

## О совпадении центральных рядов в сплетении, I

В. СУЩАНСКИЙ (Киев) и П. ЛАКАТОШ \*) (Дебрецен)

### Введение

Известно [2], что сплетение  $A \wr B$  групп  $A$  и  $B$  является нильпотентным тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  суть  $p$ -группы ( $p$ -простое), причем  $B$  конечная, а  $A$  имеет конечную экспоненту. Однако, установить класс нильпотентности  $A \wr B$  в общем случае не удастся. Либек [3] установил его лишь в случае, когда группы  $A$  и  $B$  абелевы.

Еще с большими трудностями связано описание верхнего или нижнего центральных рядов в сплетении. Л. А. Калужнин [1] описал полностью верхний и нижний центральные ряды для кратных сплетений циклической группы порядка  $p$  на себя. В [6] этот результат обобщается на случай кратных сплетений конечной элементарной абелевой группы на себя. Оказалось, что здесь верхний и нижний центральные ряды совпадают. Кроме этого Мельдрум [4] описал верхний  $\alpha$ -центральный ряды сплетений циклической  $p$ -группы  $A$  с конечной абелевой  $p$ -группой  $B$  (т. е. пересечения членов верхнего центрального ряда с базой сплетения). Вопрос об установлении нижнего центрального ряда сплетения хотя бы произвольных абелевых групп пока открыт.

В работе рассматриваются сплетения абелевых групп, верхний и нижний центральные ряды которых совпадают.

Установлено, что имеет место следующая теорема:

**Теорема 1.** *Нижний и верхний центральные ряды сплетения  $W = A \wr B$  двух абелевых  $p$ -групп совпадают тогда и только тогда, когда группы  $A$  и  $B$  элементарны абелевы.*

При доказательстве устанавливаются базисы членов нижнего центрального ряда сплетения циклической группы порядка  $p$  на конечную абелевую  $p$ -группу.

Напомним определение сплетения и фиксируем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть  $\{A(b)\}_{b \in B}$ -семейство изоморфных копий группы  $A$ , индексированных элементами группы  $B$  и

$$K = A^{(B)} = \prod_{b \in B} A(b)$$

---

\*) Piroska Lakatos

-прямое произведение групп этого семейства. Элементы из  $K$  можно рассматривать как отображения из  $B$  в  $A$ , которые лишь для конечного числа аргументов  $b \in B$  принимают значения, отличные от единицы. При этом, групповая операция определяется равенством

$$(f \cdot g)(b) = f(b) \cdot g(b),$$

для любого  $b \in B$ . Определим теперь мономорфизм из  $B$  в группу автоморфизмов группы  $A^{(B)}$ , сопоставляя каждому элементу  $b \in B$  автоморфизм  $f \rightarrow f^b$ , где для всех  $x \in B$  имеем  $f^b(x) = f(x \cdot b^{-1})$ . Расщепляемое расширение группы  $A^{(B)}$  при помощи группы  $B$ , рассматриваемой как группа автоморфизмов  $A^{(B)}$ , называется (ограниченным) сплетением групп  $A$  и  $B$  (в таком же порядке). Очевидно, сплетение содержит подгруппы, изоморфные  $B$  и  $K$ , которые мы будем обозначать теми же символами. Нормальный делитель  $K$  называется изомомфизмом сплетения. Нам удобно будет в дальнейшем обозначать иногда элементы из  $A^{(B)}$  в виде произведений

$$a(b_1) \cdot a(b_2) \cdot \dots \cdot a(b_t)$$

В этих обозначениях сплетение  $W$  групп  $A$  и  $B$  можно определить так:

$$W = \{K, B; b_1^{-1}a(b)b_1 = a(bb_1), a \in A; b, b_1 \in B\}.$$

Коммутатор двух элементов  $x, y$  будем обозначать символом  $[x, y]$ . Если  $b \in B$  и  $f \in K$ , то  $[f, b] = f^{-1}f^b$ . На протяжении всей статьи рассматриваются лишь нильпотентные сплетения, поэтому в дальнейшем мы всегда считаем, что  $B$  есть конечная  $p$ -группа, а  $p$ -группа  $A$  имеет конечный показатель, не оговаривая специально этого каждый раз.

## § 1. Вспомогательные результаты

При изучении групп, каждая из которых раскладывается в прямое произведение, могут оказаться полезными теоремы, устанавливающие связи между свойствами сплетений самих групп и свойствами сплетений их сомножителей.

Приведем некоторые из сюда относящихся утверждений, которые будут полезны нам в дальнейшем.

