

Additiv kommutative und idempotente Halbringe mit Faktorbedingung, II

Dem Andenken von Herrn Prof. Dr. ANDOR KERTÉSZ gewidmet

Von Dörte Haftendorn (TU Clausthal)

Im ersten Teil [1] dieser Arbeit haben wir Halbringe S mit kommutativer und idempotenter Addition (AKI-Halbringe) untersucht, die bezüglich der natürlichen Halbordnung $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ der Faktorbedingung

F Aus $a \leq b$ folgt $a \in bS \cap Sb$

(F -Halbringe) genügen. Die negativen Elemente $n \in S$ ($nx \leq x$, $xn \leq x$ für alle $x \in S$) bilden stets einen Unterhalbring S^- von S , und nach Satz 3.6 gilt in Verschärfung von F :

Aus $a \leq b$ folgt $a \in bS^- \cap S^-b$.

Dagegen liegen nach Prop. 4.1 positive Elemente eines F -Halbringes S stets in der Halbgruppe $C(S)$ der (multiplikativ) kürzbaren Elemente von S , und es gilt $C(S) \neq \emptyset$ genau dann, wenn S ein Einselement enthält. Solche F -Halbringe konnten in § 4 als Quotientenhalbringe $S = Q(S^-, \Sigma)$ ihrer Negativbereiche S^- mit geeigneten „Nennerhalbgruppen“ $\Sigma \subseteq C(S^-)$ vollständig gekennzeichnet werden. Dies macht es wünschenswert, jeden F -Halbring S ohne Einselement in einen F -Halbring mit Einselement einbetten zu können. In Fortsetzung der Numerierung von [1] behandeln wir diese Frage in § 5 der vorliegenden Arbeit, und zwar zunächst für AKI-Halbringe.

Dazu kennzeichnen wir zunächst alle AKI-Oberhalbringe $\mathfrak{S}$ mit Einselement $1_{\mathfrak{S}}$ eines AKI-Halbringes S , die von S und $1_{\mathfrak{S}}$ erzeugt werden, als Kongruenzhalbringe eines universellen Halbringes $\mathfrak{U}$ dieser Art (Satz 5.1). Die Anwendung auf einen F -Halbring S ohne Einselement ergibt jedoch, daß unter diesen AKI-Oberhalbringen $\mathfrak{S}$ von S nur dann ein F -Halbring auftritt, wenn $S = S^-$ gilt und damit der minimale F -Oberhalbring mit Einselement einfach durch Adjunktion eines solchen Elementes $S_1 = S \cup \{1\}$ gewonnen werden kann (Prop. 3.4, Prop. 5.4). Zu einem F -Halbring S ohne Einselement existiert aber stets genau ein minimaler AKI-Oberhalbring $\mathfrak{S}$ mit $1_{\mathfrak{S}}$, der $\mathfrak{S}^- \cap S = S^-$ erfüllt (Satz 5.3), und der Quotientenhalbring $S_1 = Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ erweist sich als der (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) minimale F -Oberhalbring von S mit Einselement; dabei gilt $S_1^- \cap S = S^-$ (Satz 5.5).

Die oben zitierten Aussagen von [1] machen diesen Teil weitgehend für sich lesbar. In § 6 geben wir einige Beispiele, die sich auf beide Teile der Arbeit beziehen.

Vorbereitend stellen wir noch fest: Homomorphismen und Kongruenzen beziehen sich bei Halbringen $(S, +, \cdot)$, $(T, +, \cdot)$ stets auf die mit $+$ und $\cdot$ bezeichneten Operationen. Das homomorphe Bild φS eines Halbringes S ist isomorph zu dem Kongruenzhalbring S/π mit der durch $\varphi^{-1} \circ \varphi$ festgelegten Kongruenz π auf S . Mit S ist $\varphi S \cong S/\pi$ wieder AKI-Halbring bzw. F -Halbring, und φ ist bezüglich der natürlichen Halbordnungen stets ordnungstreu gemäß $a \leq b \Rightarrow \varphi a \leq \varphi b$.

