

Algebraische Beispiele ebener und räumlicher Zindler-Kurven

Von W. WUNDERLICH (Wien)

1. Unter einer *Kurve konstanter Breite* — oder kurz einem „Gleichdick“ — versteht man in der euklidischen Ebene ein *Oval* p , für welches die Paare paralleler Stützgeraden einen festen, von der Richtung unabhängigen Abstand $2a$ haben; die Verbindungsstrecke der beiden Stützpunkte $P, \bar{P}$ paralleler Stützgeraden ist zu diesen normal. Ist das Gleichdick p zweimal stetig differenzierbar, dann existiert die von den ∞^1 Doppelnormalen $P\bar{P}$ eingehüllte *Evolute* p^* , die ganz im Inneren von p verläuft und mindestens drei Spitzen aufweist, jedenfalls aber eine ungerade Anzahl. Gibt man umgekehrt eine derartige Kurve p^* vor, die in jeder Richtung nur eine einzige Tangente besitzt, und läßt man auf ihr eine Gerade g abrollen, so beschreibt jeder Punkt $P \in g$ eine geschlossene Evolvente p von p^* , die gleichzeitig auch von jenem Punkt $\bar{P} \in g$ durchlaufen wird, den P nach einer vollen Umwälzung erreicht. Bei hinreichender Entfernung von P fällt p konvex aus und ist ein Gleichdick. Der Mittelpunkt C der Strecke $P\bar{P}$ wandert auf einer doppelt überdeckten Evolvente c , von der p eine auf beiden Seiten verlaufende Parallelkurve ist. Wegen der parallelen Lage der Tangenten in P und $\bar{P}$ könnte man die Kurve p als „autoparallel“ bezeichnen.

Sei $Q\bar{Q}$ die aus $P\bar{P}$ durch Viertelschwenkung um C hervorgehende Strecke. Ihre Endpunkte erfüllen eine gemeinsame Ortslinie q , bekannt unter dem Namen *Zindler-Kurve*. Kinematisch entsteht sie durch dieselbe Rollbewegung von g auf p^* , nämlich als Bahn von Q ; sie wird aber gleichzeitig auch von dem zu Q bezüglich g spiegelbildlichen Punkt $\bar{Q}$ durchlaufen, wohin Q nach einer ganzen Umwälzung gelangt (vgl. Abb. 1). Die „Hauptsehne“ $Q\bar{Q}$ hat in jeder Lage die bemerkenswerte Eigenschaft, die Kurve q und das von ihr berandete (nicht notwendig konvexe) Gebiet zu halbieren. Eine ausführliche Monographie über die (ebenen) Zindler-Kurven hat K. L. MAMPEL [5] verfaßt.

K. ZINDLER hat um 1920 nach ebenen, im Endlichen geschlossenen doppel-punktfreien Kurven gefragt, welche mit dem Kreis die Eigenschaft teilen, daß jede der ∞^1 den Umfang halbierenden Sehnen auch die Fläche des umschlossenen Bereiches in die Hälfte teilt [9]. Faßt man eine solche Sehne $Q\bar{Q}$ als Repräsentanten eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems auf, dann müssen die Bahngeschwindigkeiten der Endpunkte auf Grund der ersten Forderung gleichen Betrag haben, auf Grund der zweiten hingegen entgegengesetzt gleiche Komponenten normal zu $Q\bar{Q}$.

