

Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, II.

A M. le Professeur A. Rapcsák pour son 60^e anniversaire

Par K. GYÖRY (Debrecen)

1. Introduction

Désignons par $\|f\| = \max_{0 \leq i \leq k} |a_i|$ la hauteur d'un polynôme $f(x) = a_0 x^k + \dots + a_k \in \mathbb{Z}[x]$. Appelons les polynômes $f(x)$ et $f^*(x) \in \mathbb{Z}[x]$ équivalents si l'on a $f^*(x) = f(x+a)$ avec un $a \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas pour leur discriminant on déduit $D(f^*) = D(f)$. S'il existe donc un polynôme $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de discriminant D , alors il y en a une infinité. Inversement, soit $D \geq 1$ une constante et soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire arbitraire tel que

$$(1) \quad 0 < |D(f)| \leq D \quad (a_0 = 1).$$

Dans la partie I. (voir [7]) nous avons démontré qu'il existe des constantes $c'(D)$, $c''(D)$, calculables explicitement et dépendant seulement de D , telles que $\deg f \leq c'(D)$ et $\|f^*\| \leq c''(D)$ pour un f^* équivalent à f . Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de discriminant $D \neq 0$, non équivalents deux à deux, et on peut, par un nombre fini d'opérations, déterminer un tel système des polynômes $f(x)$. Dans [6] et [7] nous avons obtenu plusieurs corollaires et applications de ce théorème, en généralisant quelques résultats antérieurs.

Dans notre travail nous donnons, entre autres, des formules explicites pour les constantes $c'(D)$ et $c''(D)$, et ainsi nous pouvons explicitement donner aussi les constantes qui se trouvent dans les corollaires de notre théorème. Les constantes obtenues ici sont meilleures que celles que l'on obtiendrait dans [7] au cours de leurs calculs effectifs. Nous déterminons la meilleure valeur possible de c' aussi dans le cas où $f(x)$ n'est pas nécessairement unitaire, d'où s'obtient une application aussi pour des formes binaires. Avec nos théorèmes nous généralisons de certains résultats de D. HILBERT [10] et de T. NAGELL [13], [14], [15].

2. Théorèmes

Si $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est irréductible et s'il satisfait à (1), de l'inégalité de Minkowski, concernant les discriminants des corps algébriques, on peut aisément déduire l'estimation $c'(D) \leq c \log D$ avec une constante absolue c calculable explicitement. Dans la suite nous donnons d'abord la meilleure valeur possible de la constante $c'(D)$

aussi pour des polynômes $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ non nécessairement irréductibles et, en même temps, nous généralisons l'un des théorèmes de HILBERT [10].

Théorème 1. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme tel que $D(f) \neq 0$.

a) On a

$$(2) \quad \deg f \leq 3 + \frac{2}{\log 3} \log |D(f)|.$$

Dans (2) l'égalité a lieu si et seulement si l'on a

$$f = (a_0x - b_0)(a_1x - b_1)((a_0 + a_1)x - (b_0 + b_1)) = P(x),$$

ou

$$f = P(x)[(a_0x - b_0)^2 + (a_0x - b_0)(a_1x - b_1) + (a_1x - b_1)^2],$$

où $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{Z}$, $a_0a_1(a_0 + a_1) \neq 0$ et $a_0b_1 - b_0a_1 = \pm 1$.

b) Si $f(x)$ n'a pas de racines rationnelles, alors on a

$$(3) \quad \deg f \leq \frac{2}{\log 3} \log |D(f)|$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $\deg f = 2$ et $D(f) = -3$.

c) Si $f(x)$ est unitaire*), alors

$$(4) \quad \deg f \leq 2 \left(1 + \frac{\log |D(f)|}{\log 3} \right),$$

l'égalité n'étant vraie que si $f(x)$ est équivalent à $x(x-1)$ ou $x(x-1)(x^2-x+1)$.

Remarque 1.1. Dans [10] Hilbert a déterminé tous les polynômes $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de discriminant $D(f) = \pm 1$. Ce théorème de Hilbert résulte de notre théorème de manière évidente.

Remarque 1.2. Comme nous le prouverons au cours de la démonstration, si $f(x)$ est irréductible sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, (3) peut être remplacé par $\deg f < \log |D(f)|$, sauf les cas où $\deg f = 2$ et $D(f) = -3, -4, -7$ ou 5 .

Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $D(f) \neq 0$. Soit $f(x) = f_1(x) \dots f_r(x) f^*(x)$ ($r \geq 0$) une décomposition de $f(x)$ dans $\mathbb{Z}[x]$, telle que les f_i soient irréductibles sur $\mathbb{Q}$ et de degré $k_i \geq 2$, et toutes les racines de $f^*(x)$ soient rationnelles et $0 \leq \deg f^* = k^* \equiv m \pmod{3}$ ($0 \leq m < 3$). Désignons par $2t$ le nombre des racines non réelles de $f(x)$. (9), (10), (11) et (12) implique immédiatement l'inégalité suivante concernant $D(f)$:

Proposition. Avec les notations précédentes on a

$$|D(f)| \geq 2^{\frac{(k^*+m-3)(k^*-m)}{3}} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2t} \prod_{i=1}^r \left(\frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \right)^2.$$

Dans le cas où $r=0$, il faut remplacer le troisième facteur par 1.

Considérons ensuite un corollaire de notre théorème 1 qui concerne les formes binaires. Appelons les formes $F(x, y)$ et $F^*(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ unimodulairement équivalentes si l'on a $F^*(x, y) = F(ax+by, cx+dy)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $ad-bc = \pm 1$.

*) Un polynôme est dit unitaire (dans [6], [7] normé) si son coefficient dominant est égal à 1.

Pour leurs discriminants on obtient $D(F^*) = D(F)$. CH. HERMITE [9] a démontré qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes binaires, non équivalentes deux à deux, de discriminant donné et de degré $n \leq 3$ dans $\mathbb{Z}[x, y]^1$. Récemment, B. J. BIRCH et J. R. MERRIMAN [4] ont démontré ce théorème pour tout n fixé dans une forme plus générale (dans une forme p -adique et pour des corps algébriques arbitraires). Si nous nous bornons aux formes de $\mathbb{Z}[x, y]$, d'après le théorème de Birch et Merri-man et d'après notre théorème 1, le théorème cité reste vrai aussi sans fixer les degrés des formes. En effet, dans toutes les classes d'équivalence il y a une forme $F(x, y)$ telle que $F(1, 0) \neq 0$. Dans ce cas, d'après $F(x, 1) = f(x)$, $\deg F = \deg f$ et $D(F) = D(f)$, de (2) on déduit $\deg F \leq 3 + 2 \cdot (\log 3)^{-1} \cdot \log |D(F)|$.²⁾ Donc, il en résulte ce qui suit:

Corollaire 1. *Il n'existe qu'un nombre fini de formes $F(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ non équivalentes deux à deux, de discriminant donné $D(F) = D \neq 0$.*

La valeur absolue du discriminant $D(f)$ d'un polynôme unitaire $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ peut être arbitrairement grand par rapport à son degré k . Par conséquent, si $|D(f)|/k$ est relativement grand, l'estimation suivante est meilleure que celle qui se trouve dans notre théorème 3 (et qui ne dépend que de D).

Théorème 2. *Soit $D \geq 2$ une constante et soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire de degré $k \geq 3$ et de discriminant $0 < |D(f)| \leq D$. Alors, pour un polynôme f^* équivalent à f on a*

$$(5) \quad \|f^*\| \leq \exp \{[(3k)^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\}$$

avec $n = 6 \binom{k}{3}$ et où, en supposant que $f(x)$ est réductible sur $\mathbb{Q}$ et $k \geq 4$, on peut prendre $n = 6 \binom{k-1}{3}$.³⁾

Par conséquent, d'après nos théorèmes 1- et 2, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de discriminant donné $D \neq 0$ et non équivalents deux à deux, et on peut, par un nombre fini d'opérations, déterminer un tel système des polynômes $f(x)$.

Remarque 2.1. Si $\deg f = k = 2$, on a $\|f^*\| \leq D^2 + 1$ pour un f^* équivalent à f (voir la démonstration).

Remarque 2.2. Soient donnés deux polynômes $f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ et $f^*(x) = x^k + a'_1 x^{k-1} + \dots + a'_k$. Pour qu'ils soient équivalents il faut et il suffit qu'on ait $a_1 \equiv a'_1 \pmod{k}$ et que, en prenant $a'_1 = ka + a_1$, on ait $f^*(x) = f(x+a)$. Donc, on peut aisément reconnaître si ceux-ci sont équivalents ou non.

¹⁾ Hermite (Oeuvres, Tome I, pp. 84—93; 164—192, Gauthier-Villars, Paris, 1905) a démontré ce théorème pour chaque $n \geq 4$ fixé avec une notion de discriminant différente, avec un déterminant convenablement choisi au lieu du discriminant.

