}y| < \left| \frac{x}{y} + f\omega^{(1)} \right|.$$

Wenn $\omega = \sqrt{d}$, dann $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} + 2\sqrt{d}$, also

$$\left| \frac{x}{y} + f\omega^{(1)} \right| \leq \left| \frac{x}{y} + f\omega^{(2)} \right| + 2\sqrt{d}f < 1 + 2f\sqrt{d}.$$

Wenn aber $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, dann $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} + \sqrt{d}$ und

$$\left| \frac{x}{y} + f\omega^{(1)} \right| \leq 1 + f\sqrt{d} < 1 + 2f\sqrt{d},$$

also in beiden Fällen

$$|N_{K/R}(x + f\omega y)| < 1 + 2f\sqrt{d}$$

das heißt (x, y) ist eine Lösung der Gleichung

$$(5) \quad |N_{K/R}(x + f\omega y)| = t$$

für irgendein $|t| < 1 + 2f\sqrt{d}$. Durch das Schachtelungsprinzip muß es solche $|t_0| < 1 + 2f\sqrt{d}$ geben für welche die Lösungsanzahl der Gleichung (5) mindestens $2\lambda \left(\frac{1}{4f} \sqrt{\frac{N}{d+1}} \right) / [2(1 + 2f\sqrt{d})]$ ist (wo $t_0 \neq 0$).

Jetzt betrachten wir für diese t_0 die Menge H_{t_0} der Lösungen der Gleichung (5). Zwei Elemente (x_1, y_1) und (x_2, y_2) von H_{t_0} nennen wir äquivalent wenn $x_1 \equiv x_2 \pmod{|t_0|}$ und $y_1 \equiv y_2 \pmod{|t_0|}$.

Die Anzahl der Äquivalenzklassen, die durch die obige Äquivalenzrelation induziert sind, ist t_0^2 . Noch einmal gibt es auf Grund des Schachtelungsprinzips eine Klasse O , daß die Anzahl ihrer Elemente $|O| \equiv |H_{t_0}|/t_0^2$ ist.

Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in O$ und

$$x' = \frac{x_1 x_2 + \text{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_1 + N_{K/R}(f\omega) y_1 y_2}{|t_0|}, \quad y' = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{|t_0|}.$$

x' und y' sind ganzrationale Zahlen, weil z. B.

$$x_1 x_2 \equiv x_2^2 \pmod{|t_0|}$$

$$\mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_1 \equiv \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_2 \pmod{|t_0|}$$

$$N_{K/R}(f\omega) y_1 y_2 \equiv N_{K/R}(f\omega) y_2^2 \pmod{|t_0|}$$

also

$$|t_0| x' \equiv x_2^2 + \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_2 + N_{K/R}(f\omega) y_2^2 \equiv N_{K/R}(x_2 + f\omega y_2) \equiv t_0 \equiv 0 \pmod{|t_0|}$$

und durch einfaches Rechnen kann man sehen, daß sie Lösungen von (3) sind. Weiter ist wegen

$$|x_i| \leq \frac{1}{2} \sqrt{N} \quad (i = 1, 2)$$

$$|x'| \leq N, \quad \text{und} \quad |y'| \leq N.$$

Sei $(x_3, y_3) \in O$ und

$$x'' = \frac{x_1 x_3 + \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_3 y_1 + N_{K/R}(f\omega) y_1 y_3}{|t_0|}, \quad y'' = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{|t_0|}$$

Wir zeigen, daß wenn

$$(6) \quad x' = x'' \quad \text{und} \quad y' = y'',$$

so $x_2 = x_3$ und $y_2 = y_3$, das heißt, die Lösungsanzahl der Gleichung (3) ist mindestens $|O|$.

In der Tat, wenn (6) erfüllt ist, dann

$$\begin{aligned} [x_1 + y_1 \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega)](x_2 - x_3) + y_1 N_{K/R}(f\omega)(y_2 - y_3) &= 0 \\ -y_1(x_2 - x_3) + x_1(y_2 - y_3) &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante dieses homogenen linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) & y_1 N_{K/R}(f\omega) \\ -y_1 & x_1 \end{vmatrix} = N_{K/R}(x_1 + f\omega y_1) = t_0 \neq 0$$

also $x_2 = x_3$ und $y_2 = y_3$.