§ 5 Einbettung von AKI-Halbringen und F -Halbringen in ebensolche Oberhalbringe mit Einselement

Zur Vereinfachung der Darstellung setzen wir stets voraus, daß der einzubettende Halbring S ein annullierendes Nullelement 0 besitzt. Dies ist aus folgendem Grunde keine Einschränkung der Allgemeinheit: Wie bereits in § 3 bemerkt, kann man zu jedem AKI- oder F -Halbring S' ein annullierendes Nullelement 0 adjungieren, und $S = S' \cup \{0\}$ ist dann nullteilerfrei.¹⁾ Bei der Anwendung der Aussagen dieses Paragraphen auf S werden aber alle auftretenden Oberhalbringe S^* von S das gleiche Nullelement 0 (also das gleiche kleinste Element) haben und mit S nullteilerfrei sein; also ist auch $S^* \setminus \{0\}$ ein Halbring und der analoge Oberhalbring zu $S' = S \setminus \{0\}$.

Zur Festlegung der Bezeichnungen nehmen wir an, daß zu S ein AKI-Oberhalbring T existiert, der ein Einselement 1_T und das gleiche Nullelement 0 besitzt wie S .²⁾ Dann ist $E = \{0, 1_T\}$ Unterhalbring von T und isomorph zu dem als AKI-Halbring aufgefaßten Verband mit 2 Elementen. Wir bezeichnen mit $[S, 1_T]$ den von S und 1_T erzeugten Unterhalbring von T . Es gilt dann

$$S \subseteq [S, 1_T] = \{g+a \mid g \in E, a \in S\} \subseteq T$$

und für alle $g+a, h+b \in [S, 1_T]$

$$(5a) \quad \begin{aligned} (g+a) + (h+b) &= (g+h) + (a+b) \\ (g+a) \cdot (h+b) &= gh + (gb+ha+ab). \end{aligned}$$

Jeden AKI-Halbring T , der die obigen Voraussetzungen und $[S, 1_T] = T$ erfüllt, nennen wir in Anlehnung an Weinert [2] einen *Einselementoberhalbring* von S . Natürlich ist jeder *minimale AKI-Oberhalbring* von S mit *Einselement*, d. h. ein Halbring, der keinen echten Unterhalbring mit diesen Eigenschaften besitzt, ein Einselementoberhalbring von S ; die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Satz 5.1. Zu jedem AKI-Halbring mit annullierendem Nullelement existiert (bis auf Isomorphie genau) ein universeller Einselementoberhalbring $\mathfrak{E}$ von S , d. h. ein solcher, der auf jeden Einselementoberhalbring $\mathfrak{E}$ von S homomorph (und identisch bezüglich S) abgebildet werden kann. Mit anderen Worten: Die Kongruenzhalbringe $\mathfrak{U}/\pi$ mit

$$(5b) \quad a \equiv b(\pi) \Leftrightarrow a = b \quad \text{für alle } a, b \in S$$

¹⁾ Auch in Halbringen mit annullierendem Nullelement 0 ist die Nullteilerfreiheit nicht mehr hinreichend für die Kürzbarkeit der von 0 verschiedenen Elemente.

²⁾ Es ist nicht nötig vorauszusetzen, daß S selbst kein Einselement besitzt.

sind bis auf Isomorphie sämtliche Einselementoberhalbringe von S . Dabei besteht $\mathfrak{U}$ aus den paarweise verschiedenen Elementen

$$g+a \quad \text{mit} \quad g \in \{0, 1_{\mathfrak{U}}\}, \quad a \in S,$$

mit denen ebenfalls gemäß (5a) zu rechnen ist; insbesondere ist $\mathfrak{U}$ mit S kommutativ.

BEWEIS. Der aus zwei Elementen bestehende Verband $E = \{0, 1\}$ wirkt gemäß

$$ga = \begin{cases} a & \text{für } g = 1 \\ 0 & \text{für } g = 0 \end{cases}$$

auf S als Linksoperatorbereich, wobei für alle $a, b \in S, g, h \in E$ gilt:

$$(5c) \quad \begin{aligned} g(a+b) &= ga+gb & g(ab) &= (ga)b = a(gb) \\ (g+h)a &= ga+ha & (gh)a &= g(ha) \\ g0 &= 0 & 1a &= a \end{aligned}$$

Die Menge $E \times S = \{(g, a) | g \in E, a \in S\}$ wird damit durch

$$\begin{aligned} (g, a) + (h, b) &= (g+h, a+b) \\ (g, a) \cdot (h, b) &= (gh, gb+ha+ab) \end{aligned}$$

zu einem AKI-Halbring mit $(0, 0)$ als annullierendem Nullelement und $(1, 0)$ als Einselement. Soweit nicht unmittelbar ersichtlich ergibt sich dies im direkten Ansatz mit Hilfe von (5c). $E \times S$ wird durch die Identifizierung von $(0, a)$ mit a zu einem Oberhalbring $\mathfrak{U}$ von S , der offenbar alle Behauptungen unseres Satzes erfüllt, qed.