Aus beiden Bedingungen zusammen folgt, daß auch die Komponenten in Sehnenrichtung gleichen Betrag haben müssen; dies bedeutet, daß die Sehne in beiden Randpunkten *gleiche Winkel* mit der Kurve bildet. Sind die beiden letztgenannten Komponenten entgegengesetzt gerichtet, so hat der Mittelpunkt C der Sehne $Q\bar{Q}$ die Geschwindigkeit Null, bleibt also *fest*, und man gelangt zu *zentrisch-symmetrischen Kurven*, welche das Problem in trivialer Weise lösen. Sind die Komponenten in Sehnenrichtung hingegen auch dem Vorzeichen nach gleich, so hat die veränderliche Sehne $Q\bar{Q}$ *konstante Länge*, und das von ihr repräsentierte ebene System ist *starr*. Das nach der Theorie der ebenen Kinematik vorhandene *Momentanzentrum* M für die Sehnenbewegung ist im Schnitt der beiden Bahnnormalen von Q und $\bar{Q}$ zu erhalten und gehört daher der Sehnensymmetrale g an, welche als Gangpolkurve fungiert und im Lauf der Bewegung auf einer gewissen Rastpolkurve p^* abrollt. Gibt man umgekehrt p^* vor — als in jeder Richtung nur eine Tangente besitzende und daher mindestens dreispitzige Kurve —, so hat man die Basis für die *kinematische Erzeugung* einer Schar von Zindler-Kurven (Abb. 1): Man läßt eine Gerade g auf p^* abrollen und markiert die Lage $\bar{P}$, die ein beliebiger Punkt $P \in g$ nach einer Umwälzung auf $\bar{g} = g$ einnimmt; wählt man sodann auf der Symmetrale von $P\bar{P}$ zwei zu g spiegelbildliche Punkte $Q, \bar{Q}$ in hinreichender Entfernung, so durchlaufen dieselben bei dem Rollvorgang eine Zindler-Kurve q als gemeinsame Bahn.

Einfacher geht man aber von der Bahn c des Mittelpunktes C der Strecke $P\bar{P}$ aus, die man als im Endlichen geschlossene, in jeder Richtung nur eine Tangente aufweisende Kurve annehmen kann. Man hat dann bloß auf allen Tangenten vom Berührungspunkt weg die gleiche Strecke $CQ = C\bar{Q} = a$ aufzutragen; bei genügend großem a entsteht auf diese Weise eine *Zindler-Kurve* q .

2. Zur Konstruktion eines *algebraischen Beispiels* wurde in Abb. 1 als Mittenbahn c die *Steiner-Zykloide* (dreispitzige Hypozykloide) gewählt, die in komplexer Form durch

$$(2.1) \quad x + iy = e^{2iu} + 2e^{-iu} \quad (0 \leq u < 2\pi)$$

angesetzt werden kann. Für den Tangentenvektor findet man

$$(2.2) \quad \dot{x} + i\dot{y} = 2i(e^{2iu} - e^{-iu}) = \lambda \cdot e^{iu/2} \quad \text{mit} \quad \lambda = -4 \sin(3u/2).$$

Die schon von K. ZINDLER [9] erwähnte, vermutlich auch der Illustration bei K. STRUBECKER [6] zugrundeliegende *Zindler-Kurve* q wird dann dargestellt durch

$$(2.3) \quad X + iY = e^{2iu} + 2e^{-iu} + a \cdot e^{iu/2}.$$

Es handelt sich um eine *Radlinie* 3. Stufe der Familie mit der Charakteristik $-2:1:4$ [7], ist also von 8. Ordnung. Gemäß (2.3) entsteht diese (höhere) Radlinie q als Bahn des Endpunktes eines dreigliedrigen, im Ursprung O befestigten Gelenkpolygons, dessen Seiten die Längen 1, 2 und a haben und mit den konstanten Geschwindigkeiten 4, -2 und 1 rotieren (vgl. Abb. 1, wo $a=6$ gewählt wurde). Für $a > 16/3\sqrt{3} \approx 3,0792$ fällt q doppelpunktfrei aus, für $a > 4$ haben die Hauptsehnen mit q nur die Randpunkte gemein, und für $a \geq 24$ ist q sogar konvex; erst ab $a \geq 8$ ist q von einem Gleichdick p ableitbar.