Das Vorhergehende zusammengefaßt erhalten wir

$$R(N) \equiv |O| \equiv \frac{2}{2t_0^2(1+2f\sqrt{d})} \lambda \left(\frac{1}{4f} \sqrt{\frac{N}{d+1}} \right) \equiv \frac{c'_1}{2(1+2f\sqrt{d})^3} \log N + O(1).$$

Lemma 3. Seien α_1, α_2 solche reelle linear unabhängige algebraische Zahlen, für die $K = R(\alpha_1, \alpha_2)$ ein, über R quadratischer Körper ist. Hat die Gleichung

$$(7) \quad N_{K/R}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = a \quad a \in R$$

eine ganze Lösung (x_1, x_2) , so gibt es solche nur von M und a abhängende Konstan-

ten $c_5, c_6 > 0$ für die die Anzahl $P_2(N)$ der Lösungen von (7) welche die Bedingungen $\max(|x_1|, |x_2|) \leq N$ erfüllen

$$c_5 \log N \leq P_2(N) \leq c_6 \log N$$

gilt.

BEWEIS. Da K ein quadratischer reeller Körper ist, gibt es eine quadratfreie ganzrationale Zahl $0 < d$, sodaß $R(\alpha_1, \alpha_2) = R(\sqrt{d})$. Wir nehmen an, daß $d \not\equiv 1 \pmod{4}$, weil im gegenteiligen Fall der Beweis ähnlich ist.

Dann ist $1, \sqrt{d}$ eine Ganzheitsbasis von K . Wir nehmen weiter an, daß α_1, α_2 ganz in K sind, weil wir dies leicht erreichen können. Da der Modul $M = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ vollständig ist, gibt es nur endlich viele nicht assoziierte Elemente mit der Norm a (und solche Systeme einander nicht assoziierter Elemente können wir effektiv bestimmen). Seien diese $\beta_i = k_i + f\sqrt{d}l_i$ ($i=1, \dots, r$ und k_i, l_i ganzrational).

Bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_M$ den Multiplikatorenring M , so können wir alle Lösungen der Gleichung (7) mit der Gestalt

$$(8) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \varepsilon \beta_i$$

erzeugen mit irgendwelchen $1 \leq i \leq r$, wo $\varepsilon \in \mathcal{D}_M$ eine beliebige Einheit ist [2]. Aber wegen dem Einheitsensatz Dirichlets sind der Rang der Einheitengruppe $\mathcal{D}_M$ und K gleich und so ist in diesem Fall die Einheitengruppe $\mathcal{D}_M \{\pm \varepsilon^n\}$ mit irgendeinem ganzen $n \geq 1$, wo $\varepsilon > 1$ Grundeinheit von K ist. Jetzt mit $\mathcal{D}$ den Ring der ganzen Zahlen von K bezeichnend und mit f den Index $\{\mathcal{D} : \mathcal{D}_M\}$, ist $1, f\omega$ (Siehe [2], S. 178) eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{D}_M$, wobei in diesem Fall $\omega = \sqrt{d}$ ist (im Fall $d \equiv 1 \pmod{4}$) ist $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$), und so sind sämtliche Einheiten von $\mathcal{D}_M$ der Gestalt $\varepsilon^k = x + yf\omega$ und

$|x|, |y| \leq N$, die Lösungen (3). Dann fällt wegen Lemma 2. die Anzahl dieser Einheiten zwischen zwei konstante Produkte von $\log N$.

Sei $\alpha_j = a_j + f\sqrt{d}b_j$ ($j=1, 2$), $\varepsilon = x + \sqrt{d}fy$ (a_j, b_j, x, y ganz). Dann ist zur Erfüllung von (8) notwendig, daß das Gleichungssystem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = k_i x + l_i d f^2 y$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = l_i x + k_i y$$

erfüllt ist. Aber dieses können wir wegen des obengesagten sowohl für x_1, x_2 , als auch für x, y , bei irgendeinem i , als auch für Unbekannten im Ring der ganzrationalen Zahlen lösen.

Andererseits wenn $\max(|x|, |y|) \leq Nd'$, dann $\max(|x_1|, |x_2|) \leq N$ und umgekehrt, wenn $\max(|x_1|, |x_2|) \leq N$ dann ist $\max(|x|, |y|) \leq Nd''$, wo d' und d'' unabhängig von N sind. Aber dann ist mit der Benutzung von Lemma 2.

$$c_5 \log N \leq c_7 \log Nd' \leq P_2(N) \leq c_8 \log Nd'' \leq c_8 \log N.$$

Zunächst brauchen wir noch ein Lemma.