²⁾ Nous avons obtenu le corollaire 1 originellement dans cette forme. A la fin de mai 1973 M. le Professeur A. SCHINZEL a bien voulu appeler mon attention sur le travail [4].

³⁾ Voir la note à la fin de ce travail.

Remarque 2.3. A l'aide d'un analogue p-adique du lemme 2 (voir [5] et [18]) on peut formuler et démontrer notre théorème 2 dans une forme p-adique. Il fera l'objet d'une publication ultérieure.

Ensuite nous donnons une formule explicite pour $c''(D)$.

Théorème 3. Soit $D \geq 3$ une constante et soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel que $0 < |D(f)| \leq D$. Alors, pour un polynôme f^* équivalent à f on a

$$(6) \quad \|f^*\| \leq \exp \exp \{4(\log D)^{13}\}$$

et, si $f(x)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, on obtient

$$(6') \quad \|f^*\| \leq \exp \exp \{2(\log D)^{13}\}.$$

Nous remarquons que du corollaire 1 (c'est-à-dire du théorème cité de Birch et Merriman et de notre théorème 1) on peut déduire le théorème 3 sans calculabilité effective des constantes de (6) et (6').

Considérons ensuite les corollaires de nos théorèmes (qui se trouvent déjà aussi dans [7] avec des constantes calculables explicitement), avec des constantes explicites.

Dans la suite soient $c_1 = c_1(D) = 2\left(1 + \frac{\log D}{\log 3}\right)$ et $c_2 = c_2(D) = \exp \exp \{4(\log D)^{13}\}$.

Corollaire 2. Soient donnés les nombres $D \geq 3$ et $N \geq 1$ et soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel que $0 < |D(f)| \leq D$ et $|f(0)| \leq N$. Alors on a

$$(7) \quad \|f\| \leq c_2 \{\max(c_1 c_2 + 1, N)\}^{c_1}.$$

Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tels que $0 < |D(f)| \leq D$ et $|f(0)| \leq N$, et on peut déterminer tous ces polynômes. Ce corollaire reste vrai aussi dans le cas où nous fixons un autre coefficient des polynômes $f(x)$ au lieu de $f(0)$ (naturellement, dans ce cas, il faut prendre autres constantes dans (7)). Cette proposition est une généralisation effective des théorèmes analogues de T. NAGELL [13], [15] qui concernent les polynômes unitaires à coefficients entiers de degré ≤ 4 , et les nombres algébriques entiers de degré ≤ 4 . Spécialement, de notre corollaire résulte que le nombre des unités de même discriminant est fini dans l'anneau des nombres algébriques entiers, et elles peuvent être effectivement déterminées.*)

Soit désigné par

$$\Delta(f) = \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|$$

la distance minimale entre les racines d'un polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)$. Si $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme unitaire, alors $|D(f)| \geq \Delta(f)$. Inversement, on obtient la proposition suivante:

Corollaire 3. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire de discriminant $|D(f)| > 1$. Alors

$$(8) \quad \Delta(f) > |D(f)| \{c_2(|D(f)|)\}^{-c_1(|D(f)|)} > 0.$$

*) *Note ajoutée aux épreuves.* Notre résultat fournit la solution effective d'un problème qui se trouve dans le livre de W. NARKIEWICZ, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, Warszawa, 1974 (p. 130 et 468).

Dans le corollaire 3 il y a une seule exception pour laquelle $|D(f)|=1$, notamment le polynôme $f(x) = x(x-1)$.

Dans [7], en corollaire de notre théorème cité dans l'introduction, nous avons donné la démonstration constructive d'un problème de T. NAGELL [14], concernant les nombres algébriques entiers de discriminant donné. Dans le corollaire suivant cette proposition sera formulée avec des constantes explicites.

Désignons par $D(\alpha)$ le discriminant d'un entier algébrique α (dans le corps $Q(\alpha)$). Si $f(x)$ est le polynôme minimal de α , alors pour la hauteur de α on obtient $H(\alpha) = \|f\|$ et pour son discriminant on a $D(\alpha) = D(f)$. Appelons les nombres algébriques entiers α et α' équivalents si le polynôme minimal f^* de α' est équivalent à f , c'est-à-dire si l'on a $\alpha' - \alpha \in \mathbb{Z}$. Des Théorèmes 1 et 3 on obtient immédiatement la proposition suivante:

Corollaire 4. Soit $D \geq 3$ une constante et considérons un entier algébrique α tel que $|D(\alpha)| \leq D$. Alors

$$\deg(\alpha) \leq \frac{2}{\log 3} \log D$$

et, pour un certain α' équivalent à α on a

$$H(\alpha') \leq \exp \exp \{2(\log D)^{13}\}.$$

Pour les nombres algébriques entiers de degré ≤ 4 , ce théorème (dans une forme non effective) a été démontré antérieurement par T. NAGELL [13], [14], [15]. Dans un récent travail de B. J. BIRCH et J. R. MERRIMAN [4] se trouve également démontré ce corollaire sauf la calculabilité effective de la seconde constante.

L'inégalité concernant les degrés des α peut être remplacée par $\deg \alpha < \log D$, sauf dans les cas où α est équivalent à $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\pm i$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ ou $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (voir la remarque 1.2.).

Antérieurement, dans [6] nous avons donné aussi une autre application (voir le théorème 2a et 2b), concernant l'irréductibilité des polynômes de la forme $g(f(x))$, de notre théorème qui se trouve dans la partie I (voir [7]). En remplaçant le lemme 20 dans [6] par notre théorème 2, on peut évidemment formuler les théorèmes 2a et 2b de [6] avec des constantes explicites. Notamment, dans le théorème 2a (pour des nombres premiers $p \geq 5$) on peut prendre

$$c_1(G, p) = \exp \{[(4p)^{12} (2G)^{p(p-1)} (\log 2G)^{4/n} n^{2(n^2-1/2)}]\},$$

où $n = 6 \binom{p}{3}$. En même temps nous remarquons que, en remplaçant le lemme 16 de [6] par le lemme 4 de ce travail, on peut obtenir, de façon simple, une constante meilleure et explicite $c = c(n_k, D_k, G)$ aussi dans le théorème 1a de [6], notamment

$$c(n_k, D_k, G) = \exp [c_4 \{4^{n(n+2)} n^{3n} [\log G + c_4]\}^{(2n+1)^2}]$$

avec $n = \max(n_k, 4)$ et avec la constante explicite c_4 qui se trouve dans notre lemme 4.

La démonstration du théorème 2 et 3 est basée sur les résultats de A. BAKER [1], [2] concernant les formes linéaires des logarithmes des nombres algébriques, et sur notre méthode de graphe appliquée antérieurement dans [6] et [7].

3. Démonstrations

Pour la démonstration du théorème 1 nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 1. (P. TURÁN.) *Si un graphe simple ayant t sommets et e arêtes ne contient aucun sous-graphe complet de sommets $k+1$ et si $t = hk + m$ ($0 \leq m < k$), alors on a*

$$e \leq \frac{1}{2}(t^2 - m^2) \frac{k-1}{k} + \binom{m}{2}.$$

DÉMONSTRATION: voir [19].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Tout d'abord nous allons démontrer l'inégalité (3) pour des polynômes irréductibles $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de degré ≥ 2 .

Soit α l'une des racines de $f(x) = 0$ dans le corps des nombres complexes, et désignons par D_k le discriminant du corps algébrique $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. D'après un théorème connu (voir par ex. [10]) on a $D_k | D(f)$ et ainsi

$$(9) \quad |D_k| \leq |D(f)|.$$

Si l'on désigne par n le degré de α , c'est-à-dire $[K:\mathbb{Q}] = n$, et par $2t$ le nombre des couples complexes conjugués de α , alors, d'après l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$(10) \quad |D_k| > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2t} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2.$$

Nous allons prouver que, dans le cas $n \geq 3$, on peut prendre aussi $n < \log |D(f)|$ au lieu de (3). En effet, dans le cas $n=3$ on obtient $|D_k| \geq 23$, dans le cas $n=4$ on obtient $|D_k| \geq 117$ et, pour $n=5$, en conséquence de l'inégalité de Minkowski, on a $|D_k| \geq 260$ (voir [8], p. 592.). Par conséquent, d'après (9), l'inégalité considérée est vraie pour $3 \leq n \leq 5$. Considérons ensuite le cas $n \geq 6$. Alors, en conséquence de la formule de Stirling

$$(n!)^2 < 2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}} e^{1/6n},$$

et ainsi, de (10) on déduit

$$|D_k| > \left(\frac{\pi e^2}{4}\right)^n \frac{1}{2\pi n e^{1/6n}}.$$

D'après $n \geq 6$ il en résulte

$$\frac{\log |D_k|}{n} > \log \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\log 2\pi n e^{1/6n}}{n} \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$\log |D(f)| \geq \log |D_k| > n.$$

Si $n=2$ et $|D(f)| \geq 8$, cette inégalité est également vraie. Enfin, si $n=2$ et $7 \geq |D(f)| \geq |D_k|$, alors on a nécessairement $D_k = -3, -4, -7$ ou 5 lorsque $D(f) = -3, -4, -7$ ou 5 . Mais, dans ces cas il résulte également l'inégalité (3), et dans (3) on trouve une égalité si et seulement si l'on a $D(f) = -3$.