Allgemeiner könnte man von der $(2n+1)$ -spitzigen Hypozykloide

$$(2.4) \quad x + iy = n \cdot e^{(n+1)iu} + (n+1) e^{-niu} \quad (n \geq 1, \text{ ganz})$$

ausgehen; sie besitzt ebenfalls den Tangentenvektor $e^{iu/2}$. Die davon mittels der Tangentenstrecke a abgeleitete Zindler-Kurve q ist wieder eine Radlinie 3. Stufe, erzeugbar durch ein Gelenkpolygon mit den Seiten $n, n+1$ und a , die (mit einer Strecklage beginnend) mit den Geschwindigkeiten $2(n+1), -2n$ und 1 rotieren. Ihre Ordnung ist $4(n+1)$, und sie fällt für $a \geq 4n(n+1)(2n+1)$ konvex aus. Die Forderung, daß die Hauptsehn mit q nur die Randpunkte gemeinsam haben sollen, ist erfüllt, wenn q außerhalb von c bleibt. Dies wird durch $a \geq 4n+2$ gesichert, weil q dann nicht einmal in den Spitzenkreis von c eindringt; die genaue Schranke $a_{\min}$ läßt sich allgemein kaum angeben, doch gilt die grobe Abschätzung $2n+2 \leq a_{\min} < 4n+2$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $n=1$ in Betracht kommt.

3. Eine räumliche Verallgemeinerung des Begriffs der Zindler-Kurve hat kürzlich J. HOSCHEK [3] betrachtet, wobei er von bestimmten Raumkurven konstanter Breite ausging. Nach M. FUJIWARA [2] hat eine geschlossene, glatte Raumkurve p konstante Breite, wenn sie ein System von ∞^1 Doppelnormalen besitzt. Diese erfüllen eine im allgemeinen windschiefe, einseitige Regelfläche Φ , und umgekehrt fällt jede Orthogonaltrajektorie einer einseitigen Regelfläche ohne Fernerzeugenden stets geschlossen aus und stellt eine Raumkurve konstanter Breite dar. Die beiden Tangenten in den Endpunkten einer Doppelnormale sind dabei für gewöhnlich nicht parallel.

Eine besondere Klasse bilden daher die als „transnormal“ bezeichneten Raumkurven konstanter Breite, bei welchen die Endtangenten für jede Doppelnormale parallel sind; mit gutem Grund könnten diese Raumkurven auch als „autoparallel“ angesprochen werden. Sie sind offenbar dadurch gekennzeichnet, daß ihre ∞^1 Normalebenen durchwegs Doppelnormalebenen sind. Einfache Beispiele bieten die sphärischen Gleichdicke.

Bei der Bewegung der Endpunkte $P, \bar{P}$ der Doppelnormale g längs einer glatten autoparallelen Raumkurve p sind die Fortschreitrichtungen aller Punkte von g parallel. Die Gerade g überstreicht mithin eine abwickelbare Fläche Φ und hüllt dabei — zweimalige stetige Differenzierbarkeit von p vorausgesetzt — die Gratlinie p^* von Φ ein. Die genannte Bewegung kann als Rollvorgang der gemeinsamen Normalebene $\gamma \supset g$ von p in P und $\bar{P}$ auf der von γ umhüllten Polartorse (Evolutentorse) Π von p aufgefaßt werden. Die Kurve p und ebenso die (gleichfalls auf Φ verlaufende) Bahn c des Mittelpunktes C der Strecke $P\bar{P}$

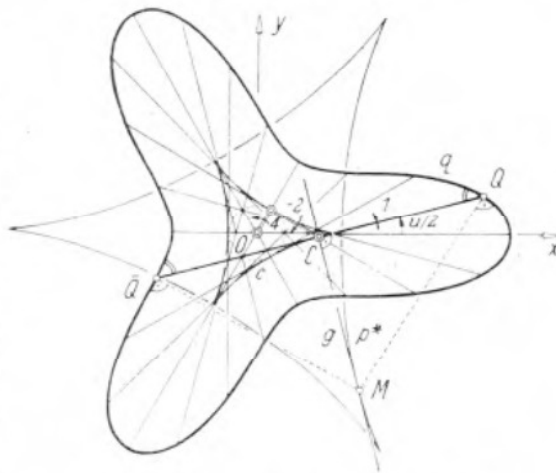


Abb. 1. Ebene Zindler-Kurve 8. Ordnung, abgeleitet von der dreispitzigen Hypozykloide.

sind mithin *Planevolventen* der Torse Π , also räumliche Parallelkurven. Gleichzeitig sind sie *Filarevolventen* der Gratlinie p^* von Φ , welche eine geodätische Linie von Π darstellt.