Von unserer Problemstellung her gesehen, sucht man natürlich Einselementoberhalbringe von S , die minimal sind und deren Eigenschaften denen von S möglichst weitgehend entsprechen. Beides trifft für den universellen Einselementoberhalbring $\mathfrak{U}$ von S im allgemeinen nicht zu. So prüft man einmal leicht nach, daß für jedes $c \in S^-$ die Untermenge

$$\mathfrak{U}_c = \{a, 1_{\mathfrak{U}}+b \mid a \in S, b \in S \text{ mit } b \geq c\} \subseteq \mathfrak{U}$$

einen Einselementoberhalbring von S mit $1_{\mathfrak{U}}+c$ als Einselement bildet. Zum anderen aber enthält $\mathfrak{U}$ zum Beispiel nur 0 und $1 = 1_{\mathfrak{U}}$ als negative Elemente, wie aus $g+a \leq 1 \Leftrightarrow 1+g+a = 1 \Leftrightarrow a=0$ folgt. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, nach Einselementoberhalbringen zu fragen, in denen die negativen Elemente von S negativ bleiben:

Hilfssatz 5.2. Für einen Einselementoberhalbring $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}/\pi$ sind folgende Aussagen gleichwertig:

- a) $\mathfrak{S}^- \cong S^-$
- b) $\mathfrak{S}^- \cap S = S^-$
- c) $\mathfrak{S}^- = S^- \cup \{1_{\pi}\}$, wobei 1_{π} eine Klasse modulo π bezeichnet
- d) $1+a \equiv 1(\pi) \Leftrightarrow a \in S^-$.

BEWEIS. $\mathfrak{S}^-$ besteht aus den Klassen modulo π , die durch Elemente $g+a$ mit $1+g+a \equiv 1+a \equiv 1(\pi)$ repräsentiert werden, woraus sich $d) \Rightarrow c)$ ergibt. Die Schlüsse $c) \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow d)$ sind ersichtlich. qed.

Satz 5.3. *Es sei $\mathfrak{U}$ der universelle Einselementoberhalbring eines AKI-Halbringes S . Durch*

$$(5e) \quad g+a \equiv h+b \Leftrightarrow \begin{cases} g=h=0 & \text{und} \quad a=b \\ \text{oder} \\ g=h=1 & \text{und} \quad \begin{cases} x+ax = x+bx \\ x+xa = x+xb \end{cases} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in S$$

wird auf $\mathfrak{U}$ eine Kongruenz π mit (5b) definiert. Der Einselementoberhalbring $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}/\pi$ von S erfüllt $\mathfrak{S}^- \supseteq S^-$, hat das gleiche Nullelement 0 wie S und ist mit S nullteilerfrei bzw. kommutativ.

Besitzt S kein Einselement, so ist $\mathfrak{S}$ minimaler Oberhalbring von S mit Einselement. Für einen F -Halbring S ohne Einselement ist $\mathfrak{S}$ bis auf Isomorphie der einzige Einselementoberhalbring von S , der $\mathfrak{S}^- \supseteq S^-$ erfüllt.

BEWEIS. Ersichtlich definiert (5e) eine Äquivalenz auf $\mathfrak{U}$, die $a \neq b \Rightarrow a \not\equiv b$, also (5b) erfüllt. Die Verträglichkeit mit den Operationen braucht nur für $1+a \equiv 1+b$ nachgewiesen zu werden. Die Addition von $g+c$ führt zu $1+a+c \equiv 1+b+c$ wegen $x+ax = x+bx \Rightarrow x+ax+cx = x+bx+cx$ (und entsprechend für die andere Gleichung). Die Multiplikation mit $g+c$ kann damit für g und c einzeln erfolgen; erstere ist trivial, während die Multiplikation mit c von rechts bzw. links gerade auf die für alle $c=x \in S$ erfüllten Gleichungen $x+ax = x+bx$, $x+xa = x+xb$ führt.