Considérons ensuite le cas où $f(x)$ est réductible sur Q et soit

$$f(x) = f_1(x) \dots f_r(x)$$

sa décomposition irréductible dans $Z[x]$. Si $f_i(x)$ est linéaire pour un i , soit supposé que $D(f_i) = 1$, et désignons par $R(f_i, f_j)$ le résultant des polynômes f_i et f_j . Alors on obtient

$$(11) \quad D(f) = \prod_{i=1}^r D(f_i) \prod_{i>j} R^2(f_i, f_j).$$

Supposons d'abord que $f(x)$ n'a pas de racines rationnelles, c'est-à-dire que $\deg f_i \geq 2$ pour chaque i . Alors, comme nous l'avons démontré,

$$\deg f_i \leq \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)|,$$

d'où, d'après (11), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2}{\log 3} \log |D(f)| &= \sum_{i=1}^r \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)| + \sum_{i>j} \frac{2}{\log 3} \log R^2(f_i, f_j) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^r \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)| \equiv \sum_{i=1}^r \deg f_i = \deg f, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité (3). Nous obtenons une égalité si et seulement si $\deg f_i = \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)|$, c'est-à-dire si $D(f_i) = -3$, $\deg f_i = 2$ et $R^2(f_i, f_j) = 1$ pour chaque i et j . Soient

$$f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = a_1 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2);$$

$$f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = a_2 (x - \beta_1)(x - \beta_2),$$

où $a_1 a_2 \neq 0$ et

$$R(f_1, f_2) = a_1^2 a_2^2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1) = \pm 1.$$

Mais $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q(\sqrt{-3})$, par conséquent $a_1 a_2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$ et

$$a_1 a_2 (\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)$$

sont des entiers algébriques et des nombres rationnels à la fois. On en déduit

$$a_1 a_2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) = \pm 1 \quad \text{et} \quad a_1 a_2 (\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1) = \pm 1.$$

Vu que

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{-3}}{2a_1}, \quad \beta_{1,2} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{-3}}{2a_2},$$

on obtient

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + 3(a_2 - a_1)^2 = \pm 4a_1 a_2$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + 3(a_2 + a_1)^2 = \pm 4a_1 a_2,$$

d'où $a_1 a_2 = 0$ qui est impossible. Donc, dans (3) on trouve une égalité si et seulement si l'on a $r=1$, $\deg f_1 = 2$ et $D(f_1) = -3$.

Ensuite nous allons démontrer l'inégalité (2). En conséquence de l'inégalité (3) il suffit de considérer seulement le cas où $f(x)$ a au moins une racine rationnelle. D'abord, considérons le cas où toutes les racines de $f(x)$ sont rationnelles, c'est-à-dire

$$f(x) = (a_1x - b_1) \dots (a_tx - b_t); \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

Avec la notation $a_i b_j - a_j b_i = D_{ij}$ on peut écrire

$$D(f) = \prod_{i>j} D_{ij}^2.$$

Désignons par $G(f)$ le graphe de telles couples $(a_i x - b_i, a_j x - b_j)$ pour lesquelles $D_{ij} \neq \pm 1$. Si e est le nombre des arêtes, et si

$$|D(f)|^{1/2} = \prod_{i>j} |D_{ij}| = p_1^{\alpha_1} \dots p_u^{\alpha_u}$$

est une décomposition en nombres premiers, alors

$$e \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_u \leq \frac{1}{\log 2} (\alpha_1 \log p_1 + \dots + \alpha_u \log p_u) \leq \frac{1}{\log 2} \log |D(f)|^{1/2}.$$

Considérons maintenant le graphe complémentaire $\overline{G(f)}$. D'après le théorème cité de Hilbert [10], si $f^* \in \mathbb{Z}[x]$ et $|D(f^*)| = 1$, il en résulte que $\deg f^* \leq 3$ (voir l'inégalité (2) pour $D(f) = \pm 1$). Par conséquent, $f(x)$ n'a pas de diviseurs de degré > 3 et de discriminant ± 1 , c'est-à-dire $\overline{G(f)}$ ne contient pas de quadrilatères complets. Donc, en appliquant le lemme 1 dans le cas $k=3$ (où $0 \leq m < 3$), pour le nombre $\binom{t}{2} - e$ des arêtes de $\overline{G(f)}$ on obtient

$$\binom{t}{2} - \frac{\log |D(f)|}{2 \log 2} \leq \binom{t}{2} - e \leq \frac{1}{3} (t^2 - m^2) + \binom{m}{2},$$

d'où on déduit

$$(12) \quad \frac{2}{\log 3} \log |D(f)| \geq \frac{2 \log 2}{3 \log 3} (t + m - 3)(t - m) > t = \deg f,$$

en supposant que $t \geq 5$. Il suffit donc de considérer le cas $4 \geq t \geq 2$. Mais, sauf le cas où $t=3, 4$ et $|D(f)|=1$, il résulte aisément (2) avec une inégalité stricte. D'après le théorème cité de Hilbert [10], dans le cas où $t=4$, $|D(f)|=1$ n'est pas possible, et dans le cas où $t=3$, $|D(f)|=1$ si et seulement si $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$ et $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$, lorsque dans (2) on obtient une égalité.

Dans la suite il suffit de démontrer l'inégalité (2) dans le cas où $f(x)$ peut être écrit sous la forme

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

où tous les facteurs de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement non linéaires et linéaires. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\log 3} \log |D(f)| + 3 &= \frac{2}{\log 3} \log |D(f_1)| + \left(\frac{2}{\log 3} \log |D(f_2)| + 3 \right) + \\ &+ \frac{4}{\log 3} \log |R(f_1, f_2)| \geq \deg f_1 + \deg f_2 = \deg f \end{aligned}$$

et (2) est démontré. De plus, pour que dans (2) soit une égalité, il faut et il suffit qu'on ait $\deg f_1 = 2$, $D(f_1) = -3$, $\deg f_2 = 3$, $D(f_2) = \pm 1$ (lorsque f_2 est nécessairement de la forme précédente) et $|R(f_1, f_2)| = 1$. Écrivons les polynômes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sous les formes

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c, \quad f_2(x) = P(x) = (a_0x - b_0)(a_1x - b_1)[(a_0 + a_1)x - (b_0 + b_1)],$$

où $aa_0a_1(a_0 + a_1) \neq 0$ et $a_0b_1 - b_0a_1 = \pm 1$. Considérons la forme $F(x, y) = y^5 f\left(\frac{x}{y}\right)$ pour laquelle $D(F) = D(f)$. Substituons ici

$$x' = a_0x - b_0y, \quad y' = a_1x - b_1y$$

et puis

$$x' = u, \quad y' = u - v$$

à $F(x, y)$. Alors $F(x, y)$ est unimodulairement équivalent à la forme

$$H(u, v) = G(u, v)u(u - v)(2u - v),$$

où $G(u, v) = a'u^2 + b'uv + c'v^2$ et $D(G(u, 1)) = -3$, $D(H(u, 1)) = \pm 3$. On peut supposer que $a' > 0$. Alors il en résulte que

$$c' = 1, \quad a' + b' + c' = 1, \quad a' + 2b' + 4c' = 1,$$

d'où $a' = 3$, $b' = -3$. Enfin, on en déduit

$$f(x) = [(a_0x - b_0)^2 + (a_0x - b_0)(a_1x - b_1) + (a_1x - b_1)^2]P(x),$$

lorsque dans (2) se trouve une égalité.

Enfin soit supposé que $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est unitaire. Si $f(x)$ n'a pas de racines rationnelles, l'inégalité (3) implique (4). Si toutes les racines de $f(x)$ sont rationnelles (et ainsi nécessairement entières rationnelles), $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_t)$ et $t \geq 5$, alors, comme nous l'avons démontré précédemment, on déduit (3) qui implique également (4). Dans les cas où $4 \geq t \geq 2$ et $|D(f)| > 1$, on obtient également (4) avec une inégalité stricte. On peut aisément vérifier que pour $t = 3, 4$ on a $|D(f)| \neq 1$, et, dans le cas où $t = 2$ et $|D(f)| = 1$, le polynôme $f(x)$ est équivalent à $x(x - 1)$. Dans ce cas se trouve une égalité dans (4).