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , и  $B$ -произвольные абелевы  $p$ -группы и  $U_i = A_i \wr B$ ,  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ,  $U = A \wr B$ . Пусть также  $\varphi_i$ -естественное вложение группы  $A_i^B$  в  $A^B$  и  $\psi_i$ -проекция  $A^B$  на  $A_i^B$ . Отображение  $\varphi_i$  можно продолжить до мономорфизма  $\bar{\varphi}_i$  группы  $U_i$  в группу  $U$ , полагая для любого  $bf \in U_i$ :

$$\bar{\varphi}_i(bf) = b\varphi_i(f).$$

Образ группы  $U_i$  при этом отображении будем обозначать символом  $\bar{U}_i$ . Аналогично, проектирование  $\psi_i$  индуцирует гомоморфизмы  $\bar{\psi}_i$  группы  $U$  на группы  $U_i$ , действующие на произвольный элемент  $bf$  группы  $U$  так

$$\bar{\psi}_i(bf) = b \cdot \psi_i(f).$$

Действительно, имеем:

$$\bar{\psi}_i(b \cdot f \cdot b_1 f_1) = \bar{\psi}_i(b \cdot b_1 \cdot f \cdot f_1^b) = b \cdot b_1 \cdot \psi_i(f \cdot f_1^b) = b \cdot b_1 \psi_i(f) \psi_i(f_1^b).$$

С другой стороны

$$\bar{\psi}_i(b \cdot f) \bar{\psi}_i(b_1 f_1) = b \psi_i(f) b_1 \psi_i(f_1) = b b_1 \psi_i(f) [\psi_i(f)]^b.$$

Но, очевидно  $\psi_i(f^b) = [\psi_i(f)]^b$ , т. е. отображение  $\psi_i$  — гомоморфизм.

**Лемма 1.** (См. также [8]). *Группа  $U$  является подпрямым произведением групп  $\bar{U}_i$ .*

Действительно, любой элемент  $b \cdot f$  из  $U$  можно записать в виде  $b \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ , где  $f_i = \bar{\varphi}_i(\bar{\psi}_i(f))$ . Все элементы  $b \in B$  и  $f_i \in A_i^B$  при такой записи встречаются. Легко видеть также, что такое разложение однозначно.

Отметим, что правило умножения для элементов из  $U$ , так записанных, примет следующий вид:

$$(1') \quad b \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \cdot c \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n = b \cdot c \cdot f_1 \cdot \dots \cdot f_n \cdot g_1^b \cdot \dots \cdot g_n^b.$$

Коммутант сплетения  $U$  содержится в его базе. Поэтому элементы любого члена нижнего центрального ряда группы  $U$  (отличного от  $U$ ) можно записать в виде  $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ .

**Теорема 2.** *Элемент  $f_1 f_2 \dots f_n$  содержится в  $k$ -ом члене нижнего центрального ряда группы  $U$  тогда и только тогда, когда элементы  $\bar{f}_i = \bar{\varphi}_i^{-1}(f_i)$  содержатся в  $k$ -ых членах  $\Gamma_k(U_i)$  нижних центральных рядов групп  $U_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу  $k$ .

Случай  $k=0$ -база индукции тривиален.

Пусть  $f = f_1 f_2 \dots f_n$  содержится в  $k$ -ом члене нижнего центрального ряда группы  $U$ . Это означает, что найдутся такие элементы  $g_1, g_2, \dots, g_t$ , содержащиеся в  $\Gamma_{k-1}(U)$  и элементы  $b_1, b_2, \dots, b_t \in B$ , для которых имеем

$$f = \prod_{i=1}^t g_i^{-1} \cdot g_i^{b_i}.$$

Запишем разложение для элементов  $g_i$ :

$$g_i = g_i^{(1)} \cdot g_i^{(2)} \cdot \dots \cdot g_i^{(n)}$$

где  $g_i^{(j)} \in \bar{U}_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Легко видеть, что для каждого  $j = 1, 2, \dots, n$  имеем

$$\bar{f}_j = \prod_{i=1}^t (\overline{g_i^{(j)}})^{-1} \cdot (\overline{g_i^{(j)}})^{b_i},$$

причем, согласно предположению индукции, элементы  $\bar{g}_i^{(j)}$  содержатся в  $\Gamma_{k-1}(U_j)$ . Отсюда получаем, что элемент  $\bar{f}_i$  содержится в  $k$ -ом члене нижнего центрального ряда группы  $U_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), что и требуется.