HOSCHEK unterwirft nun die Strecke $P\bar{P}$ einer Viertelschwenkung um ihren Mittelpunkt C , sodaß sie parallel zur gemeinsamen Fortschreitrichtung von P , $\bar{P}$ und C wird. Die so erhaltene Strecke $Q\bar{Q}$ unveränderlicher Länge berührt die „Mittellinie“ c in C , und ihre Endpunkte durchlaufen eine gemeinsame Bahn q , weil der einmal stattfindende Platztausch von P und $\bar{P}$ einen entsprechenden Wechsel von Q und $\bar{Q}$ nach sich zieht. Die so erklärte Kurve q wird als *räumliche Zindler-Kurve* bezeichnet. In der Tat bestehen bei ihr die wesentlichen Eigenschaften der ebenen Zindler-Kurven weiter. Die Rollbewegung der Symmetralebene γ der Sehne $Q\bar{Q}$ auf der Torse Π kann nämlich in jedem Augenblick als infinitesimale Drehung um die Berührungserzeugende m (Momentanachse) angesehen werden, sodaß die Bahngeschwindigkeiten der von m gleich weit entfernten Punkte Q und $\bar{Q}$ jeweils gleichen Betrag haben. Dies bedeutet, daß die ∞^1 „Hauptsehn“ $Q\bar{Q}$ der Kurve q deren Umfang stets halbieren; ferner bilden sie (wegen $m \perp Q\bar{Q}$) in ihren Endpunkten jeweils gleiche Winkel mit q . Weiters erkennt man aus der gleichen Vorstellung, daß die beiden Sehnenhälften CQ und $C\bar{Q}$ jeweils gleiche Flächenelemente überstreichen. Dies hat zur Folge, daß der längs der Gratlinie c aufgeschnittene und von q berandete, einfach zusammenhängende Mantel der die Hauptsehn $Q\bar{Q}$ tragenden Torse Ψ durch die Halbsehn CQ und $C\bar{Q}$ stets halbiert wird.

4. J. HOSCHEK hat in [3] nicht hervorgehoben, daß die von den Hauptsehn $Q\bar{Q}$ der räumlichen Zindler-Kurve q erzeugte Regelfläche Ψ *abwickelbar* ist und die Mittellinie c zur Gratlinie hat. Damit ergibt sich aber eine einfache Konstruktion von räumlichen Zindler-Kurven durch *Vorgabe der Mittellinie* c , die allerdings gewisse einfache Bedingungen erfüllen muß: Man braucht bloß auf ihren Tangenten vom Berührungspunkt C weg nach beiden Seiten Strecken fester Länge a aufzutragen. Damit die so erreichten Endpunkte Q und $\bar{Q}$ eine einzige, geschlossene Kurve q erfüllen, muß die im Endlichen geschlossene Mittellinie c offenbar eine *ungerade Anzahl von Spitzen* aufweisen. Jedenfalls ist es auf diese Weise nicht nötig, auf eine Raumkurve konstanter Breite zurückzugreifen.

Daß jede auf die angegebene Art von einer passend gewählten Mittellinie c abgeleitete Kurve q tatsächlich die oben angeführten Eigenschaften einer Zindler-Kurve besitzt — Hauptsehn konstanter Länge $2a$, welche q unter jeweils gleichen Winkeln treffen und den Umfang von q sowie die Hauptsehnfläche Ψ halbieren —, liegt auf der Hand. Man kann ja die Gleitbewegung der Sehne $Q\bar{Q}$ längs c wieder als Rollbewegung der Symmetralebene γ auf der Polartorse Π von c auffassen. Man wird wohl nur noch fordern, daß die gemeinsame Bahn q der Sehnenden keine Doppelpunkte aufweisen möge, damit in jedem Punkt von q nur eine einzige Hauptsehne endet.