Soit ensuite $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, où toutes les racines de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$ sont respectivement non rationnelles et entières rationnelles. Alors on a

$$\begin{aligned} 2 \left(1 + \frac{\log |D(f)|}{\log 3} \right) &= \frac{2}{\log 3} \log |D(f_1)| + 2 \left(1 + \frac{\log |D(f_2)|}{\log 3} \right) + \\ &+ \frac{4}{\log 3} \log |R(f_1, f_2)| \cong \deg f_1 + \deg f_2 = \deg f. \end{aligned}$$

Pour que dans (4) soit une égalité il faut et il suffit qu'on ait $\deg f_1 = 2$, $D(f_1) = -3$, $R(f_1, f_2) = \pm 1$ et $f_2(x)$ soit équivalent à $x(x - 1)$. Si nous écrivons $f_1(x)$ sous la forme $f_1(x) = x^2 + bx + c$, alors on en déduit $c = \pm 1$, $1 + b + c = \pm 1$, c'est-à-dire

$f_1(x) = x^2 - x + 1$ et on a finalement $f(x) = (x^2 - x + 1)x(x - 1)$, ce qui démontre notre théorème.

Pour la démonstration du théorème 2 nous aurons besoin de quelques lemmes. D'abord nous formulerons et démontrerons ces lemmes.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \geq 2$) des nombres algébriques, différents de zéro, de degré $\leq n$ et de hauteur $\leq A$, où $n, A \geq 4$. De plus, soit $0 < \delta \leq 1$ une constante arbitraire et désignons par $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_k$ les valeurs principales des logarithmes. Alors il est vrai ce qui suit:

Lemme 2. (A. BAKER, [1].) *S'il existe des nombres entiers rationnels $b_1, \dots, b_k$ tels que $|b_i| \leq H$ ($i = 1, \dots, k$) et*

$$(13) \quad 0 < |b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_k \log \alpha_k| < e^{-\delta H},$$

alors on a

$$(14) \quad H < (4^{k^2} \delta^{-1} n^{2k} \log A)^{(2k+1)^2}.$$

Au cours de la démonstration du théorème 2 nous utiliserons le corollaire suivant de ce théorème (pour la déduction voir [2], p. 176.): Si pour les α_i précédents et pour les nombres entiers rationnels $b_1, \dots, b_{k-1}$ de valeur absolue $\leq H$ on a

$$(15) \quad 0 < |\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_{k-1}^{b_{k-1}} - \alpha_k| < e^{-\delta H},$$

alors on obtient également (14), où maintenant $0 < \delta \leq 1/2k$. De plus, si ici les α_i ne sont pas tous réels, alors dans (14) il faut remplacer k par $k+1$.

Dans la suite soit K un corps algébrique de degré $n_k \geq 2$ et désignons par D_k la valeur absolue de son discriminant. Si $K = Q(\alpha)$, désignons par $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n_k)}$ les conjugués de α arrangés de telle manière que $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r_1)}$ soient tous réels et $\alpha^{(r_1+1)}, \overline{\alpha^{(r_1+1)}}, \dots, \alpha^{(r_1+r_2)}, \overline{\alpha^{(r_1+r_2)}}$ soient les couples conjugués complexes de α . $\beta \in K$ étant un nombre arbitraire, désignons par $\beta^{(i)}$ le conjugué de β correspondant à $\alpha^{(i)}$. Enfin, soit $r = r_1 + r_2 - 1$, soit $e_k = 1$ pour $k \leq r_1$, et soit $e_k = 2$ pour $r_1 < k \leq r_1 + r_2$.

Lemme 3. (C. SIEGEL.) *Si $r \geq 1$, dans K il existe des unités indépendantes $\eta_1, \dots, \eta_r$ telles que*

$$(16) \quad e_k |\log |\eta_l^{(k)}|| < c_3 \quad (k, l = 1, \dots, r),$$

où $c_3 = 3 \left(\frac{5 \log D_k}{2n_k - 2} \right)^{n_k - 1} \sqrt{D_k}$. La valeur absolue des éléments de la matrice inverse de la matrice $\|e_k \log |\eta_l^{(k)}|\|$ est $\leq 10^{r_2} r^{(r-1)/2}$ (*).

DÉMONSTRATION: voir [17], p. 80—83.

Considérons les solutions $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ de l'équation

$$(17) \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \neq 0$$

en entiers de K . Appelons les solutions $(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3)$ et $(\beta''_1, \beta''_2, \beta''_3)$ associées entre eux, si $(\beta''_1, \beta''_2, \beta''_3) = (\varepsilon \beta'_1, \varepsilon \beta'_2, \varepsilon \beta'_3)$ avec une unité ε de K . Soit $n \equiv \max(n_k, 4)$ un

*) Si $r > 1$, on peut prendre $10^{r_2} (r-1)^{(r-1)/2}$ (voir [17]).

nombre naturel et désignons par $h(\alpha)$ le maximum des valeurs absolues des conjugués d'un nombre arbitraire $\alpha \in K$.

Lemme 4. Soit $G \geq 1$ une constante et soit $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ une solution de (17), en entiers de K , telle que

$$(18) \quad |N_{K/Q}(\beta_i)| \leq G \quad (i = 1, 2, 3).$$

Alors il existe une solution $(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3)$ de (17), associée à $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, telle que

$$(19) \quad |h(\beta'_i)| \leq \exp [c_4 \{4^{n(n+1)} n^{3n} [\log G + c_4]\}^{(2n+1)^2}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

où $c_4 = (\log D_K)^{n-1} \sqrt{D_K}$.

Ce lemme se trouve aussi dans notre travail [6] (voir le lemme 16), dans lequel la constante, sans être calculé explicitement, est calculable explicitement. Comme nous l'avons mentionné, à l'aide de ce lemme, les constantes, qui se trouvent dans [6], peuvent être données dans une forme explicite et on peut, en même temps, les améliorer.

Nous remarquons que si α et β sont des nombres algébriques de degré n_1 et n_2 respectivement, et si $H(\alpha), H(\beta) \leq H$, alors le degré de $\alpha \pm \beta$, $\alpha \cdot \beta$ et α/β ($\beta \neq 0$) est $\leq n_1 n_2$, la hauteur de ces nombres est $\leq (4n_1 n_2 H^4)^{n_1 n_2}$ et $h(\alpha) \leq n_1 H(\alpha)$ (voir [2], p. 177. et 205.). De plus, on peut aisément vérifier que $H(\alpha) \leq 2^{n_1} a \max(1, h^{n_1}(\alpha))$, étant a le coefficient dominant du polynôme minimal de α dans $\mathbb{Z}[x]$ et, si α est entier, on a $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq h^{n_1-1}(\alpha)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4. Il suffit de considérer le cas où $r > 0$. Soit $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ une solution de (17) satisfaisant à (18). Considérons un système des unités $\eta_1, \dots, \eta_r$ satisfaisant à l'assertion du lemme 3. Alors on peut démontrer (voir [2], p. 188. et 205.) que, pour des nombres $a_{i1}, \dots, a_{ir} \in \mathbb{Z}$ convenablement choisis, on a

$$(20) \quad \beta_i = \gamma_i \eta_1^{a_{i1}} \dots \eta_r^{a_{ir}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$|N_{K/Q}(\beta_i)| = |N_{K/Q}(\gamma_i)| = m_i \leq G \quad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$(21) \quad |\log m_i^{-1/n_k} |\gamma_i^{(j)}|| \leq n_k^2 c_3 \leq n^2 c_3 \quad (1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n_k)$$

avec la constante c_3 qui se trouve dans le lemme 3. Ainsi, de (17) il résulte

$$(22) \quad \gamma_1 \eta_1^{x_1} \dots \eta_r^{x_r} + \gamma_2 \eta_1^{y_1} \dots \eta_r^{y_r} + \gamma_3 = 0$$

avec des entiers rationnels x_i, y_i ($i = 1, \dots, r$) convenablement choisis. Nous allons démontrer que la solution $\beta'_1 = \gamma_1 \eta_1^{x_1} \dots \eta_r^{x_r}$, $\beta'_2 = \gamma_2 \eta_1^{y_1} \dots \eta_r^{y_r}$, $\beta'_3 = \gamma_3$ satisfait à (19).

D'après (21) on a $h(\gamma_i) \leq G^{1/n_k} e^{n^2 c_3}$ et

$$h\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right) \leq \left(\frac{m_i}{m_j}\right)^{1/n_k} e^{2n^2 c_3} \leq G^{1/n_k} e^{2n^2 c_3} \quad (1 \leq i, j \leq 3).$$

Vu que la valeur absolue du coefficient dominant du polynôme minimal de γ_i/γ_j dans $\mathbb{Z}[x]$ est $\equiv |N_{K/\mathbb{Q}}(\gamma_j)| \leq G$, nous obtenons

$$H\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right) \leq 2^n G^2 e^{2n^3 c_3} = c_5 \quad (1 \leq i, j \leq 3).$$

Du lemme 3, on déduit également $H(\eta_j) \leq c_5$ ($j=1, \dots, r$).