Наоборот, если элемент  $\bar{f}_i$  содержится в  $\Gamma_k(U_i)$ , то поскольку отображение  $\bar{\varphi}_i$  есть гомоморфизм, элемент  $\bar{\varphi}_i(\bar{f}_i) = f_i$  содержится в  $k$ -ом члене нижнего центрального ряда группы  $U$ .

Значит и любое произведение  $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$  элементов  $f_i \in \bar{U}_i$ , для которых  $\bar{f}_i \in \Gamma_k(U_i)$  будет содержаться в  $\Gamma_k(U)$ . Теорема доказана.

**Следствие:** Если группы  $U_1, U_2, \dots, U_n$  нильпотентны класса  $k_1, k_2, \dots, k_n$  соответственно, то  $U$ -нильпотентная группа класса  $\max \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ .

Сформулируем и докажем теперь аналогичную теорему о строении верхнего центрального ряда группы  $U$ .

**Теорема 3.** *Элемент  $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$  содержится в  $k$ -ом члене верхнего центрального ряда  $Z_k(U)$  группы  $U$  тогда и только тогда, когда каждый из элементов  $\bar{f}_i$  содержится в  $k$ -ом члене верхнего центрального ряда  $Z_k(U_i)$  группы  $U_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).*

Доказательство снова проведем индукцией по  $k$ . Известно (см. например [7]), что центр сплетения  $U$  состоит из всех постоянных функций. Поскольку функция  $f$  постоянна тогда и только тогда, когда постоянными являются функции  $f_i$ , в случае  $k=1$  утверждение теоремы правильно.

Пусть  $f_1 = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ -элемент из  $Z_k(U)$ . Это значит, для любого  $b \in B$ ,  $[f, b] = f^{-1} \cdot f^b \in Z_{k-1}(U)$ . Поскольку группа  $A^{(B)}$  абелева, то учитывая правило умножения (1') имеем

$$\begin{aligned} f^{-1} \cdot f^b &= (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)^{-1} \cdot f_1^b \cdot f_2^b \cdot \dots \cdot f_n^b = f_1^{-1} \cdot f_2^{-1} \cdot \dots \cdot f_n^{-1} \cdot f_1^b \cdot f_2^b \cdot \dots \cdot f_n^b = \\ &= (f_1^{-1} \cdot f_1^b) \cdot (f_2^{-1} \cdot f_2^b) \cdot \dots \cdot (f_n^{-1} \cdot f_n^b). \end{aligned}$$

Так как элемент  $f^{-1} \cdot f^b$  содержится в  $Z_{k-1}(U)$ , то, согласно предположению индукции имеем, что  $f_i^{-1} \cdot f_i^b$  для каждого  $i=1, 2, \dots, n$  содержится в  $Z_{k-1}(U)$ . Учитывая, что  $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$ , получаем требуемое.

Наоборот, если  $\bar{f}_i \in Z_{k-1}(U_i)$ , то для любого  $b \in B$  элемент  $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$  содержится в  $Z_{k-1}(U_i)$ . По предположению индукции и учитывая равенство  $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$ , получаем, что  $f_i^{-1} \cdot f_i^b \in Z_{k-1}(U)$ .

Значит и любое произведение  $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$  элементов  $f_i$ , для которых  $\bar{f}_i \in Z_k(U_i)$  содержится в  $Z_k(U)$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Из доказательств теорем 2. и 3. легко усмотреть, что эти утверждения остаются правильными, если вместо конечной последовательности групп  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , рассматривать бесконечную последовательность  $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$  и полагать, что группа  $A$  является их прямым (декартовым) произведением.

Рассмотрим теперь случай, когда другая из сплетаемых групп раскладывается в прямое произведение сомножителей. При этом, в силу установленных выше теорем, можно считать, что крыша сплетения (т. е. группа  $A$ ) является циклической.

Итак, пусть  $B_1, B_2, \dots, B_n$ -произвольные конечные абелевы  $p$ -группы,  $A$ -циклическая порядка  $p^2$  и пусть  $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ ,  $V = A \wr B$ ,  $V_i = A \wr B_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Группу  $A$  будем рассматривать как аддитивную группу кольца вычетов по модулю  $p^2$  и будем обозначать символом  $*$  операцию умножения в этом кольце (групповая операция в  $A$ , как и прежде, обозначается символом  $\cdot$ ). Для каждого набора  $f_1, f_2, \dots, f_n$  элементов  $f_i \in A^{B_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) определим функцию  $f = f_1 * \dots * f_n \in K$ , полагая, что она для произвольного элемента  $b = b_1 \cdot \dots \cdot b_n \in B$  принимает значение

$$f(b) = f_1(b_1) * f_2(b_2) * \dots * f_n(b_n).$$

**Лемма 2.** *Функции вида  $f_1 * f_2 * \dots * f_n$ , где  $f_i$  пробегает всю группу  $A^{B_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  порождают группу  $K$ .*

Действительно, функции из  $K$ , принимающие неединичные значения лишь для одного элемента из  $B$ , являются системой образующих для этой группы. Но каждая такая функция, как легко видеть, может быть записана в требуемом виде.