Für $\mathfrak{S}^- \supseteq S^-$ zeigen wir die nach Hilfssatz 5.2 gleichwertigen Aussagen d): $1+a \equiv 1+0 \Leftrightarrow x+ax = x$ und $x+xa = x$ für alle $x \in S \Leftrightarrow a \in S^-$. Ersichtlich ist $0 \in S$ auch Nullelement von $\mathfrak{S}$, und aus $(g+a)(h+b) \equiv 0$ folgt $gh+gb+ha+ab \equiv 0$, also $b+ab=0$, $a+ab=0$ oder $ab=0$, was nur für $ab=0$ möglich ist.

Zum Beweis der Minimalitätsbehauptung sei T ein Halbring mit Einselement 1_T , der $\mathfrak{S} \supseteq T \supseteq S$ erfüllt. Aus $1_T \equiv g+e \in T \subseteq \mathfrak{S}$ folgt $1_T \equiv 1+e$ wegen $1_T \notin S$; damit gilt für alle $x \in S$ aber $x = x+xe$ und $x = x+ex$, d. h. $e \in S^-$ und daher $1_T \equiv 1+e \equiv 1$, woraus $\mathfrak{S} = T$ folgt. Für die letzte Behauptung sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}/\pi'$ Einselementoberhalbring eines F -Halbringes ohne Einselement mit $\mathfrak{S}^- \supseteq S^-$; wir wollen $\pi' = \pi$ zeigen und betrachten

$$(5f) \quad g+a \equiv h+b(\pi').$$

Der Fall $g=h=0$ ist klar. Aus $g=1$ folgt aber $h=1$, da sonst $x+ax=bx$ und $x+xa=xb$ für alle $x \in S$, also $b \in S^+$ gelten würde, woraus nach Prop. 4.1 die Existenz eines Einselementes in S folgte. Damit bleibt im Hinblick auf (5e) für $\pi' = \pi$ noch

$$1+a \equiv 1+b(\pi') \Leftrightarrow \begin{cases} x+ax = x+bx \\ x+xa = x+xb \end{cases} \quad \text{für alle } x \in S$$

nachzuweisen, wobei $\Rightarrow$ klar ist. Ist umgekehrt für $a, b \in S$ die rechte Seite erfüllt und wählen wir gemäß Satz 3.6 $x=e \in S^-$ mit $(a+b)e = a+b$, so folgt $e+a = e+b$; nach Hilfssatz 5.2 gilt aber $1+e \equiv e(\pi')$, was zusammen $1+a \equiv 1+b(\pi')$ ergibt, qed.

Die Einbettung eines F -Halbringes S ohne Einselement in einen F -Oberhalbring mit Einselement ist mit den bisherigen Überlegungen jedoch nur für negative F -Halbringe $S = S^-$ möglich, wo ohnehin gemäß Prop. 3.4 einfach durch Adjunktion eines Einselementes ein solcher Oberhalbring $S \cup \{1\}$ entsteht. Es gilt nämlich:

Proposition 5.4. Ein beliebiger Einselementoberhalbring $T \neq S$ eines AKI-Halbringes S ist genau dann F -Halbring, wenn $S = S^-$ und $T \cong \mathfrak{U}/\pi = S \cup \{1_\pi\}$ mit der durch (5 e) definierten Kongruenz π gilt.

BEWEIS. Sei T ein F -Halbring. Dann ist $1_T + a \cong 1_T$ in T gemäß $1_T = (g+x)(1_T+a) = g+ga+x+xa$ invertierbar. Für $g=0$ folgt daraus $1_T \in S$ im Widerspruch zu $T \neq S$, für $g=1_T$ ergibt sich $1_T+a=1_T$, also $T = S \cup \{1_T\}$, $S = S^-$ und $T^- \supseteq S^-$. $T \cong \mathfrak{U}/\pi$ folgt aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.3, die Umkehrung aus Prop. 3.4. qed.