Es bleibt bloß noch zu klären, ob jede solcherart konstruierte Zindler-Kurve q auch von einer Raumkurve konstanter Breite $2a$ abgeleitet werden könnte. Zu diesem Zweck lasse man den Führungspunkt C die Mittellinie c einmal voll durchlaufen. Die mitgenommene Normalebene γ gelangt vermöge der zugehörigen Rollbewegung auf Π in eine Lage $\bar{\gamma}$, die sich mit γ deckt, wobei sie sich jedoch

wegen der ungeraden Spitzenanzahl von c umgewendet hat. Die gegensinnig-kongruenten Felder in γ und $\bar{\gamma}$ hängen nun durch Spiegelung an einer durch $C=\bar{C}$ gehenden Achse h zusammen. Zwei in γ spiegelbildlich bezüglich h markierte Punkte P und $\bar{P}$ durchlaufen mithin eine gemeinsame und sicher im Endlichen geschlossene autoparallele Bahn p . Wählt man P und $\bar{P}$ insbesondere auf dem in C errichteten Lot von h in den Abständen $\pm a$, so erhält man eine Bahn p mit der Mittellinie c , die aber nicht unbedingt eine Kurve konstanter Breite sein muß, insbesondere nicht für relativ kleines a . Ist dies unter günstigen Umständen aber doch der Fall, dann kann man durch Viertelschwenkung der Doppelnormalen $P\bar{P}$ von p auch auf diese Weise zur Zindler-Kurve q gelangen. — Da nun bei den räumlichen Zindler-Kurven die Hauptsehnslänge $2a$ im allgemeinen keiner Beschränkung nach unten unterworfen sein wird, so erhält man mittels der Konstruktion aus der angenommenen Mittellinie c eine *umfassendere Klasse* als durch die Ableitung von Raumkurven konstanter Breite.

5. Im Anschluß an seine Entwicklungen in [3] hat J. HOSCHEK ein konkretes Beispiel einer Zindlerschen Raumkurve angegeben. Er geht dabei vom Richtkegel der Hauptsehn aus, den er durch sein zentralsymmetrisches sphärisches Bild festlegt; hierfür wählt er eine bei W. BLASCHKE [1] erwähnte, hochtranszendente Kurve. Die zur Ermittlung der zugehörigen Raumkurve p konstanter Breite erforderlichen Integrationen, welche noch die Annahme einer bestimmten periodischen Skalarfunktion gestatten, jedoch die Erfüllung einer Schließungsbedingung verlangen, sind nur mit dem Computer ausführbar. Die anschließende Viertelschwenkung der Hauptsehn gemäß Abschnitt 3 führt dann zur entsprechenden Zindler-Kurve q .

Geht man hingegen direkt von der Mittellinie c aus, bei der im wesentlichen bloß auf eine ungerade Anzahl von Spitzen zu achten ist, so gelangt man gemäß Abschnitt 5 durch bloßes Anfügen von Tangentenstrecken konstanter Länge weitaus einfacher (vor allem ohne Integrationen) zum Ziel. Insbesondere erhält man bei Annahme einer algebraischen Mittellinie ohne weiteres *algebraische Zindlersche Raumkurven*.

Für ein konkretes Beispiel wird im folgenden als Mittellinie c eine Kurve auf dem Drehparaboloid $x^2 + y^2 = 6z$ gewählt, die im Normalriß auf die Scheiteltangentialebene $z=0$ als Steiner-Zykloide erscheint, also als dreispitzige Hypozykloide (2.1). Sie wird dargestellt durch

$$(5.1) \quad x = \cos 2u + 2 \cos u, \quad y = \sin 2u - 2 \sin u, \quad z = \frac{1}{6}(5 + 4 \cos 3u).$$

Kurven dieser Art erfreuen sich bemerkenswerter Eigenschaften und wurden vom Verfasser kürzlich untersucht [8].