Supposons que dans (22) $X = \max_{1 \leq i \leq r} |x_i|$, $Y = \max_{1 \leq i \leq r} |y_i|$ et

$$X \equiv Y > c_6 = (4^{n^2} \delta^{-1} n^{2\kappa} \log c_5)^{(2n+1)^2}; \quad \kappa = \begin{cases} r+1 & \text{pour } r_2 = 0 \\ r+2 & \text{pour } r_2 > 0, \end{cases}$$

avec une constante $0 < \delta \leq \frac{1}{2n}$ déterminée ultérieurement.

Soit c' déterminé de telle manière que

$$c'X = |\log |\gamma_1^{(j)} / \beta_1^{(j)}|| = \max_{1 \leq j \leq r} |\log |\gamma_1^{(j)} / \beta_1^{(j)}||.$$

D'après le lemme 3, du système d'équations

$$x_1 \log |\eta_1^{(j)}| + \dots + x_r \log |\eta_r^{(j)}| = \log |\beta_1^{(j)} / \gamma_1^{(j)}| \quad (1 \leq j \leq r)$$

pour les inconnues $x_1, \dots, x_r$ on obtient

$$X \leq 2r^{(r+1)/2} 10^{r_2} c'X,$$

d'où $c' \geq [2r^{(r+1)/2} 10^{r_2}]^{-1}$. De plus, de (21) on déduit (voir [2], p. 189.)

$$|\log (m_1^{-1/n_k} |\beta_1^{(j)}|)| = |\log |\beta_1^{(j)} / \gamma_1^{(j)}| + \log (m_1^{-1/n_k} |\gamma_1^{(j)}|)| \geq c'X - n^2 c_3 > 0.$$

Par conséquent, d'après $\sum_{j=1}^{n_k} \log (m_1^{-1/n_k} |\beta_1^{(j)}|) = 0$, pour un indice l , on a

$$\log (m_1^{-1/n_k} |\beta_1^{(l)}|) \leq -\frac{c'X - n^2 c_3}{n_k - 1},$$

c'est-à-dire

$$(23) \quad \frac{|\beta_1^{(l)}|}{|\gamma_2^{(l)}|} \leq h^{n_k-1}(\gamma_2) G^{1/n_k} e^{-\frac{c'X - n^2 c_3}{n_k - 1}} \leq e^{\log G + n^3 c_3 - \frac{c'X}{n}}.$$

D'autre part, si $K^{(l)}$ et ainsi K est totalement réel, alors $r+1 = n_k \leq n$, dans le cas contraire $r+2 \leq n_k \leq n$. Donc, d'après $Y > c_6$ et le corollaire du lemme 2, (22) entraîne

$$(24) \quad \frac{|\beta_1^{(l)}|}{|\gamma_2^{(l)}|} = \left| \frac{\gamma_1^{(l)}}{\gamma_2^{(l)}} \eta_1^{(l)x_1} \dots \eta_r^{(l)x_r} \right| = \left| \eta_1^{(l)y_1} \dots \eta_r^{(l)y_r} + \frac{\gamma_3^{(l)}}{\gamma_2^{(l)}} \right| \leq e^{-\delta Y} \leq e^{-\delta X}.$$

Par conséquent, de (23) et (24) il résulte

$$\left(\frac{c'}{n} - \delta \right) X \leq \log G + n^3 c_3.$$

et ainsi, en choisissant $\delta = (2nr^{(r+1)/2} 10^{r_2} + 1)^{-1}$, en conséquence de $X > c_6$ nous obtenons une contradiction.

Considérons ensuite le cas où X ou $Y \leq c_6$ avec le δ précédent. Soit par exemple $X \leq c_6$. Alors, d'après le lemme 3 on déduit $h(\eta_j) \leq e^{rc_3}$, et, pour β'_2 on a

$$\begin{aligned} h(\beta'_2) &\leq h(\beta'_3) + h(\beta'_1) \leq h(\gamma_3) + h(\gamma_1) \left(\prod_{j=1}^r h(\eta_j)^{n_k-1} \right)^X \leq \\ &\leq G^{1/n_k} e^{n^2 c_3} + G^{1/n_k} e^{n^2 c_3 + r^2 (n_k-1) c_3 c_6} \leq G^{1/n_k} \exp \{n^2 c_3 + r^2 n c_3 c_6\} \leq \exp \{r n^2 c_3 c_6\}. \end{aligned}$$

Vu que $\delta = (2nr^{(r+1)/2} 10^{r_2} + 1)^{-1}$, $c_3 \leq 2c_4$ et $n \geq 4$, pour l'exposant on obtient

$$\begin{aligned} r n^2 c_3 c_6 &\leq 2 r n^2 c_4 c_6 \leq 2^{(1/4)(2n+1)^2} c_4 c_6 \leq c_4 \{4^{n^2} n^{2 \times 2^{1/4}} \delta^{-1} \log c_5\}^{(2n+1)^2} \leq \\ &\leq c_4 \{4^{n(n+1)} n^{3n} (\log G + c_4)\}^{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$h(\beta'_2) \leq \exp [c_4 \{4^{n(n+1)} n^{3n} (\log G + c_4)\}^{(2n+1)^2}],$$

qui est valable, de manière évidente, aussi pour $h(\beta'_1)$, $h(\beta'_3)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Nous allons démontrer d'abord l'inégalité (5) pour des polynômes unitaires irréductibles $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Soit $f(x)$ un tel polynôme avec le discriminant $0 < |D(f)| \leq D$ et soit α l'une des racines de $f(x)$ dans le corps des nombres complexes. Soit $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha^{(i)})$, où $\alpha^{(1)} = \alpha$. Il suffit de prouver que $H(\alpha') \leq \exp \{[(3k)^{12} D (\log D)^{4/n} n^{2(n^2-1/2)}]\}$ pour un certain α' équivalent à α , où $|D(\alpha)| = |D(f)| \leq D$.

Désignons par D_L le discriminant du corps algébrique $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Alors, d'après $D_L |D(\alpha)|$, on a $|D_L| \leq D$.

Si $k=2$ et $\alpha = x + y\sqrt{D_L}$ ($x, y \in \mathbb{Q}$), alors en conséquence de $D \equiv |D(\alpha)| = 4y^2 |D_L| \geq y^2$ on a $|y| \leq \sqrt{D}$. En choisissant $a = [x]$, pour $\alpha' = \alpha - a$ on obtient $H(\alpha') \leq D^2 + 1$.

Considérons ensuite le cas $k \geq 3$. Il existe dans L un élément entier primitif δ tel que $h(\delta) \leq |D_L|^{1/2} \leq D^{1/2}$ (voir, par ex. [16], p. 22.). Désignons par $\delta^{(1)} = \delta, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(k)}$ les conjugués de δ , correspondant aux conjugués $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ de α . Alors le degré de $K_{ijl} = \mathbb{Q}(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}, \alpha^{(l)}) = \mathbb{Q}(\delta^{(i)}, \delta^{(j)}, \delta^{(l)})$ est $n_{ijl} \leq k(k-1)(k-2)$. Si $n=6 \binom{k}{3}$ on a

$$(25) \quad \max_{i,j,l} (n_{ijl}, 4) \leq n = k(k-1)(k-2),$$

et, en conséquence de la remarque 1.2, on obtient

$$(26) \quad k < \log D.$$

Prenons les nombres $l\delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ ($l=0, \dots, k^4$) et remplaçons $\delta^{(1)}$ et $\delta^{(2)}$ par leurs conjugués $\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)}$ indépendamment l'un de l'autre. Il y a au moins un nombre $\sigma_1 = l\delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ ($0 \leq l \leq k^4$) tel que les nombres $l\delta^{(i)} + \delta^{(j)}$ ($1 \leq i, j \leq k$) soient dif-

férents deux à deux. Alors σ_1 est un élément entier primitif du corps $Q(\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$ (voir [11], Satz 709.) et

$$h(\sigma_1) \leq k^4 h(\delta^{(1)}) + h(\delta^{(2)}) \leq (k^4 + 1) \sqrt{D}.$$

En répétant ce procédé (s'il est nécessaire), nous obtenons un nombre entier primitif $\sigma = \sigma_1 + l \cdot \delta^{(3)}$ ($0 \leq l \leq (k^2(k-1))^2$) dans K_{123} tel que

$$h(\sigma) \leq k^6 \sqrt{D}.$$

On peut, d'une manière analogue, obtenir un élément primitif σ avec cette propriété dans tous les corps K_{ijl} . Soit fixé un tel σ . Il en résulte pour chaque conjugué $\sigma^{(s)}$ et $\sigma^{(r)}$ de σ

$$(27) \quad h(\sigma^{(s)} - \sigma^{(r)}) \leq 2h(\sigma) \leq 2k^6 \sqrt{D} = c_8,$$

d'où, pour le discriminant $D_{K_{ijl}}$ de K_{ijl} on déduit

$$(28) \quad |D_{K_{ijl}}| \leq |D(\sigma)| \leq c_8^{n(n-1)} = c_9$$

pour tout i, j, l . Si $K = Q(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)})$, de l'égalité

$$(29) \quad D(\alpha) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)})^2$$

il résulte que

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} N_{K/Q}^2(\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}) = |D(\alpha)|^{[K:Q]} \leq D^{[K:Q]},$$

d'où

$$0 < |N_{K_{ijl}/Q}(\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)})| \leq D^{[K_{ijl}:Q]/2} \leq D^{n/2} = c_{10},$$

pour chaque couple i, j ($i \neq j$) et pour tout l .