Allgemein erreicht man die eben angesprochene Einbettung jedoch auf folgende Weise:

Satz 5.5. *Es sei S ein F -Halbring und $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}/\pi$ der in Satz 5.3 betrachtete Einselementoberhalbring von S . Dann existiert der Quotientenhalbring $S_1 = Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ und ist F -Oberhalbring von S mit Einselement, und es gilt*

$$S^- \subseteq \mathfrak{S}^- = S^- \cup \{1_{\mathfrak{S}}\} \subseteq S_1^-.$$

Dabei ist S_1 minimaler F -Oberhalbring von $\mathfrak{S}$ und, falls S selbst kein Einselement hat, minimaler F -Oberhalbring von S mit Einselement. Durch jede dieser Eigenschaften ist S_1 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Zum Nachweis der Kürzbarkeit der durch $1+a$ repräsentierten positiven Elemente von $\mathfrak{S}$ sei $(1+a)(g+u) \equiv (1+a)(h+v)(\pi)$, was zunächst $g=h$ zu Folge hat. Im Falle $g=h=0$ ergibt sich weiter $u+au=v+av$ und damit nach Prop. 3.5 (2) $u=v$.³⁾ Im Falle $g=h=1$ dagegen folgt $x+(u+a+au)x = x+(v+a+av)x$ und mithin $a(x+ux)+(x+ux) = a(x+vx)+(x+vx)$ für alle $x \in S$. Wiederum nach Prop. 3.5 (2) gilt dann $x+ux = x+vx$ und analog $x+xu = x+xv$ für alle $x \in S$. Damit gilt $g+u \equiv h+v(\pi)$, was zusammen mit der dualen Aussage $\mathfrak{S}^+ \subseteq C(\mathfrak{S})$ zeigt. Für die Ore-Asano-Bedingungen betrachten wir $q_R(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ und weisen zu $g+a \in \mathfrak{S}$, $1+b \in \mathfrak{S}^+$ die Existenz von $1+c \in \mathfrak{S}^+$, $h+d \in \mathfrak{S}$ mit $(g+a)(1+c) \equiv (1+b)(h+d)(\pi)$ nach. Dazu wählen wir $h=g$, $c=b$ und $d \in S$ mit $a+ab=d+bd$, was nach Prop. 3.5 (3) möglich ist. Die Addition dieser Gleichung zu $g+gc=h+hb$ ergibt sogar

$$g+gc+a+ac = h+hb+d+bd$$

an Stelle der benötigten Kongruenz modulo π .

Wir betrachten nun $\mathfrak{S}$ als gegebenen Einselementoberhalbring von S und schreiben „ $\equiv$ “ für die Kongruenz modulo π und $1_{\mathfrak{S}}=1$. Wir zeigen, daß $S_1 = Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ F -Halbring ist. Mit geeignetem $\gamma \in S^+$ gilt $(g+a)\gamma^{-1} \equiv (h+b)\gamma^{-1} \Leftrightarrow g+a \equiv h+b$; für $h=1$ ist $1+b \in \mathfrak{S}^+$ invertierbar und $g+a = (g+a)(h+b)^{-1}(h+b)$ gesichert, während $h=0$ auch $g=0$ nach sich zieht und zu $a \equiv b$ in dem F -Halbring

³⁾ Gemäß Prop. 3.5 folgt in F -Halbringen S aus $ax+x=ay+y$ stets $x=y$ und für alle $a, b \in S$ gibt es ein $s \in S$ mit $b=as+s$.

S ein y mit $a=yb$ existiert. Die Aussagen über die Negativbereiche folgen aus Satz 5.3, Hilfssatz 5.2 und Satz 3.6.

Für die weiteren Behauptungen sei nun T ein beliebiger F -Oberhalbring von $\mathfrak{S}$. Für $1+a \in \mathfrak{S}^+ \subseteq T$ gilt $1 \leq 1+a$ auch in T , also gibt es $x, y \in T$ mit $1 = (1+a)x = y(1+a)$, d. h. $1x=y1 \in T$ ist das eindeutig bestimmte Inverse $(1+a)^{-1}$ von $1+a$ bezüglich $1 \in \mathfrak{S}$ in T . Wegen $q_R(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ bildet die Untermenge $\{(g+b)(1+a)^{-1} | g+b \in \mathfrak{S}, 1+a \in \mathfrak{S}^+\} \subseteq T$ eine zu $S_1 = Q_R(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+) = Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ isomorphen F -Unterhalbring von T . Dies zeigt die Minimalität von S_1 als F -Oberhalbring von $\mathfrak{S}$ und $T \cong S_1$, falls T minimal gewählt war.