Die Fortschreitrichtung $\dot{x}:\dot{y}:\dot{z}$ kann repräsentiert werden durch den Tangentenvektor mit den Komponenten

$$(5.2) \quad \xi = \cos \frac{u}{2}, \quad \eta = \sin \frac{u}{2}, \quad \zeta = \cos \frac{3u}{2}.$$

Nach Anbringung im Ursprung variiert sein Endpunkt auf einer der von W. KAUTNY [4] betrachteten „Umschwingkurven“ eines Drehzylinders, was bei der darstellend-geometrischen Durchführung der Konstruktion gute Dienste leistet. Die durch

Auftragen der Tangentenstrecke fester Länge a gewonnene *Zindler-Kurve* q wird nun beschrieben durch

$$(5.3) \quad X = x + \frac{a\zeta}{\omega}, \quad Y = y + \frac{a\eta}{\omega}, \quad Z = z + \frac{a\zeta}{\omega}$$

$$\text{mit } \omega^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}(3 + \cos 3u)$$

und ist offensichtlich algebraisch. Zur Feststellung ihrer Ordnung gehe man zu den komplexen Koordinaten $X \pm iY$ über und führe den algebraisierenden Parameter $t = e^{iu}$ ein. Es ergibt sich

$$(5.4) \quad X + iY = t^2 + 2t^{-1} + \frac{2a}{w}t^2, \quad X - iY = t^{-2} + 2t + \frac{2a}{w}t,$$

$$Z = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}(t^3 + t^{-3}) + \frac{a}{w}(t^3 + 1) \quad \text{mit } w^2 = t^6 + 6t^3 + 1.$$

Der Schnitt von q mit einer Ebene

$$(5.5) \quad A(X + iY) + \bar{A}(X - iY) + BZ + C = 0$$

führt auf eine algebraische Gleichung in t , die sich nach Wegschaffen der Quadratwurzel w als vom Grad 18 erweist. Die vorliegende, in Abb. 2 (mit $a=6$) dargestellte Zindler-Kurve ist daher eine *Raumkurve 18. Ordnung*, und zwar vom Geschlecht 2, wie die eineindeutige Abbildung auf die über die Substitution $w = t^3 + v$ definierte Quartik $2t^3v - 6t^3 + v^2 - 1 = 0$ lehrt, welche nur eine einzige Singularität (in Gestalt einer Spitze) aufweist.

Es sei noch vermerkt, daß die dreispitzige Mittellinie c (5.1) eine dreifachsymmetrische, rationale Raumkurve 6. Ordnung ist. Die in Abb. 2 ebenfalls dargestellte *Hauptsehnenfläche* Ψ ist eine Torse 6. Klasse und 7. Ordnung; die besitzt drei in den Symmetrieebenen verlaufende kubische Parabeln zu Doppelkurven, darunter die Kurve $y=0, 6z = -x^3 + 6x^2 - 3x - 9$.

6. Im Gegensatz zu Satz 4 in [3] gibt es aber doch schon räumliche Zindler-Kurven, deren Mittellinie c nur eine *einzige Spitze* aufweist. Zum Nachweis dieser Behauptung ersetze man die Steiner-Zykloide in Abschnitt 5 durch eine *Kardioide* (einspitzige Epizykloide). Man erhält dann auf dem Drehparaboloid eine gespitzte sphärische Quartik als Mittellinie. Um aber die symmetriebedingten Doppelpunkte (Selbstschnitte) der davon abgeleiteten Zindler-Kurve (10. Ordnung) zu vermeiden, mag man vorher auf die Quartik eine den Grundriß erhaltende Affinität ausüben. Die Mittellinie c sei daher angesetzt durch

$$(6.1) \quad x = 2 \cos u - \cos 2u, \quad y = 2 \sin u - \sin 2u,$$

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2y) = \frac{5}{2} - 2 \cos u + 2 \sin u - \sin 2u.$$

