

Eine Bemerkung zum Hilbert—Kamke-Problem

S. TURJÁNYI (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60-sten Geburtstag mit Verehrung gewidmet

1. Einleitung

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Nach dem Satz von Waring—Hilbert [3] existiert ein nur von n abhängendes $s=s(n)$ derart, daß die Gleichung

$$x_1^n + \dots + x_s^n = N$$

für jede natürliche Zahl N in rationalen ganzen Zahlen lösbar ist, d. h. die Folge $\{0, 1^n; 2^n; \dots\}$ ist eine Basisfolge der natürlichen Zahlen. In diesem Zusammenhang hat E. KAMKE das folgende Problem aufgeworfen: welchen Bedingungen muß eine streng wachsende Folge $A=\{0; 1; a_3; a_4; \dots\}$ von ganzen Zahlen genügen damit die Folge $A^n=\{0; 1; a_3^n; a_4^n; \dots\}$ eine Basisfolge ist.

Bis jetzt ist es nicht gelungen, eine allgemeine Antwort zu geben. Gegenwärtig sind zwei diesbezügliche Ergebnisse bekannt. L. K. HUA bewies in [2], daß die Folge der n -ten Potenzen der Primzahlen eine Basisfolge ist. G. J. RIEGER zeigte in [6], daß A^n eine Basisfolge ist, falls die Snirelman-Dichte von A positiv ist.

Als eine Verallgemeinerung des Waring-Problems kann das sogenannte Hilbert—Kamke-Problem aufgefaßt werden, d. h. die Frage der Lösbarkeit des diophantischen Gleichungssystems

$$(1) \quad \begin{cases} x_1^n + x_2^n + \dots + x_s^n &= N_n \\ x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_s^{n-1} &= N_{n-1} \\ \vdots & \\ x_1 + x_2 + \dots + x_s &= N_1 \end{cases}$$

in rationalen ganzen Zahlen $x_i \geq 0$. Zur Lösbarkeit von (1) ist es notwendig, daß dieses System in nichtnegativen reellen Zahlen lösbar sei, was zwischen den N_k gewisse Größenordnungsbeziehungen bedingt. Nehmen wir an, daß reelle Zahlen $l_k > 1$ und $0 < i_k < 1$ ($1 \leq k \leq n-1$) derart existieren, daß

$$(2) \quad l_k N_n^{k/n} \leq N_k \leq i_k s^{1-k/n} N_n^{k/n} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

gilt. K. K. MARDŽANIŠVILI zeigte in [5], daß zur Lösbarkeit von (1) die Bedingungen

$$(3) \quad \begin{vmatrix} N_n & (n-1)^n & \dots & 1^n \\ N_{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots & 1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1 & (n-1) & \dots & 1 \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \dots & N_n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots & N_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & (n-1) & \dots & N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{R}$$

notwendig sind, wobei

$$R = \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \dots & 1^n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots & 1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

G. V. EMELJANOV (vgl. [1] oder [2]) entwickelte die Methode von Linnik weiter und zeigte auf elementarem Wege, daß bei den Bedingungen (2) und (3) das System (1) im Bereich der Zahlen $\{0; 1; 2; \dots\}$ lösbar ist, falls $s=s(n)$ genügend groß ist. L. K. Hua bewies in [2], daß (1) auch im Bereich der Zahlen $\{0; P_1; P_2; \dots\}$ lösbar ist, wobei p_i die i -te Primzahl bezeichnet. Das Analogon der Behauptung von Rieger ist für das Hilbert—Kamke-Problem nicht bekannt. In dieser Arbeit beweisen wir diese entsprechende Behauptung, d. h. wir zeigen den folgenden

Satz. *Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $A = \{0; 1; a_3; \dots\}$ eine streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen von positiver Dichte. Es existiert eine nur von n und A abhängige Konstante $s=s(n; A)$ derart, daß (1) eine zu A gehörige Lösung hat, falls die natürlichen Zahlen $N_1; \dots; N_n$ die Bedingungen (2) und (3) erfüllen.*

2. Bezeichnungen und vorbereitende Bemerkungen

Wir bezeichnen mit $\{\bar{M}\}$ die Menge der Vektoren mit nichtnegativen rationalen ganzen Koordinaten von E^n . Bezeichne weiter $\{\bar{N}\}$ die Menge derjenigen Vektoren $\bar{N} = (N_1; N_2; \dots; N_n)$ von $\{\bar{M}\}$ für deren Koordinaten $N_1; N_2; \dots; N_n$ (2) und (3) erfüllt sind. Falls $\bar{a}; \bar{b} \in \{\bar{M}\}$ und falls für alle Koordinaten von $\bar{a}; \bar{b}$ die Beziehung $a_k \leq b_k$ ($1 \leq k \leq n$) gilt, so wollen wir die Bezeichnung $\bar{a} \leq \bar{b}$ einführen und sagen, daß $\bar{a}$ durch $\bar{b}$ beschränkt ist (s. [2]).