Sei schließlich T ein F -Halbring mit Einselement 1_T , der $S \subseteq T \subseteq S_1$ erfüllt, und S ein F -Halbring ohne Einselement. Wir wollen $T=S_1$ zeigen und schreiben $1_T = (g+a)(1+b)^{-1}$ als Element von S_1 mit $1 \in \mathfrak{S}$. Daraus folgt zunächst $g=1$, da für $g=0$ das Element $a \in S$ in T , also erst recht in S kürzbar wäre, im Widerspruch zu Prop. 4.1. Aus $1_T + b = 1+a$ folgt aber $x+xb = x+xa$ und $x+xb = x+ax$ für alle $x \in S$, was nach (5e) $1+a=1+b$, also $1_T=1$ ergibt. Aus $1_T = 1 \in T$ folgt aber $\mathfrak{S} \subseteq T$ und damit $T=S_1$ nach der oben bewiesenen Minimalitätseigenschaft von S_1 bezüglich $\mathfrak{S}$, qed.

Wir bemerken noch, daß sogar $\mathfrak{S}^+ = C(\mathfrak{S})$ gilt und damit S_1 maximaler Quotientenhalbring von $\mathfrak{S}$ ist. Schließlich erhalten wir die bereits angekündigte Verschärfung von Satz 3.8:

Folgerung 5.6. In jedem F -Halbring S gilt $I(S) \subseteq S^- \cap Z(S)$.

BEWEIS. Nach Satz 3.8 gilt $I(S) \subseteq S^- \cap Z(S^-)$, so daß nur $I(S) \subseteq Z(S)$ zu zeigen ist. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen betten wir S in den F -Halbring S_1 von Satz 5.5 ein. Gemäß Satz 4.2 gilt $S_1 = Q(S_1^-, (S_1^+)^{-1})$ und $I(S) \subseteq I(S_1) \subseteq Z(S_1^-)$ nach Satz 3.8. Aus beidem folgt aber $I(S) \subseteq Z(S_1)$ und damit $I(S) \subseteq Z(S)$, qed.

§ 6 Beispiele

Beispiel 6.1 F -Halbringe ohne idempotente Elemente

Wir konstruieren einen „möglichst einfachen“ Halbring dieser Art durch folgende Überlegungen: Wenn es überhaupt einen solchen Halbring gibt, dann gibt es (vgl. Satz 3.8) auch einen negativen Halbring S mit $I(S)=\emptyset$. Für die Potenzen eines beliebigen Elementes $a \in S$ gilt dann

$$(6a) \quad a > a^2 > a^3 > \dots \quad (\text{paarweise verschieden}),$$

da andernfalls ein idempotentes Element auftreten würde. Wir dürfen annehmen, daß dabei a nicht Potenz eines anderen Elementes ist. Die Faktorbedingung F ist für $a^n < a^m$ mit a^{n-m} erfüllt. Sei $b \in S$ ein Element, welches a (und damit jedes a^n) von rechts reproduziert. Aus

$$a = ab \leq b \quad \text{folgt dann} \quad a < b$$

wegen $a^2 \neq a$, und für die Potenzen von b gilt (6a) sowie mit beliebigen $n, m \in \mathbb{N}$

$$a^n = a^n b^m \leq b^m, \quad \text{also} \quad a^n < b^m.$$

Wir nehmen nun zur Vereinfachung $a \cdot b = b \cdot a$ an. Dann besteht der von a und b erzeugte Unterhalbring von S aus den Potenzen von a und den Potenzen von b und ist totalgeordnet. Er erfüllt F bis auf das noch fehlende rechtsreproduzierende Element $c \in S$ von b (und damit von b^n), und unsere Überlegungen führen also auf eine Kette $a < b < c \dots$ usw.