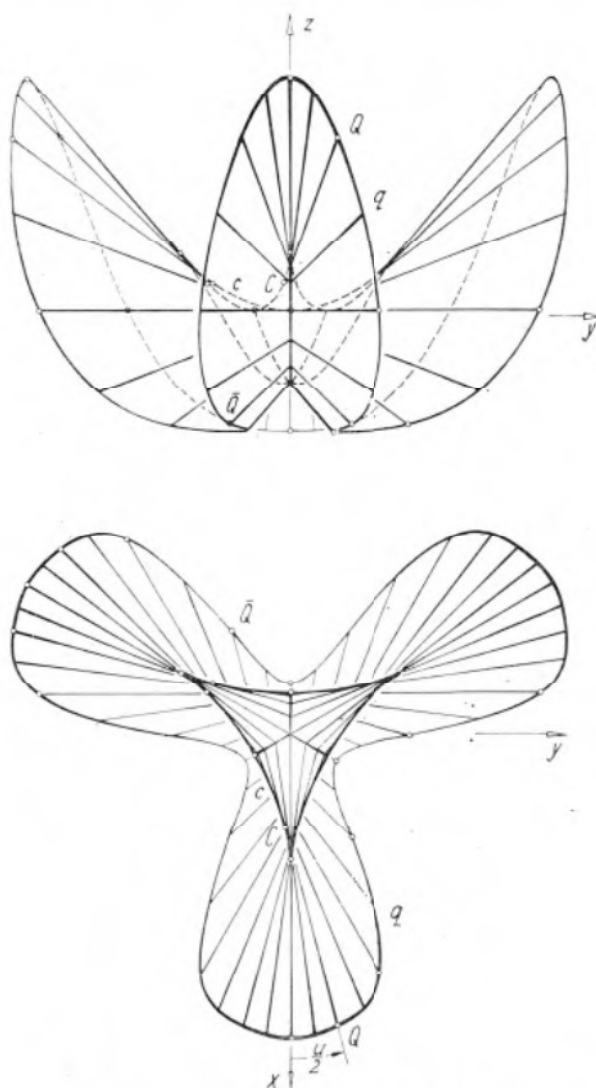


Abb. 2. Räumliche Zindler-Kurve 18. Ordnung, abgeleitet von einer dreispitzigen Mittellinie 6. Ordnung.

Aus der Fortschreitrichtung

$$(6.2) \quad \dot{x} : \dot{y} : \dot{z} = \cos \frac{3u}{2} : \sin \frac{3u}{2} : \left(\cos \frac{u}{2} + \sin \frac{3u}{2} \right)$$

ergibt sich der Tangentenvektor mit den Komponenten

$$(6.3) \quad \xi = \cos \frac{3u}{2}, \quad \eta = \sin \frac{3u}{2}, \quad \zeta = \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{3u}{2},$$

dessen Spitze auf einer affinen Umschungskurve variiert. Die durch (5.3) mit

$$(6.4) \quad \omega^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2} (4 + \cos u + 2 \sin u + 2 \sin 2u - \cos 3u)$$