Таким образом, любой элемент  $b \cdot f \in V$  можно записать в виде

$$b \cdot f = b \cdot \prod_{i=1}^k f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \dots * f_n^{(i)},$$

для подходящим образом выбранных элементов  $f_j^{(i)}$ . Однако, такая запись не является однозначной.

Из самого определения операции  $*$  следует, что для любых  $f_i \in A^{B_i}$  имеют место такие равенства:

- а)  $(f_1 * \dots * f_{k-1} * f_k * f_{k+1} * \dots * f_n) \cdot (f_1 * \dots * f_{k+1} * f'_k * f_{k+1} * \dots * f_n) =$   
 $= f_1 * \dots * f_{k-1} * (f_k \cdot f'_k) * f_{k+1} * \dots * f_n$
- б)  $e * f_2 * \dots * f_n = f_1 * e * \dots * f_n = f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * e = e$
- в)  $(f_1 * f_2 * \dots * f_n)^{-1} = f_1^{-1} * f_2 * \dots * f_n = f_1 * f_2^{-1} * \dots * f_n = f_1 * f_2 * \dots * f_n^{-1}$
- г)  $(f_1 * f_2 * \dots * f_n)^{(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)} = f_1^{b_1} * f_2^{b_2} * \dots * f_n^{b_n}$

(в равенстве б) символом  $e$  обозначена функция, тождественно равная единице (т. е. нулю кольца  $A$ ); в равенстве г)  $(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)$ -произвольный элемент из  $B$ ).

Приведем теперь ряд нужных коммутаторных формул, которые доказываются с использованием стандартных для вычисления коммутаторов произведений элементов а также равенств а)–г).

- (1)  $[b_i, f_1 * \dots * f_n] = (f_1 * \dots * f_n)^{-1} \cdot (f_1 * \dots * f_n)^{b_i} = (f_1 * \dots * f_i^{-1} * \dots * f_n) *$   
 $* (f_1 * \dots * f_i^{b_i} * \dots * f_n) = f_1 * \dots * f_i^{-1} * f_i^{b_i} * \dots * f_n = f_1 * \dots * [b_i, f_i] * \dots * f_n.$
- (2)  $[b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n, f_1 * f_2 * \dots * f_n] = \prod_{i=1}^n (f_1 * \dots * f_{i-1} * [b_i, f_i] * \dots * f_{i+1} * \dots * f_n)^{c_i}$

где  $c_i = b_{i+1} \cdot b_{i+2} \cdot \dots \cdot b_n$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) и  $c_n = 1$ .

$$(3) \quad \left[ b, \prod_{i=1}^k (f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}) \right] = \sum_{i=1}^k [b, f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}].$$

Определим на группах  $V$  и  $V_i$  целозначную функцию  $\varkappa(x)$ , полагая для  $bf \in V$  ( $b_i f_i \in V_i$ )  $\varkappa(b \cdot f) = k$  тогда и только тогда, когда  $bf \in \Gamma_k(V)$  ( $b_i f_i \in \Gamma_k(V_i)$ ),  $k = 0, 1, \dots$

**Теорема 4.** Если  $A$ -циклическая группа порядка  $p$ , то элемент

$$f = \prod_{i=1}^t f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}$$

содержится в  $\Gamma_k(V)$  ( $k \geq 0$ ) тогда и только тогда, когда выполняется следующее неравенство

$$d(f) = \min_i \sum_{j=1}^n \kappa(f_j^{(i)}) \geq k.$$

Доказательство снова проведем индукцией. Если  $k=0$  утверждение теоремы выполняется тривиальным образом.

Пусть элемент  $f$  содержится в  $\Gamma_k(V)$ . По определению это означает, что существуют такие элементы  $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(r)} \in B$  и  $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(r)} \in \Gamma_{k-1}(V)$  для которых имеем:

$$f = \prod_{i=1}^r [b^{(i)}, g^{(i)}].$$

Элементы  $g^{(i)}$  можно записать в виде

$$g^{(i)} = \prod_{j=1}^{s_i} g_1^{(i,j)} * g_2^{(i,j)} * \dots * g_n^{(i,j)},$$

для подходящих  $g_l^{(i,j)} \in A^{B_l}$ .