Lemma 4. (K. GYÖRÝ—L. LOVÁSZ [3].) Wenn K ein nicht reeller K -Körper ist und $\alpha \in K$, so $\operatorname{Re} \alpha, i \operatorname{Im} \alpha \in K$ und

$$|N_{K/R}(\operatorname{Re} \alpha)|, |N_{K/R}(i \operatorname{Im} \alpha)| \leq |N_{K/R}(\alpha)|$$

BEWEIS. Siehe [3] (Siehe auch [4]).

BEWEIS DES SATZES. Wir können annehmen, daß $i \operatorname{Im} \alpha_2$, $i \operatorname{Im} \alpha_3$ nicht 0 und linear unabhängig sind.

Weil wenn $\alpha_2 = \beta_2 + i\beta'_2$, $\alpha_3 = \beta_3 + i\beta'_3$ ($\beta'_3 \neq 0$) und entweder $\beta'_2 = 0$ oder $\beta'_2 = r\beta'_3$ ($r \in R$) und $\beta'_2 \neq 0$ wenden wir auf den Modul M die Ähnlichkeitstransformation $\bar{\alpha}_3 M$ (d.h. die Gleichung (2) multiplizieren wir mit $|N_{K/R}(\bar{\alpha}_3)|$). Für Generatoren $\bar{\alpha}_3 M$ ist die Bedingung schon erfüllt.

Sei nämlich $\bar{\alpha}_3 M = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$, wo

$$\alpha'_1 = \alpha_3 \bar{\alpha}_3$$

$$\alpha'_2 = \bar{\alpha}_3 = \beta_3 - i\beta'_3$$

$$\alpha'_3 = \alpha_2 \bar{\alpha}_3 = \beta_2 \beta_3 + \beta'_2 \beta'_3 + i(\beta'_2 \beta_3 - \beta_2 \beta'_3).$$

Wenn $\beta'_2 = 0$, dann $\operatorname{Im} \alpha'_2 = -\beta'_3$ und $\operatorname{Im} \alpha'_3 = -\beta_2 \beta'_3$ und weil $\beta_2 \notin R$ (anderfalls sind 1, α_2 , α_3 linear abhängig) sind die obigen Bedingungen erfüllt.

Wenn aber $\beta'_2 = r\beta'_3$ dann $\operatorname{Im} \alpha'_2 = -\beta'_3$ und $\operatorname{Im} \alpha'_3 = \beta'_3(r\beta_3 - \beta_2)$. Weil $\beta'_3 \neq 0$ so $\operatorname{Im} \alpha'_2 \neq 0$. $\operatorname{Im} \alpha'_3 = 0$ kann nur sein wenn $r\beta_3 - \beta_2 = 0$. Dann folgt aber wegen der Bedingung, daß $\alpha_2 = r\alpha_3$, was ein Widerspruch ist. $\operatorname{Im} \alpha'_2$ und $\operatorname{Im} \alpha'_3$ kann auch nicht linear abhängig sein, weil wenn sie es wären, dann $\beta'_3(r\beta_3 - \beta_2) = -s\beta'_3$ ($s \in R$), d.h. $\beta'_3(r\beta_3 - \beta_2 + s) = 0$. Aus diesem folgt, daß $r\alpha_3 - \alpha_2 + s = 0$, was wieder ein Widerspruch ist.

Weiter $i \operatorname{Im} \alpha_j = \frac{\alpha_j - \bar{\alpha}_j}{2}$ ($j=1, 2$), darum wenn wir (2) mit einer geeigneten ganzen rationalen Zahl multiplizieren können erreichen, daß $i \operatorname{Im} \alpha_2$, $i \operatorname{Im} \alpha_3$ ganz seien, was wir im Weiteren annehmen.

Nun beweisen wir die Abschätzung nach oben. Auf Grund von Lemma 4. ist für sämtliche $x = (x_1, x_2, x_3)$ Lösungen von (2), daß $|N_{K/R}(i \operatorname{Im} \alpha_2 x_2 + i \operatorname{Im} \alpha_3 x_3)| \leq |a|$ erfüllt. Weil auf der linken Seite eine ganzrationale Zahl steht, hat die Gleichung

$$(9) \quad N_{K/R}(i \operatorname{Im} \alpha_2 x_2 + i \operatorname{Im} \alpha_3 x_3) = a'$$

mindestens für ein $a' \in Z$, wo $|a'| \leq |a|$, unendlich viele Lösungen. Gäbe es nämlich für jede ganze rationale Zahl $|a'| \leq |a|$ nur endlich viele Lösungen, dann wäre auch die Zahl der Lösungen von (2) endlich, da zu jedem festen x_2, x_3 endlich viele (höchstens $[K:R]=n$) x_1 existieren.