Umgekehrt läßt sich so ein kommutativer, totalgeordneter, negativer F -Halbring S mit $I(S) = \emptyset$ konstruieren. Für $i \in \mathbb{N}$ seien die unendlichen zyklischen Halbgruppen $\langle a_i \rangle = \{a_i^1, a_i^2, \dots\}$ disjunkt und es sei $S = \bigcup \langle a_i \rangle$. Wir definieren

$$a_i^n \cdot a_j^m = \begin{cases} a_i^n & \text{für } i < j \\ a_i^{n+m} & \text{für } i = j \\ a_j^m & \text{für } i > j \end{cases}$$

und

$$a_i^n + a_j^m = \begin{cases} a_j^m & \text{für } i < j \\ a_i^{\min(n,m)} & \text{für } i = j \\ a_i^n & \text{für } i > j \end{cases}$$

womit in der Tat ein F -Halbring mit den behaupteten Eigenschaften entsteht.

Beispiel 6.2. Von einem Element erzeugte negative AKI-Halbringe

Für die Potenzen eines negativen Elementes a eines beliebigen AKI-Halbringes gilt entweder (6a) oder

$$(6b) \quad a > a^2 > \dots > a^n = a^{n+1} \quad \text{mit} \quad a^n a^n = a^n.$$

Damit ist der von a erzeugte negative AKI-Halbring $S = [a]$ im Falle (6a) eine unendliche zyklische Halbgruppe $(S, \cdot) = \langle a \rangle$ mit der Addition

$$(6c) \quad a^i + a^j = a^{\min(i,j)}$$

und im Falle (6b) die aus n Elementen bestehende zyklische Halbgruppe $(S, \cdot) = \langle a \rangle$ mit der Multiplikation

$$(6d) \quad a^i \cdot a^j = a^{\min(i+j,n)}$$

und der Addition

$$(6e) \quad a^i + a^j = a^{\min(i,j)}.$$

Diese Strukturfeststellungen sind natürlich konstruktiv. Die Additions- und Multiplikationsvorschriften gelten auch noch, wenn man jeweils ein Einselement $1 = a^0$ adjungiert. Die entstehenden Halbringe $S_\infty = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ und $S_n = \{a^n, a^{n-1}, \dots, a, a^0\}$ sind (kommutative, totalgeordnete, negative) F -Halbringe.

Beispiel 6.3. Die totalgeordnete unendlich zyklische Gruppe G

Die unendliche zyklische Gruppe $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, totalgeordnet gemäß $a^i \leq a^j \Leftrightarrow i \geq j$, ist F -Halbring (AKI-Halbkörper) mit der Additionsvorschrift (6c). Es handelt sich dabei um den (einzigen nichttrivialen) Quotientenhalbring $G = Q(G^-, G^-)$ des F -Halbringes $G^- = S_\infty = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ aus Beispiel 6.2.

Beispiel 6.4. Konstruktion nicht-negativer F-Halbringe ohne Einselement

Es sei S ein F -Halbring ohne Einselement (etwa ein distributiver Verband ohne maximales Element oder ein Halbring gemäß Beispiel 6.1). Das direkte Produkt der Halbringe S und G aus Beispiel 6.3

$$\hat{S} = S \times G \quad \text{mit} \quad s_i = (s, a^i), \quad s \in S, \quad a^i \in G$$

ist ebenfalls ein F -Halbring ohne Einselement, und es gilt

$$s_i \leq r_j \Leftrightarrow s \leq r \quad \text{in } S \quad \text{und} \quad i \leq j \quad \text{in } \mathbf{Z}$$

$$s_i x_j \leq x_j \Leftrightarrow sx \leq x \quad \text{in } S \quad \text{und} \quad i+j \leq j \quad \text{in } \mathbf{Z}.$$

Damit ist $\hat{S}^- = \{s_i | s \in S^-, i \in \mathbf{N}_0\}$ echte Teilmenge von $\hat{S}$. Natürlich ist $\hat{S}$ für $S \neq \{0\}$ nicht totalgeordnet.

Literaturverzeichnis

- [1] D. HAFTENDORN; Additiv kommutative und idempotente Halbringe mit Faktorbedingung, I, *Publ. Math. (Debrecen)* **25** (1978), 107—116.
- [2] H. J. WEINERT; Über die Einbettung von Ringen in Oberringe mit Einselement, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **22** (1961), 91—105.

(Eingegangen am 22. Juli 1975.)