Используя это, запишем по формуле (3), элемент  $f$  так:

$$f = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{s_i} [b^{(i)}, g_1^{(i,j)} * g_2^{(i,j)} * \dots * g_n^{(i,j)}].$$

Кроме этого, так как  $b^{(i)}$  можно записать в виде  $b_1^{(i)} * b_2^{(i)} * \dots * b_n^{(i)}$ , для подходящих  $b_j^{(i)} \in B_j$ , используя формулу (2), отсюда получаем, что

$$(4) \quad f = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{s_i} \prod_{l=1}^n (g_1^{(i,j)} * \dots * [b_l, g_l^{(i,j)}] * \dots * g_n^{(i,j)})^{c_l},$$

где  $c_l$  определены как и в случае (2). Согласно предположению индукции  $d(g^{(i)}) \geq k-1$ . Отсюда поскольку  $\kappa(f^c) = \kappa(f)$ , для любых  $f$  и  $c$ , из равенства (4) получаем, что  $d(f) \geq k$ . Наоборот, если  $d(f) \geq k$ , то для любого  $i$   $\kappa(f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}) \geq k$  и (т. к.  $k > 0$ ) найдется  $l$ , для которого  $f_l \in \Gamma_k(V_l)$ . Отсюда имеем, что  $f_l = \prod_{j=1}^m [b_l^{(j)}, f_l^{(j)}]$ . Согласно равенству а) получаем

$$f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)} = \prod_{j=1}^m f_1 * \dots * [b_l^{(j)}, f_l^{(j)}] * \dots * f_n,$$

а используя (1) теперь имеем

$$f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)} = \prod_{j=1}^m [b_l^{(j)}, f_1 * \dots * f_l^{(j)} * \dots * f_n],$$

причем для каждого  $j$   $\kappa(f_1 * f_2 * \dots * f_l^{(j)} * \dots * f_n) < \kappa(f_1 * \dots * f_j * \dots * f_n)$ . Применяя те же рассуждения к элементам  $f_1 * \dots * f_l^{(j)} * \dots * f_n$ , мы можем добиться через какое-то число шагов, что элемент  $f_1 * f_2 * \dots * f_n$  запишется в виде произведения коммутаторов подходящим образом выбранных элементов  $b_l^{(n)} \in B_l$  и таких функций  $f^{(n)} = f_1 * \dots * f_l^{(n)} * \dots * f_n$ , для которых  $\kappa(f^{(n)}) = k-1$ . Согласно предположению индукции каждая из этих функций содержится в  $\Gamma_{k-1}(V_l)$ , а это означает, что  $f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)} \in \Gamma_k(V)$ , что есть и функция  $f$  там содержится.

## § 2. Условия совпадения центральных рядов сплетений абелевых групп

Рассмотрим сначала более подробно сплетение  $W_n = A \wr B$  циклической группы  $A = \{a\}$  порядка  $p$  на прямое произведение  $B = \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\}$  циклических групп  $\{b_i\}$  порядков  $p^{\alpha_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Условимся употреблять ряд удобных сокращений. Нам будут часто встречаться  $n$ -мерные векторы, координаты которых являются натуральными числами. Мы будем обозначать их как обычно:

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n).$$

В частности, полагаем

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

и для  $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$   $k$ -тое место определяем вектор  $\mathbf{e}(j_1, j_2, \dots, j_k)$  равенством

$$\mathbf{e}(j_1, j_2, \dots, j_k) = \mathbf{e}_{j_1} + \mathbf{e}_{j_2} + \dots + \mathbf{e}_{j_k}.$$

Вектор же  $\mathbf{e}(1, 2, \dots, n) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n$  обозначим просто символом  $\mathbf{e}$ . Если  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  некоторый вектор, то определяем  $p^{\mathbf{j}}$  как вектор  $(p^{j_1}, p^{j_2}, \dots, p^{j_n})$ . Для вектора

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad k_l \leq j_l \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

полагаем, что

$$C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} = C_{j_1}^{k_1} \cdot C_{j_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{j_n}^{k_n}.$$

Кратные произведения вида

$$\prod_{j_1=k_1}^{i_1} \prod_{j_2=k_2}^{i_2} \dots \prod_{j_s=k_s}^{i_s} f(j_1, j_2, \dots, j_s),$$