Wenn $\{A\} \subseteq \{B\} \subseteq \{M\}$ so verstehen wir unter der Dichte der Vektorfolge $\{\bar{A}\}$ in bezug auf $\{B\}$ die Zahl.

$$D_{(B)}\{A\} = \inf \frac{r_{\bar{m}}\{A\}}{r_{\bar{m}}\{B\}},$$

wobei $\bar{m}$ alle Vektoren von $\{B\}$ durchläuft, während $r_{\bar{m}}\{A\}$ bzw. $r_{\bar{m}}\{B\}$ die Anzahl derjenigen Vektoren der Folge $\{A\}$ bzw. $\{B\}$ bezeichnet, die durch $\bar{m}$ beschränkt sind (s. [2], S. 55). Wenn nun $A = \{0; 1; a_3; \dots\}$ eine streng monoton wachsende Folge von rationalen ganzen Zahlen ist und $N = \{0; 1; 2; \dots\}$ sowie $\{\bar{A}^n\}$ die Folgen derjenigen Vektoren $\bar{a}_i \in \{\bar{M}\}$ sind, deren Koordinaten die Gestalt $(a_i^n; a_i^{n-1}; \dots; a_i)$ haben, dann ist die Behauptung unseres Satzes folgendermaßen formulierbar: Ist $\{\bar{A}^n\}$ eine Teilfolge positiver Dichte von $\{\bar{N}^n\}$, so ist $\{\bar{A}^n\}$ eine Basisfolge von $\{\bar{N}\}$.

3. Beweis des Satzes

Zum Beweis des Satzes brauchen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. (G. V. EMELJANOV [1], oder [2].) Sei $\bar{m} \in \bar{N}$; $\bar{m}; \bar{N} \in \{\bar{N}\}$. Betrachten wir die Menge der Vektoren der Gestalt

$$(4) \quad \bar{N} = (N_1; N_2; \dots; N_n); \quad \{F(x)\} = \{(f_n(x); f_{n-1}(x); \dots; f_1(x))\}$$

wo

$$f_j(x) = a_{0j}x^j + a_{1j}x^{j-1} + \dots + a_{jj} \in Z[x],$$

und $a_{0j} \neq 0$ nur von j abhängt, x alle nicht negativen rationalen ganzen Zahlen durchläuft und

$$(5) \quad a_{ij} = a_{ij}(j; N_j) \quad (i > 1); \quad |a_{ij}| < B_n p$$

gilt. Dann existieren $K = K(n)$ derart, daß die Zahl der ganzzahligen Lösungen $0 \leq x_i \leq p$ der Gleichung

$$(6) \quad \overline{F(x_1)} + \dots + \overline{F(x_K)} = \bar{m}$$

$\leq B_n \frac{p^K}{p^{n^2}}$ ist, wo B_n nur von n abhängt.

Sei nun $A = \{0; 1; a_3; \dots\}$ eine den Bedingungen des Satzes genügende Folge der Dichte $\alpha > 0$ und betrachten wir speziell die Vektorfolgen

$$(7) \quad \overline{F(a_i)} = (a_i^n, a_i^{n-1}, \dots, a_i) \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Sei $\bar{N} = (N_n; \dots; N_1) \in \{\bar{N}\}$ und wir ordnen diejenigen Elemente der Vektorfolge $\{K \cdot \overline{F(a_i)}\}$, die durch $\{N\}$ beschränkt sind, in eine Folge an. Dann kann ein so erhaltener Vektor auch das Ergebnis einer mehrfachen Darstellung sein. Nehmen wir an, daß der j -te Vektor die Multiplizität $r(j)$ hat, d.h. so oft in der Summe der betrachteten Gestalt darstellbar ist. Dann gilt der folgende

Hilfssatz 2. Bei den obigen Bezeichnungen und Bedingungen gilt

$$\sum_{j=1}^R r(j) \equiv B'_n N_n^{K/n}, \quad R = r_N\{K \cdot \overline{F(a_i)}\},$$

Wo $B'_n > 0$ eine nur von n und von α abhängige Konstante ist.