Employons le lemme 4 avec $G = c_{10}$. Pour des indices arbitraires i, j, l différents deux à deux on a

$$(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) + (\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}) + (\alpha^{(l)} - \alpha^{(i)}) = 0,$$

c'est-à-dire les nombres entiers $(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}, \alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}, \alpha^{(l)} - \alpha^{(i)})$ différents de zéro satisfont à la fois à l'équation (17) et à l'inégalité (18). D'après le lemme 4 il existe donc une solution $(\beta_1^{(ijl)}, \beta_2^{(ijl)}, \beta_3^{(ijl)})$ de (17) en entiers de K_{ijl} , associée à la solution $(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}, \alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}, \alpha^{(l)} - \alpha^{(i)})$, telle que

$$\max_{1 \leq s \leq 3} h(\beta_s^{(ijl)}) \leq \exp [c_{11} \{4^{n(n+1)} n^{3n} [\log c_{10} + c_{11}]\}^{(2n+1)^2}] = c_{12}$$

indépendamment de i, j, l , où $c_{11} = (\log c_9)^{n-1} \sqrt{c_9}$. Donc, avec une unité $\varepsilon \in K_{123}$ on a

$$\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} = \varepsilon \beta_1^{(123)}, \quad \alpha^{(2)} - \alpha^{(3)} = \varepsilon \beta_2^{(123)}, \quad \alpha^{(3)} - \alpha^{(1)} = \varepsilon \beta_3^{(123)}.$$

Si $k > 3$, on obtient pour chaque $k \geq i > 3$

$$\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} = \varepsilon' \beta_1^{(12i)}, \quad \alpha^{(2)} - \alpha^{(i)} = \varepsilon' \beta_2^{(12i)}, \quad \alpha^{(i)} - \alpha^{(1)} = \varepsilon' \beta_3^{(12i)}$$

avec une unité $\varepsilon' \in K_{12i}$ et avec des entiers $\beta_s^{(12i)} \in K_{12i}$ tels que $h(\beta_s^{(12i)}) \leq c_{12}$. Il en

résulte $\varepsilon' = \varepsilon \beta_1^{(123)} / \beta_1^{(12i)}$, c'est-à-dire avec $q_i = \beta_2^{(12i)} \beta_1^{(123)} / \beta_1^{(12i)}$ on a $\alpha^{(2)} - \alpha^{(i)} = \varepsilon q_i$. De plus, pour chaque $j \neq 2, i$ on obtient

$$\alpha^{(2)} - \alpha^{(i)} = \varepsilon'' \beta_1^{(2ij)}, \quad \alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = \varepsilon'' \beta_2^{(2ij)}, \quad \alpha^{(j)} - \alpha^{(2)} = \varepsilon'' \beta_3^{(2ij)}$$

avec une unité $\varepsilon'' \in K_{2ij}$ et avec des nombres entiers $\beta_s^{(2ij)} \in K_{2ij}$ tels que $h(\beta_s^{(2ij)}) \leq c_{12}$. On en déduit $\varepsilon'' = \varepsilon q_{ij} / \beta_1^{(2ij)}$, c'est-à-dire

$$\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = \varepsilon q_{ij} \beta_2^{(2ij)} / \beta_1^{(2ij)} = \varepsilon q_{ij}$$

où

$$h(q_{ij}) \leq c_{12}^3 c_{12}^{2(n-1)} = c_{12}^{2n+1} = c_{13} \quad \text{et} \quad h\left(\frac{1}{q_{ij}}\right) \leq c_{12}^{2+3(n-1)} = c_{12}^{3n-1}.$$

L'estimation obtenue est évidemment valable pour chaque couple i, j ($i \neq j$) et aussi dans le cas $k=3$.

De (29) on déduit

$$\varepsilon^{k(k-1)} = D(\alpha) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq k} q_{ij}^2 \right)^{-1},$$

d'où l'on obtient

$$h(\varepsilon^{k(k-1)}) \leq D c_{12}^{k(k-1)(3n-1)} = c_{14}$$

et

$$h(\varepsilon) \leq c_{14}^{\frac{1}{k(k-1)}} = D^{\frac{1}{k(k-1)}} c_{12}^{3n-1} = c_{15}.$$

Enfin, si $\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = \sigma_{ij}$, alors pour chaque couple d'indices i, j ($i \neq j$) on a

$$h(\sigma_{ij}) \leq h(\varepsilon) h(q_{ij}) \leq c_{15} \cdot c_{13} \leq D^{\frac{1}{k(k-1)}} c_{12}^{5n} = c_{16}.$$

Considérons de nouveau le nombre entier primitif δ dans L , utilisé déjà précédemment. Vu que $h(\delta) \leq \sqrt{D}$, en conséquence de l'inégalité $h(\delta^{(i)} - \delta^{(j)}) \leq 2\sqrt{D}$ on déduit

$$\Delta(\delta) = |D(\delta)| \leq (2\sqrt{D})^{k(k-1)} = c_{17}.$$

Dans L il y a une base d'entiers de la forme

$$(1, w_1, \dots, w_{k-1}) = \left(1, \frac{\psi_1(\delta)}{\Delta_1}, \dots, \frac{\psi_{k-1}(\delta)}{\Delta_{k-1}} \right),$$

où $\psi_s(\delta) = \delta^s + a_{s1}\delta^{s-1} + \dots + a_{ss}$; $\Delta_s, a_{sr} \in \mathbb{Z}$ et $\Delta_s | \Delta(\delta)$, $|a_{sr}| \leq \Delta(\delta)$ pour chaque $1 \leq s, r \leq k-1$ (voir [3], p. 11.). Ici on a

$$h(\psi_s(\delta)) \leq k \Delta(\delta) h(\delta)^{k-1} \leq k c_{17} D^{\frac{k-1}{2}} \quad (1 \leq s \leq k-1)$$

et

$$h(w_s) \leq k c_{17} D^{\frac{k-1}{2}} = k 2^{k(k-1)} D^{\frac{k^2-1}{2}} = c_{18},$$

d'où

$$h(w_s^{(i)} - w_s^{(k)}) \leq 2c_{18} \quad (1 \leq s, i \leq k-1).$$

Considérons ensuite la représentation

$$\alpha = \alpha^{(1)} = x_0 + x_1 w_1 + \dots + x_{k-1} w_{k-1} \quad (x_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k-1)$$

de α et prenons le nombre

$$\alpha' = x_1 w_1 + \dots + x_{k-1} w_{k-1}$$

équivalent à α . Alors pour les conjugués de α' on conclut

$$\alpha'^{(i)} - \alpha'^{(j)} = \alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = \sigma_{ij}.$$

Désignons par $w_s^{(1)} = w_s, \dots, w_s^{(k)}$ ($1 \leq s \leq k-1$) les conjugués de w_s correspondant à $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ et considérons le système d'équations

$$\sigma_{1k} = \alpha'^{(1)} - \alpha'^{(k)} = x_1(w_1^{(1)} - w_1^{(k)}) + \dots + x_{k-1}(w_{k-1}^{(1)} - w_{k-1}^{(k)})$$

$\vdots$

$$\sigma_{k-1,k} = \alpha'^{(k-1)} - \alpha'^{(k)} = x_1(w_1^{(k-1)} - w_1^{(k)}) + \dots + x_{k-1}(w_{k-1}^{(k-1)} - w_{k-1}^{(k)})$$

en $x_1, \dots, x_{k-1}$. La valeur absolue du déterminant de ce système d'équations est $|D_L|^{1/2} > 1$. En éliminant les inconnues x_i , nous obtenons

$$|x_i| \leq (k-1)c_{18}(k-2)!(2c_{18})^{k-2} = c_{19},$$

d'où

$$h(\alpha') \leq kc_{18}c_{19} \leq k!2^{k-2}c_{18} \cdot c_{18}^{k-1},$$

et finalement

$$H(\alpha') \leq (2h(\alpha'))^k \leq (k!)^k 2^{k(k-1)} c_{18}^k c_{18}^{k(k-1)}.$$