которые нам будут часто встречаться, мы будем обозначать так

$$\prod_{\mathbf{j}=\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{j}).$$

Удобно также функции вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} a & \text{если } x_1 = b_1^{i_1}, \quad x_2 = b_2^{i_2}, \dots, x_n = b_n^{i_n} \\ 1 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

обозначать просто символом

$$a(i_1, i_2, \dots, i_n) = a(\mathbf{i}) \quad (1 \leq i_k \leq p^{\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Эти элементы, очевидно, образуют базис абелевой группы  $K$ , то есть  $K$  является прямым произведением  $p^{\sum \alpha_i}$  экземпляров циклической группы порядка  $p$ .

Для каждого набора  $(j_1, j_2, \dots, j_n) = \mathbf{j}$ ,  $1 \leq j_k \leq p^{\alpha_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) определим теперь рекуррентно элементы

$$\alpha(i_1, i_2, \dots, i_n; j_1, j_2, \dots, j_n) = \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}),$$

полагая

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e}) &= a(\mathbf{i}), \quad \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e} + \mathbf{e}_k) = [b_k, \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e})] \\ \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= [b_k, \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j} - \mathbf{e}_k)]. \end{aligned}$$

Как показано в [5], в случае  $n=1$  имеют место следующие соотношения для элементов  $\alpha(i, j)$

$$(6) \quad \alpha(1, j) = \prod_{v=1}^j a(v)^{(-1)^{v-1} C_{j-1}^{v-1}}, \quad a(i) = \prod_{\mu=1}^i \alpha(1, \mu)^{(-1)^{\mu-1} C_{i-1}^{\mu-1}}$$

где индексы  $v$  приводят по модулю  $p^{z_1}$ .

Индукцией по числу  $n$  эти соотношения легко обобщить на произвольный случай  $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$(7) \quad \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \prod_{v=0}^{i-e} a(\mathbf{i} + \mathbf{v})^{(-1)^{v_1+v_2+\dots+v_n} C_{i-e}^v}$$

$$(8) \quad a(\mathbf{i}) = \prod_{\mu=e}^i \alpha(\mathbf{e}, \mu)^{(-1)^{(\mu_1-1)+\dots+(\mu_n-1)} C_{i-e}^{\mu-e}},$$

где координаты вектора  $\mathbf{i} + \mathbf{v}$  приводятся по модулям  $p^{z_k}$  ( $k=1, 2, \dots, n$  соответственно).

Установим теперь, для произвольного  $n$ , базы членов нижнего центрального ряда группы  $W_n$ .

**Теорема 5.** Элементы  $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{j})$ ,  $\mathbf{j}=(j_1, j_2, \dots, j_n)$ , для которых

$$\sum_{l=1}^n j_l \equiv k+n$$

образуют базис группы  $\Gamma_k(W_n)$ .

*Доказательство.* Из равенства (8) следует, что всевозможные элементы вида  $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{j})$  являются системой образующих группы  $K$ . Но поскольку их число равно  $p^{z_1+z_2+\dots+z_n}$ , ясно, что они независимы в  $K$ . Из элементов такого вида, по построению, лишь  $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{e})$  не содержится в группе  $\Gamma_1(W_n)$ . Поэтому порядок  $\Gamma_1(W_n)$  не меньше  $p^{p^{z_1+z_2+\dots+z_n}-1}$ , так как  $K \neq \Gamma_1(W_n)$ , этот порядок, в действительности, и равен  $p^{p^{z_1+z_2+\dots+z_n}-1}$ . Т.е. при  $k=1$  утверждение справедливо.

Равенства (2) из §1, применительно к нашему случаю можно переписать следующим образом:

$$[b_1^{k_1} \cdot b_2^{k_2} \cdot \dots \cdot b_n^{k_n}, a(\mathbf{i})] = b_n^{k_n}, a(\mathbf{i} + \mathbf{k}_n)] \cdot [b_{n-1}^{k_{n-1}}, a(\mathbf{i} + \mathbf{k}_{n-1})] \cdot \dots \cdot [b_1^{k_1}, a(\mathbf{i} + \mathbf{k}_1)]$$

где  $0 \equiv k_i < p^{z_i}$ ,

$$\mathbf{k}_i = (k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, 0, \dots, 0) \quad (i=2, \dots, n), \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{0}.$$

Из этих равенств следует, что можно определить базис группы  $\Gamma_k(W_n) = [W_n, \Gamma_{k-1}(W_n)]$  как совокупность коммутаторов базисных элементов  $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{j})$  группы  $\Gamma_{k-1}(W_k)$  с элементами  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Теперь доказательство легко завершается индукцией по числу  $k$ .