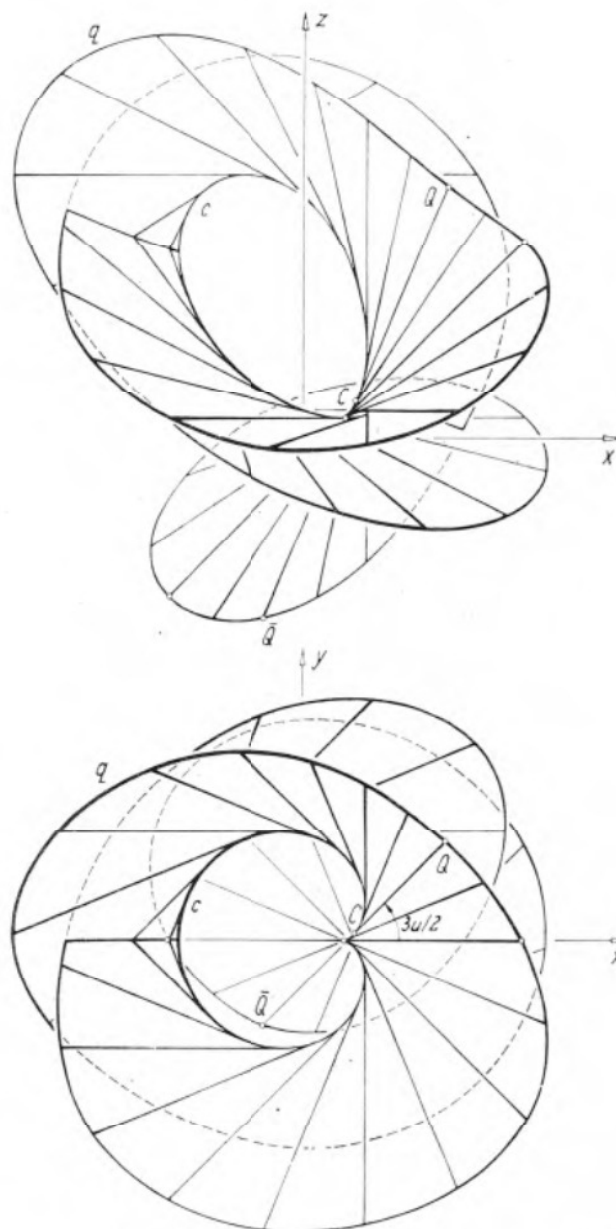


Abb. 3. Räumliche Zindler-Kurve 14. Ordnung,
abgeleitet von einer einspitzigen Mittellinie 4. Ordnung.

beschriebene *Zindler-Kurve* q wird dann in komplexer Form mit Hilfe des Parameters $t = e^{iu}$ dargestellt durch:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} X + iY &= 2t - t^2 + \frac{2ia}{w} t^3, & X - iY &= 2t^{-1} - t^{-2} + \frac{2ia}{w}, \\ Z &= \frac{5}{2} - (1+i)t - (1-i)t^{-1} + \frac{i}{2}(t^2 + t^{-2}) + \frac{a}{w}(t^3 + it^2 + it - 1), \end{aligned}$$

wobei $w^2 = t^6 + 2it^5 - (1-2i)t^4 - 8t^3 - (1+2i)t^2 - 2it + 1$.

Der Schnitt mit einer Ebene (5.5) führt dann auf eine algebraische Gleichung 14. Grades in t , was bedeutet, daß die Zindler-Kurve q die *Ordnung 14*. hat. Die darstellend-geometrisch konstruierte Abb. 3 zeigt eine solche Kurve für die Annahme $a=6$. Die ebenfalls dargestellte *Hauptsehnenfläche* Ψ ist als Tangentenfläche der gespitzten Quartik c eine Torse 4. Klasse und 5. Ordnung. Sie ist zur xz -Ebene schief-symmetrisch und besitzt in dieser Ebene als Doppelkurve die Hyperbel $x(x+2z-5)+3=0$.

Literatur

- [1] W. BLASCHKE, Über Raumkurven konstanter Breite. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig* **66** (1914), 171—177.
- [2] M. FUJIWARA, Über die Raumkurven konstanter Breite und ihre Beziehung mit der einseitigen Regelfläche. *Tôhoku Math. J.* **8** (1915), 1—10.
- [3] J. HOSCHEK, Räumliche Zindlerkurven. *Manuscr. Math.* **13** (1974), 175—185.
- [4] W. KAUTNY, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. *Monatsh. Math.* **60** (1956), 66—82.
- [5] K. L. MAMPEL, Über Zindlerkurven. *J. reine angew. Math.* **234** (1969), 12—44.
- [6] K. STRUBECKER, Differentialgeometrie, I (Sammlung Götschen, Bd. 1113). *Berlin*, 2. Aufl. 1964, S. 124.
- [7] W. WUNDERLICH, Höhere Radlinien. *Österr. Ingen. Archiv* **1** (1947), 277—296.
- [8] W. WUNDERLICH, Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei achsenparallele Drehparaboloide berühren. *Rad. Jugosl. Akad.* **370** (1975), 5—19.
- [9] K. ZINDLER, Über konvexe Gebilde, II. *Monatsh. Math. Phys.* **31** (1921), 25—57.

PROF. DR. W. WUNDERLICH
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
GUSSHAUSSTRASSE 27.
A-1040 WIEN, ÖSTERREICH

(Eingegangen am 8. Mai 1975.)