Après un petit calcul on obtient

$$(k!)^k 2^{k(k-1)} c_{18}^k c_{18}^{k(k-1)} \leq c_{12}^{6kn}.$$

De plus, en considérant dans la constante c_{12} les estimations $\log c_{10} + c_{11} \leq 1,5c_{11}$ et $6kn \cdot 1,5^{(2n+1)^2} \leq 2^{(2n+1)^2}$, on déduit

$$c_{12}^{6kn} \leq \exp \{c_{11}^{4n^2+4n+2} (4^{n^2+n+1/2} n^{3n})^{(2n+1)^2}\}.$$

Vu que $c_{11} = (\log c_9)^{n-1} \sqrt{c_9}$ et $c_9 = (2k^6 \sqrt{D})^{n(n-1)}$, en conséquence de $23 \leq |D_L|$ et $\log 2 + 6 \log k + \frac{1}{2} \log D \leq 2 \frac{5}{6} \log D$ il en résulte

$$c_{11}^{4n^2+4n+2} (4^{n^2+n+1/2} n^{3n})^{(2n+1)^2} \leq [(3k)^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n^2 - (1/2)n - 1/2}$$

et

$$(30) \quad H(\alpha') \leq \exp \{[(3k)^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n^2 - 1/2}\}.$$

Enfin, on en déduit (5) pour $\|f^*\|$, où f^* est le polynôme minimal de α' , équivalent à f .

Ensuite nous démontrons l'inégalité (5) pour des polynômes réductibles. Considérons un polynôme unitaire $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ réductible sur $\mathbb{Q}$ et soit

$$f(x) = f_1(x) \dots f_r(x)$$

la décomposition de $f(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$. Vu que $D(f) \neq 0$, les polynômes unitaires f_i sont différents deux à deux. De $0 < |D(f)| \leq D$ et de (11) il résulte

$$(31) \quad 0 < |D(f_i)| \leq D \quad (i = 1, \dots, r).$$

Par conséquent, d'après (5), pour chaque i il y a un polynôme f_i^* équivalent à f_i tel que

$$\|f_i^*\| \leq \exp \{[(3k_i)^{12} D(\log D)^{4/n_i} n_i^{n_i^2(n_i^2-1/2)}]\} \quad (i = 1, \dots, r),$$

où $k_i = \deg f_i$, $n_i = 6 \binom{k_i}{3}$ dans le cas $k_i \geq 3$, et $n_i = 1$ dans le cas $k_i < 3$. Soit $n = 6 \binom{k-1}{3}$ pour $k \geq 4$ et soit $n = 1$ pour $k = 3$. Alors on a pour chaque i

$$(32) \quad \|f_i^*\| \leq \exp \{[(3(k-1))^{12} D(\log D)^{4/n} n^{n^2(n^2-1/2)}]\} = c_{20}.$$

Si f_i est linéaire, soit $f_i^*(x) = x$. De plus, si f_i et f_j sont équivalents, choisissons les polynômes f_i^* et f_j^* identiques et fixons un système des f_i^* qui possèdent une telle propriété. Alors on peut écrire $f_i(x) = f_i^*(x + a_i)$ avec des nombres entiers rationnels convenables a_i . Si $R(f_i, f_j)$ désigne le résultant de f_i et f_j , d'après (11) il résulte

$$(33) \quad 0 < |R(f_i, f_j)| = |R(f_i^*(x + a_i), f_j^*(x + a_j))| \leq \sqrt{D}$$

pour chaque i, j ($i \neq j$).

Soit L_{ij} le corps de décomposition de $f_i^*(x)f_j^*(x)$. Alors $[L_{ij}:Q] \leq k_i! k_j! \leq k! = c_{21}$. Désignons par α_i et α_j une racine de f_i^* et f_j^* respectivement et soient

$$f_i^* = \prod_{u=1}^{k_i} (x - \alpha_i^{(u)}), \quad f_j^* = \prod_{v=1}^{k_j} (x - \alpha_j^{(v)}),$$

($\alpha_i^{(1)} = \alpha_i$, $\alpha_j^{(1)} = \alpha_j$). En conséquence de $H(\alpha_i) = \|f_i^*\|$, $H(\alpha_j) = \|f_j^*\|$ et de $k_i k_j \leq k^2/4$, on obtient

$$H(\alpha_i - \alpha_j) \leq (4k_i k_j c_{20}^4)^{k_i k_j} \leq (k^{1/2} c_{20})^{k^2} = c_{22} \quad \text{et} \quad \deg(\alpha_i - \alpha_j) \leq k_i k_j \leq \frac{k^2}{4}.$$

Soit $F_{ij}(x) = x^N + b_1 x^{N-1} + \dots + b_N \in \mathbb{Z}[x]$ le polynôme minimal de $\alpha_j - \alpha_i$, où $N = \deg F_{ij} \leq k^2/4$ et $\max_{1 \leq m \leq N} |b_m| = \|F_{ij}\| \leq c_{22}$. Alors

$$R(f_i^*(x + a_i), f_j^*(x + a_j)) = \prod_{\substack{1 \leq u \leq k_i \\ 1 \leq v \leq k_j}} ((\alpha_i^{(u)} - a_i) - (\alpha_j^{(v)} - a_j)).$$

Si $L_{ij} \neq Q$, prenons ici la norme des deux côtés dans L_{ij} . De (33) on déduit

$$\begin{aligned} (\sqrt{D})^{c_{21}} &\geq |N_{L_{ij}/Q}((\alpha_i - a_i) - (\alpha_j - a_j))| = \\ &= |N_{L_{ij}/Q}((a_j - a_i) - (\alpha_j - \alpha_i))| \geq |F_{ij}(a_j - a_i)|. \end{aligned}$$

On a $|a_j - a_i| \leq (\sqrt{D})^{c_{21}} + \frac{k^2}{4} c_{22} = c_{23}$, parce que dans le cas contraire, on obtiendrait

$$\begin{aligned} |F_{ij}(a_j - a_i)| &= |(a_j - a_i)^N + b_1(a_j - a_i)^{N-1} + \dots + b_N| \geq \\ &\geq |a_j - a_i|^{N-1} (|a_j - a_i| - \{|b_1| + \dots + |b_N|\}) \geq |a_j - a_i| - \frac{k^2}{4} c_{22} > (\sqrt{D})^{c_{21}}. \end{aligned}$$

L'estimation concernant $|a_j - a_i|$ est évidemment vraie aussi dans le cas où $L_{ij} = Q$.

Enfin, prenons par exemple le polynôme $f^*(x) = f(x - a_1)$ équivalent à $f(x)$ et considérons la décomposition

$$f^*(x) = \bar{f}_1(x) \dots \bar{f}_r(x) = f_1(x - a_1) \dots f_r(x - a_1),$$

où

$$\bar{f}_i(x) = f_i(x - a_1) = f_i^*(x + (a_i - a_1)).$$

Ainsi, d'après

$$\bar{f}_i(x) = f_i^*(x + (a_i - a_1)) = \sum_{s=0}^{k_i} \frac{f_i^{*(s)}(a_i - a_1)}{s!} x^s$$

et d'après $\|f_i^*\| \leq c_{20}$ nous obtenons

$$\|\bar{f}_i\| \leq \max_{0 \leq s \leq k_i-1} \left\{ \binom{k_i}{s} |a_i - a_1|^{k_i-s} + c_{20} |a_i - a_1|^{k_i-s-1} \left[\binom{k_i-1}{s} + \dots + \binom{s}{s} \right] \right\} \leq c_{20} \cdot c_{23}^{k_i}$$

en supposant que $a_i \neq a_1$. Mais cette inégalité est vraie aussi dans le cas où $a_i = a_1$. Donc, on déduit

$$\begin{aligned} \|f^*\| &\leq \prod_{i=1}^r (c_{20} \cdot c_{23}^{k_i}) \deg f_1 \dots \deg f_r \leq c_{20}^r c_{23}^k \left(\frac{k_1 + \dots + k_r}{r} \right)^r = \\ &= \left(\frac{c_{20} k}{r} \right)^r c_{23}^k \leq \left(\frac{k c_{20}}{2} \right)^k c_{23}^k. \end{aligned}$$

On peut aisément obtenir que

$$c_{23} = (\sqrt{D})^{c_{21}} + \frac{k^2}{4} c_{22} = (\sqrt{D})^{c_{21}} + \frac{k^{(1/2)k^2+2}}{4} c_{20}^{k^2} \leq \frac{k^{(1/2)k^2+2}}{2} c_{20}^{k^2}.$$