Отметим, что равенства (6) и теорема 4. дают возможность легко определить класс нильпотентности группы  $W_n$  (см. [3]). В самом деле, при  $n=1$ , поскольку  $C_{p^{z_1}-1}^i \equiv (-1)^i \pmod{p}$ , элемент  $\alpha(1, p^{z_1})$  содержится в центре групп  $W_n$ , т.е. нильпотентна класса  $p^{z_1}$ . Используя теорему 4, получаем отсюда, что  $W_n$  является, для любого  $n \geq 1$ , нильпотентной класса  $s=p^{z_1}+p^{z_2}+\dots+p^{z_n}-n+1$ .

**Теорема 6.** В сплетении  $\overline{W}_n = C_p \wr C_p^{(n)}$  верхний и нижний центральные ряды совпадают.

Доказательство. В случае, когда  $n=1$  эта группа детально изучена в [1]. В этой работе установлено, что элементы этой группы можно представлять в виде таблиц  $[a, a(x)]$ , где  $a \in Z_p$ ,  $a(x)$ -многочлен степени не выше  $p-1$  над  $Z_p$  ( $Z_p$ -поле из  $p$  элементов).

Группа  $C_p \wr C_p$  является нильпотентной класса  $p$ . Причем элемент из этой группы содержится в ее  $k$ -том члене нижнего центрального ряда или  $p-k$ -ом члене верхнего ( $k \geq 1$ ) тогда и только тогда когда ему соответствует таблица вида  $[0, a(x)]$ , где ст.  $a(x) \leq p-1-k$  [8]. Согласно рассуждениям из §1 отсюда имеем, что любой элемент из  $C_p \wr C_p^{(n)}$  представляется таблицей  $[(a_1, a_2, \dots, a_n), a(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , где  $a_i \in Z_p$ ,  $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -многочлен от  $n$  неизвестных с коэффициентами из  $Z_p$ , причем все неизвестные входят в него в степенях, которые не превышают  $p-1$ . Согласно теореме 4 таблица вида  $[(0, \dots, 0), a(x_1, \dots, x_n)]$  будет содержаться в  $k$ -ом члене нижнего центрального ряда из  $\overline{W}_n$  ( $k \geq 1$ ) тогда и только тогда, когда  $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно представить в виде суммы  $\sum_j a_1^{(j)}(x_1) \cdot a_2^{(j)}(x_2) \cdot \dots \cdot a_n^{(j)}(x_n)$  произведений многочленов от одного неизвестного, причем для любого  $j$  ст.  $a_1^{(j)}(x_1) + \text{ст. } a_2^{(j)}(x_2) + \dots + \text{ст. } a_n^{(j)}(x_n) \leq n(p-1)-k$ . Поскольку любой многочлен степени  $n(p-1)-k$  и ниже можно так представить, отсюда имеем, что  $\Gamma_k(\overline{W}_n)$  состоит из всех таблиц вида  $[(0, \dots, 0), a(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , где ст.  $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq n(p-1)-k$ . А так как для любой группы  $G$  степени нильпотентности  $t$  имеем  $Z_k(G) \supseteq \Gamma_{t-k}(G)$ , для доказательства теоремы достаточно убедиться, что элементу, который содержится в  $Z_k(\overline{W}_n)$  соответствует таблица вида  $[(0, \dots, 0), c(x_1, \dots, x_n)]$  где ст.  $c(x_1, \dots, x_n) \leq k-1$ . Это легко проверяется непосредственно, индукцией по  $k$ .

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1., сформулированной во введении.

Достаточность условия этой теоремы следует из теорем 2, 3, замечания к ним и теоремы 6.

Поэтому остается доказать лишь необходимость условия. Покажем сначала, что в группе  $W_n$ , для которой  $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \geq 2$ , подгруппа  $Z_{s-2}(W_n)$ -неабелева, т. е.  $Z_{s-2}(W_n) \neq \Gamma_2(W_n)$  ( $s$  — класс нильпотентности  $W_n$ ). Пусть  $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \alpha_m$ ,  $1 \leq m \leq n$ . Согласно теореме 5, для любого вектора  $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  ( $0 \leq i_l \leq p^{\alpha_l}$ ;  $l=1, 2, \dots, n$ ) элемент

$$\alpha(i, e + p^{\alpha_m-1}e_m) = \prod_{v_m=0}^{p^{\alpha_m-1}} a(i + v_m e_m) = a(i) a^{-1}(i + p^{\alpha_m-1}e_m) = [b^{p^{\alpha_m-1}}, a(i)]$$

содержится в подгруппе  $\Gamma_{p^{\alpha_m-1}}(W_n)$ , т. е. содержится также и в подгруппе  $Z_{s-p^{\alpha_m-1}}(W_n)$ . Это означает, что для произвольного элемента  $a(i)$  из базиса подгруппы  $K$  имеет место включение  $[b_m^{p^{\alpha_m-1}}, a(i)] \in Z_{s-p^{\alpha_m-1}}(W_n)$ .