BEWEIS. Wir betrachten die Zahl derjenigen Vektoren $\overline{F(a_i)}$ der Gestalt (7), die durch den Vektor $\frac{1}{K} \bar{N}$ beschränkt sind. Die Zahl dieser ist $= \alpha c_n \left(\frac{N_n}{K}\right)^{1/K}$. Nun bilden wir mit den Vektoren $\overline{F(a_i)}$ die Vektoren $\overline{F(a_{i_1})} + \dots + \overline{F(a_{i_K})}$. Diese sind offenbar durch N beschränkt und ihre Zahl ist, zusammen mit der Multiplizität

$$= \frac{\alpha^K}{K^{K/n}} c_n^{K/n} N_n^{K/n} = B'_n N_n^{K/n}$$

wo

$$B'_n = \frac{\alpha^K c_n^K}{K^{K/n}}, \quad \text{qu.e.d.}$$

Sei nun $\{\bar{A}\} \subseteq \{\bar{B}\} \subseteq \{\bar{M}\}$ wo für die Koordinaten von

$$\bar{a} = (a_n; \dots; a_1) \in \{\bar{A}\} \quad \text{bzw.} \quad \bar{b} = (b_n; \dots; b_1) \in \{\bar{B}\}$$

die Beziehungen $a_1 \leq \dots \leq a_n$ bzw. $b_1 \leq \dots \leq b_n$ gelten.

Der folgende Hilfssatz stammt ursprünglich von SCHNIRELMANN. Die hier auftretende allgemeinere Form stammt von G. V. EMELJANOV.

Hilfssatz 3. Bei der den obigen Eigenschaften gilt für die Vektorfolgen $\{\bar{A}\}$ und $\{\bar{B}\}$

$$D_{(\bar{B})}(\{\bar{A}\} + \{\bar{A}\}) \cong 2D_{(\bar{B})}\{\bar{A}\} - D_{(\bar{B})}^2\{\bar{A}\}$$

Zum BEWEIS vgl. z. B. [2].

BEWEIS DES SATZES. Wir zeigen, daß mit der Konstanten K aus Hilfssatz 1 das K -fache der Vektorfolge mit der Gestalt (7) schon von positiver Dichte in bezug auf die Vektormenge $\{N\}$ ist. Hieraus ergibt sich nach wiederholter Anwendung von Hilfssatz 3, daß die Vektorfolge (7) für hinreichend große $s = s(n; A)$ eine Basisfolge s -ter Ordnung von $\{N\}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen jetzt den Hilfssatz 1 anwenden. Betrachten wir die Vektoren $\bar{m}; \bar{N} \in \{\bar{N}\}$ wo $\bar{m} \leq \bar{N}$; $p = N_n^{1/n}$ und $\bar{F}(x) = (x^n; \dots; x)$. Wenn wir die ganzen Zahlen $x \geq 0$ betrachten, so genügt die Vektorfolge $\{\bar{F}(x)\}$ bei obigen $\bar{m}$ und $\bar{N}$ den Bedingungen von Hilfssatz 1 bei geeignetem $K = K(n)$, und so ist die Zahl der Lösungen der Gleichung (6) $\leq B_n \frac{p^k}{p^{n^2}}$. Die so erhaltene Abschätzung ist erst recht dann richtig, wenn wir die Lösungen von (6) nur aus der Folge $A = \{0; 1; a_3; \dots\}$ nehmen d.h. wenn wir uns auf Vektoren $\bar{F}(a_i)$ von der Form (7) beschränken. Wir betrachten jetzt die schon früher gegebene Anordnung der durch $\bar{N}$ nicht beschränkten Elemente der Vektorfolge $\{K\bar{F}(a_i)\}$. Wobei wir die Zahl der Darstellungen des j -ten Vektors wieder mit $r(j)$ bezeichnen. Dann gilt gemäß der obigen Ergebnisse

$$\sum_{j=1}^R r(j) \leq B_n \frac{N_n^{K/n}}{N_n^n}, \quad R = r_N\{K\bar{F}(a_i)\},$$

woraus auf Grund von Hilfssatz 2

$$r_N\{K \cdot \bar{F}(a_i)\} \geq \frac{1}{B_n} N_n^{K/n} \sum_{j=1}^r r(j) \geq c' N_n^n$$

gilt, wo $c' > 0$ nur von n und von α abhängt.

Hieraus ergibt sich

$$\frac{r_N\{K\bar{F}(a_i)\}}{r_N\{\bar{N}\}} \geq c'_n \frac{N_n^n}{r_N\{\bar{N}\}} \geq c''_n > 0,$$

womit wir unsere Behauptung bewiesen haben.

Literatur

- [1] Г. В. Емелянов; Об одной системе диофантовых уравнений. Учен. зап. ЛГУ; **19** (1950) 3—398.
- [2] А. О. Гельфонд—Ю. Б. Линник; Элементарные методы в аналитической теории чисел, Москва, 1962
- [3] D. HILBERT, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n -ter Potenzen, *Math. Ann.* **67** (1909), 281—300.
- [4] L. K. HUA, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. *Enzykl. Math. Wiss. Bd. I₃ Leipzig*, 1958.
- [5] K. K. MARDŽANIŠVILI, Über die gleichzeitige Darstellung zweier Zahlen durch Summen ganzer $1; 2; \dots; n$ -ter Potenzen, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **1** (1937), 609—631.
- [6] G. J. RIEGER, Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems, *Math. Z.* **58** (1953), 281—283.

(Eingegangen am 17. Januar 1973.)