En supposant que $k \geq 4$, on en déduit

$$\begin{aligned} \|f^*\| &\leq \left(\frac{k c_{20}}{2} \right)^k c_{23}^k \leq k^{k^3} c_{20}^{k+k^3} \leq c_{20}^{2k^3} = \\ &= \exp \{ 2k^3 [(3(k-1))^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)} \} \leq \\ &\leq \exp \{ [(3k)^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)} \}, \quad \left(n = 6 \binom{k-1}{3} \right) \end{aligned}$$

ce qui prouve notre théorème pour $k \geq 4$. Pour $k=3$ on obtient (5) avec $n = 6 \binom{3}{3} = 6$. Enfin, si $k=2$ et $f(x)$ est réductible on a $\|f^*\| \leq \sqrt{D}$ pour un f^* équivalent à f .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Pour des polynômes du second degré l'assertion est évidente (voir le cas $k=2$ dans la démonstration du théorème 2). Si $f(x)$ est irréductible, de (5), (25) et de (26) on obtient immédiatement (6') pour $k \geq 3$. Si $f(x)$ est réductible, d'après (31) on peut donc prendre dans (32)

$$\|f_i^*\| \leq \exp \exp \{ 2 (\log D)^{13} \} = c'_{20} \quad (i = 1, \dots, r)$$

et, comme nous l'avons prouvé au cours de la démonstration du théorème 2, on ob-

tient $\|f^*\| \leq c_{20}^{2k^3}$, où $k = \deg f$. Mais d'après le théorème 1 on a $k \leq 2 \left(1 + \frac{\log D}{\log 3}\right)$, d'où l'on déduit (6).

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel que $0 < |D(f)| \leq D$ et $|f(0)| \leq N$. En conséquence du théorème 3, il existe un polynôme f^* équivalent à f pour lequel $\|f^*\| \leq c_2$. De plus, d'après le théorème 1 on a $\deg f^* = \deg f \leq c_1$. Soit

$$f^*(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k,$$

où $|a_i| \leq c_2$ et soit $f(x) = f^*(x+a)$ avec un certain $a \in \mathbb{Z}$. Nous allons démontrer que $|a| \leq \max(c_1 c_2 + 1, N) = c(D, N)$. Dans le cas contraire on obtiendrait

$$\begin{aligned} |f(0)| &= |f^*(a)| = |a^k + a_1 a^{k-1} + \dots + a_k| \leq \\ &\leq |a|^k - (|a_1| + \dots + |a_k|) |a|^{k-1} \leq |a|(|a| - c_1 c_2) > N, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Par conséquent, en supposant que $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|f^*(x+a)\| \leq \max_{0 \leq s \leq k-1} \left\{ \binom{k}{s} |a|^{k-s} + c_2 |a|^{k-s-1} \left[\binom{k-1}{s} + \dots + \binom{s}{s} \right] \right\} \leq \\ &\leq c_2 c(D, N) c_1, \end{aligned}$$

et notre proposition est démontrée.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 3. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire de degré ≥ 2 et de discriminant $|D(f)| > 1$ lorsque on a nécessairement $|D(f)| \geq 3$. Alors, d'après les théorèmes 1 et 3 on obtient $\deg f \leq c_1(|D(f)|)$ et $\|f^*\| \leq c_2(|D(f)|)$ pour un polynôme f^* équivalent à f . Soit

$$f^*(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

lorsque $k = \deg f^* \leq c_1$ et $\Delta(f^*) = \Delta(f)$, $D(f^*) = D(f)$. Si $L(f^*) = 1 + |a_1| + \dots + |a_k|$, alors $L(f^*) \leq (k+1)\|f^*\|$. Ainsi, d'après un théorème de K. MAHLER [12]

$$\Delta(f^*) > 3k^{-(k+2)/2} |D(f^*)| L(f^*)^{-(k-1)} \geq |D(f^*)| \{c_2(|D(f^*)|)\}^{-c_1(|D(f^*)|)},$$

d'où l'on obtient

$$\Delta(f) > |D(f)| \{c_2(|D(f)|)\}^{-c_1(|D(f)|)} > 0.$$

NOTE AJOUTÉE AUX ÉPREUVES 1. Dans la démonstration du théorème 2, la valeur de la constante c_9 peut être considérablement diminuée dans (28'). Soient $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$, $K_{ij} = K_i(\alpha_j)$, $K_{ijl} = K_{ij}(\alpha_l)$. Pour les discriminants relatifs on a D_{K_{ij}/K_i} , $D_{K_{ijl}/K_{ij}}$, $D(\alpha)$. A l'aide de l'application successive d'un théorème de Hilbert (voir [8], p. 430.) on peut obtenir l'estimation

$$(28') \quad |D_{K_{ijl}}| \leq |N_{K_{ij}/\mathbb{Q}}(D(\alpha_i))| \cdot |N_{K_l/\mathbb{Q}}(D(\alpha_j))|^{[K_{ijl}:K_{ij}]} \cdot |D_{K_i}|^{[K_{ijl}:K_i]} \leq D^{3(k-1)^2} = c_9.$$

En calculant avec cet c_9 au cours de la démonstration, dans le théorème 2 on peut prendre

$$(5') \quad \|f^*\| \leq \exp \{ [4^{(k-1)^4} (k-1)^{11(k-1)} D^{\frac{3}{2}} (\log D)^{k-1} (k-1)^2 (4n^2 + 4n + 2)] \}, \quad \left(n = 6 \binom{k}{3} \right)$$

au lieu de (5), d'où

$$(6) \quad \|f^*\| \leq \exp \exp \{(\log D)^{\frac{3}{2}+\delta} + (\log D)^{1+\delta} + (\log D)^{\frac{\delta}{8}} \log \log D\},$$

en supposant que $\frac{3}{2}(k-1)^2(4n^2+4n+2) \leq (\log D)^\delta$ avec une constante $\delta > 0$

2. Récemment H. M. Stark (Acta Arith. 24 (1973), 251—259) a amélioré les estimations qui se trouvent dans les lemmes 2 et 3. En utilisant ces estimations récentes et l'amélioration ci-dessus de la valeur de c_9 , dans le théorème 2 on peut aisément obtenir l'estimation

$$(5'') \quad \|f^*\| \leq \exp \{c[(\log D)^{k-1} D^{\frac{3}{2}}]^{3(k-1)^2(1+\varepsilon)}\}, \quad (\varepsilon > 0 \text{ constante})$$

avec une constante $c = c(k, \varepsilon)$ calculable explicitement.

Bibliographie

- [1] A. BAKER, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, IV., *Mathematika* **15** (1968), 204—216.
- [2] A. BAKER, Contributions to the theory of Diophantine equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, **263** (1968), 173—208.
- [3] W. E. H. BERWICK, Integral bases, Cambridge Tracts, No. **22**, New York and London, 1964.
- [4] B. J. BIRCH—J. R. MERRIMAN, Finiteness theorems for binary forms with given discriminant, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 385—394.
- [5] J. COATES, An effective p -adic analogue of a theorem of Thue II., *Acta Arith.* **16** (1970), 399—412.
- [6] K. GYÖRY, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes, II., *Publ. Math. (Debrecen)* **19** (1972), 293—326.
- [7] K. GYÖRY, Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, *Acta Arith.* **23** (1973), sous presse.
- [8] H. HASSE, Zahlentheorie, Berlin, 1963.
- [9] CH. HERMITE, Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres, *J. Reine Angew. Math.* **41** (1851), 191—216.
- [10] D. HILBERT, Über diophantische Gleichungen, *Göttingen Nachr.* (1897), 48—54.
- [11] E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, III., Leipzig, 1927.
- [12] K. MAHLER, An inequality for the discriminant of a polynomial, *Mich. Math. J.* **11** (1964), 257—262.
- [13] T. NAGELL, Contributions à la théorie des modules et des anneaux algébriques, *Arkiv för Mat.* **6** (1965), 161—178.
- [14] T. NAGELL, Sur les discriminants des nombres algébriques, *Ark. för Mat.* **7** (1967), 265—282.
- [15] T. NAGELL, Quelques propriétés des nombres algébriques du quatrième degré, *Arkiv för Mat.* **7** (1969), 517—525.
- [16] O. ORE, Les corps algébriques et la théorie des idéaux, *Mémorial Sci. Math.*, **64** Paris, 1934.
- [17] C. SIEGEL, Abschätzung von Einheiten, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II*, No. **9** (1969), 71—86.
- [18] В. Г. СПРИНДЖУК, Об оценке решений уравнения Туэ, *Известия АН СССР, сер. матем.*, **36** (1972), 712—741.
- [19] P. TURÁN, Egy gráfelméleti szélsőérték-feladatról, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), 436—452.

(Reçu le 1 mars 1973 et dans une forme modifiée le 9 août 1973.)