Таким образом взаимный коммутант  $[\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}, K]$  подгрупп  $\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}$  и  $K$  содержится в  $s-p^{\alpha_m-1}$  члене верхнего центрального ряда группы  $W_m$ . То есть фактор-группа

$$\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\} \cdot Z_{s-p^{\alpha_m-1}} / Z_{s-p^{\alpha_m-1}}$$

содержится в центре группы  $W_n/Z_{s-p\alpha_m-1}^1$ . Иными словами, циклическая подгруппа  $\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}$  содержится в  $Z_{s-p\alpha_m-1+1}(W_n)$ . Поскольку для любых  $p, \alpha_m$  имеем  $Z_{s-p\alpha_m-1} \subseteq Z_{s-2}(W_n)$ , то  $Z_{s-2}(W_n)$  всегда является неабелевой подгруппой.

Из только что доказанного следует, что верхний центральный ряд сплетения  $A \geq \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\}$  ( $b_i^{p^{\alpha_i}} \equiv 1$ ,  $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \geq 2$ ) содержит неабелевы члены ряда при любой нетривиальной  $p$ -группе  $A$ . Это следует из того, что, поскольку в группе  $A$  всегда можно выбрать циклическую подгруппу порядка  $p$ , сплетение  $A \geq \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\}$  содержит подгруппу, изоморфную  $W_n$ , для которой это имеет место.

Поэтому для окончания доказательства, в силу теорем 2. и 3., достаточно рассмотреть сплетение

$$\{a\} \geq \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\} \quad \text{где} \quad a^{p^\alpha} = 1, \quad \alpha > 2, \quad b_i^p = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть  $n=1$ . Используя равенства (6) имеем для элемента

$$\begin{aligned} x &= a(1) \cdot a(2) \cdot \dots \cdot a(p)^{p^{\alpha-2}} = \prod_{v=1}^p \alpha(1, v)^{(-1)^{v-1} C_p^v \cdot p^{\alpha-2}} = \\ &= \alpha(1, 1)^{p^{\alpha-2} C_p^1} = \alpha(1, 1)^{p^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

где

$$\alpha(1, 1) = \alpha(1), \quad \alpha(1, x) = [b_1, \alpha(1, k-1)] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поскольку, согласно теореме 5 подгруппа  $\Gamma_1(\{a\} \geq \{b_1\})$  порождается элементами  $\alpha(1, 2), \alpha(1, 3), \dots, \alpha(1, p)$ , элемент  $x$  не содержится в ней. Но ясно, что  $x$  содержится в центре этого сплетения. Таким образом при  $n=1$  все установлено.

Если же  $n > 1$ , то, согласно теореме 4, элемент  $\underbrace{x * x * \dots * x}_n$  не содержится в коммутанте сплетения, но очевидно содержится в его центре.

Теорема 1. полностью доказана.

### Литература

- [1] L. Kaloujnine, La structure de  $p$ -groupes de Sylow des des groupes symetriques finis. *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, **68** (1948), 239—276.
- [2] G. Baumslag, Wreath products and  $p$ -groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **55** (1959), 224—231.
- [3] H. Liebeck, Concerning nilpotent wreath products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58**. (1962), 443—451.
- [4] L. Meldrum, Central series in wreath products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **63**. (1963), 551—567.
- [5] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской  $p$ -подгруппы симметрической группы  $S_{p,n}$ , *Publ. Math.* **16**. (1969), 199—227.
- [6] В. И. Суцанский, Сплетения элементарных абелевых групп., *Мат. заметки II*. № I. (1972), 61—72.
- [7] P. Neuman, On the structure of standard wreath products of groups, *Math. Z.*, **84**. (1964), 344—373.
- [8] Л. А. Калужнин, В. И. Суцанский, О сплетениях абелевых групп, *Труды Моск. Мат. общества*, т. **29** (1973), 147—163.

(Поступила: 16. II. 1974.)