Also ist der Modul $M' = \{i \operatorname{Im} \alpha_2, i \operatorname{Im} \alpha_3\}$ wegen Satz von Thue [7] (Siehe noch [1] oder [6]) voll, quadratisch oder ähnlich zu einem solchen. Also gibt es auf Grund von Lemma 3. eine Konstante c_9 , daß bei der Bedingung $\max(|x_2|, |x_3|) \leq N$ die Lösungsanzahl von (9) $\leq c_9 \log N$ ist. Wegen des Vorangehenden gehören zu jedem x_2, x_3 höchstens n x_1 und es gibt höchstens $2|a|$ Gleichung der Gestalt (9), also

$$P(N) \leq 2n|a|c_9 \log N = c_2 \log N$$

Endlich beweisen wir die Abschätzung nach unten. Multiplizieren wir beide Seite von (2) mit einer ganzen rationalen Zahl so können wir erreichen, daß $\alpha_2 m = \alpha'_2$ und $\alpha_3 m = \alpha'_3$ ganz sind, so wir mit den Bezeichnungen $\alpha'_1 = m$ und $a' = am^{[K:R]}$ (2) in der Gestalt $|N_{K/R}(\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3)| \leq a'$ schreiben können.

Sei $\{\alpha, \beta\}$ Teilraum des durch den Modul $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$ erzeugten Vektorraumes

über R , der zu einem reellen quadratischen Teilkörper ähnlich ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$\alpha = c_{11}\alpha'_1 + c_{21}\alpha'_2 + c_{31}\alpha'_3, \quad \beta = c_{12}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 + c_{32}\alpha'_3; \quad c_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Seien c_{13}, c_{23}, c_{33} solche ganze rationale Zahlen, daß

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

und betrachten wir die Transformation

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3$$

$$x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3$$

$$x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3$$

wo

$$|x_k| \leq c \max_{1 \leq i \leq 3} (|y_i|) \quad \text{und} \quad c = 3 \max_{1 \leq i, k \leq 3} (|c_{ik}|).$$

Angenommen, daß $R(\alpha, \beta) = K'$ quadratisch ist, so gibt es ein $0 \neq a'' \in \mathbb{Z}$ für welches die Gleichung

$$(10) \quad N_{K'/R}(\alpha y_1 + \beta y_2) = a''$$

eine Lösung $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ hat. Dann hat sie unendlich viele Lösungen.

Bezeichne a'' die kleinste solche Zahl im absoluten Betrag. Die Anzahl der Lösungen von (10), für welche $\max_{1 \leq i \leq 3} (|y_i|) \leq \frac{N}{c}$ ist, ist $\geq c_1 \log N$ auf dem Grund von Lemma 3. Jetzt sind sämtliche Lösungen y_1, y_2 von (10) auch Lösungen der Gleichung

$$a''^{[K:K']} = N_{K/R}(\alpha y_1 + \beta y_2) = N_{K/R}(\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3)$$

bei $y_3=0$. Zu allen Lösungen $(y_1, y_2, 0)$ gehört eine solche Lösung $x=(x_1, x_2, x_3)$ der nächsten Gleichung, welche die Bedingung $\max_{1 \leq i \leq 3} (|x_i|) \leq N$ erfüllt. Wenn also $A \geq |a'|^{[K:K']/m^{[K:R]}}$, so hat die Ungleichung (2) für alle $a \geq A$ mindestens $c_1 \log N$ Lösungen.

Literatur

- [1] A. BAKER, Contributions to the theory of diophantine equations, I, II, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A.* **263** (1968), 173—208.
- [2] Ш. И. БОРЕВИЧ—И. Р. ШАФАРЕВИЧ, Теория чисел, Издательство „Наука“, Москва, 1964.
- [3] K. GYÖRY—L. LOVÁSZ, Representation of integers by norm-forms II., *Publ. Math. (Debrecen)*, **17** (1970), 173—181.
- [4] K. GYÖRY, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes, I., *Publ. Math. (Debrecen)*, **18** (1971), 289—307.
- [5] С. ЛЕНГ, Введение в теорию диофантовых приближений, Издательство „Мир“, Москва, 1970.
- [6] W. M. SCHMIDT, Linearformen mit algebraischen Koeffizienten, II., *Math. Ann.* **191** (1971), 1—20.
- [7] A. THUE, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine. Angew. Math.* **135** (1909), 284—305.

(Eingegangen am 30. Juni 1972.)