

Untergruppen und Faktoren torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2

Von O. MUTZBAUER (Würzburg)

1. Einleitung

Diese Arbeit gibt einen Überblick über die Untergruppen und Faktoren torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2, beschrieben durch Charakteristiken [3]. Einige der hier bewiesenen Sätze sind von Beaumont und Pierce [1] auf anderem Wege gezeigt worden. Wenn hier zum Teil neue Beweise bekannter Sätze angegeben werden, so deshalb, um zu demonstrieren, daß die in [3] angegebenen Invarianten eine „geschlossene“ Theorie für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2 ermöglichen.

$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{P}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen, der ganzen und der Primzahlen. Alle anderen Notationen werden aus Fuchs [2] übernommen, sofern keine eigenen Definitionen gegeben werden.

2. Charakteristiken

Eine Charakteristik ist nach [3, (7)] eine Folge

$$(1) \quad \mathbf{M} := \{M_p \mid p \in \mathbf{P}\}$$

von 2×2 -Matrizen M_p der folgenden Gestalt:

$$(2) \quad \begin{cases} M_p := \begin{pmatrix} p^{-m_p} & p^{-n_p} \pi_p \\ 0 & p^{-n_p} \end{pmatrix} \\ \text{mit } \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \quad \text{und } \pi_p = \pi_p^{(|m_p - n_p|)}; \\ \text{für } m_p \leq n_p \quad \text{gilt } \pi_p \in \mathbf{Q}_p^*, \\ \text{für } m_p > n_p \quad \text{gilt } \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^* \quad \text{oder } \pi_p = 0. \end{cases}$$

$\mathbf{K}_p^*$ und $\mathbf{Q}_p^*$ bezeichnen den Körper der p -adischen Zahlen bzw. den Ring der p -adischen ganzen Zahlen. Für $k \in \mathbf{N}$ und $\beta \in \mathbf{K}_p^*$ sei

$$(3) \quad \beta^{(k)} := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j p^j & \text{für } \beta \in \mathbf{Q}_p^* \\ [(\beta^{-1})^{(k)}]^{-1} & \text{für } \beta \notin \mathbf{Q}_p^* \quad \text{und } (\beta^{-1})^{(k)} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit der p -adischen Standardentwicklung

$$(4) \quad \beta = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j p^j \quad (0 \leq \beta_j < p, l \in \mathbb{Z}).$$

Mit $\mathfrak{M}$ wird die Menge aller Charakteristiken benannt. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p^*$, $0 < l \leq \infty$ und zwei unabhängigen Elementen u, v des rationalen Vektorraumes $\mathbb{Q}^2$ der Dimension 2 läßt sich eine (evtl. unendliche) Folge von Elementen aus $\mathbb{Q}^2$ angeben:

$$(5) \quad p^{-l}(xu + \beta v) := \{p^{-(k+1)}(\alpha^{(k+1)}u + \beta^{(k+1)}v) \in \mathbb{Q}^2 \mid 0 \leq k < l\}.$$

Jede torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 läßt sich in $\mathbb{Q}^2$ einbetten. Nun kann man nach [3, Lemma 1] einer Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ bis auf Isomorphie genau eine Gruppe $G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle \sim \mathbf{M}$ zuordnen, nämlich das Gruppenerzeugnis der folgenden Elemente aus $\mathbb{Q}^2$:

$$(6) \quad G = \langle u, v, p^{-m_p}u, p^{-n_p}(v + \pi_p u), q^{-m_q}(u + \pi_q^{-1}v), q^{-n_q}v \mid p, q \in \mathbb{P}, \pi_p \in \mathbb{Q}_p^*, \pi_q \notin \mathbb{Q}_q^* \rangle.$$

Hält man die Basis u, v von G fest, so ist die Zuordnung $G \mapsto \mathbf{M}$ umkehrbar eindeutig. Das Isomorphieproblem reduziert sich somit auf die Untersuchungen der Basistransformationen in G . Nach [3, Lemma 2] gilt für $G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$ mit $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ und $a, b \in \mathbb{Q}$: $au + bv \in G$ genau dann, wenn

$$(7) \quad \begin{cases} \text{(i) } a, b \in \langle p^{-m_p}, p^{-n_p} \mid p \in \mathbb{P} \rangle \\ \quad \text{und wenn für alle Primzahlen } p \in \mathbb{P} \text{ gilt:} \\ \text{(ii) } p^{m_p}(b\pi_p - a) \in \mathbb{Q}_p^* \quad \text{für } m_p \leq n_p \quad \text{und } m_p < \infty, \\ \quad p^{n_p}(a\pi_p^{-1} - b) \in \mathbb{Q}_p^* \quad \text{für } m_p > n_p \quad \text{und } \pi_p \neq 0, \\ \quad p^{n_p}b \in \mathbb{Q}_p^* \quad \text{für } m_p > n_p \quad \text{und } \pi_p = 0. \end{cases}$$

Eine rationale 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ beschreibt genau dann eine Basistransformation bzgl. $\mathbf{M}$ (d.h. $u^A := au + bv, v^A := cu + dv \in G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$), wenn gilt:

$$(8) \quad \begin{cases} \text{(i) } ad - bc \neq 0 \\ \text{(ii) für } a, b \text{ und für } c, d \text{ gilt jeweils die Formel (7).} \end{cases}$$

Zwei Charakteristiken $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$ beschreiben nach [3, Satz 1] genau dann isomorphe Gruppen, wenn es eine Basistransformation A bzgl. $\mathbf{M}$ gibt, so daß $\mathbf{M}' = \mathbf{M}^A$ ist, wobei die Transformation der Charakteristik $\mathbf{M}$ durch A wie folgt vorzunehmen ist:

$$(9) \quad \text{Sei } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \text{ Die Indizierung mit } p \text{ wird weggelassen. } \mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^A \text{ mittels} \\ M_p = \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\pi \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \mapsto M_p^A = \begin{pmatrix} p^{-m^A} & p^{-n^A}\pi^A \\ 0 & p^{-n^A} \end{pmatrix}$$

für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P}$. Genauer wird vereinbart:

$$(10) \quad \begin{cases} \text{Seien } k, x, y, z \in \mathbb{Z}, k \geq 0, \text{ minimal bzgl. } p^x a, p^x b, p^y c, p^y d \in \mathbb{Q}_p^* \\ p^z(a + c\pi), p^z(d + b\pi), p^{x+z-k}(ad - bc) \in \mathbb{Q}_p^* \text{ für } m \leq n, \\ p^z(a + c\pi^{-1}), p^z(b + d\pi^{-1}), p^{y+z-k}(ad - bc) \in \mathbb{Q}_p^* \text{ für } m > n \quad (\pi = 0 \Rightarrow \pi^{-1} := 0). \end{cases}$$

Seien

$$(11) \quad \begin{cases} m' := \begin{cases} \max(m+x, 0) & \text{für } m \leq n \\ \max(n+y, 0) & \text{für } m > n, \end{cases} \\ n' := \begin{cases} \max(n+z, 0) & \text{für } m \leq n \\ \max(m+z, 0) & \text{für } m > n, \end{cases} \\ k' := \min(k, \min(m', n')). \end{cases}$$

Einige Fälle werden zusammengefaßt:

$$(*) \quad \begin{cases} m \leq n, m' \leq n' & \text{und } [p^z(d+b\pi)]^{(n'-m'+k')} = 0, \\ m > n, m' \leq n', \pi \neq 0 & \text{und } [p^z(b+d\pi^{-1})]^{(n'-m'+k')} = 0, \\ m > n, m' > n' & \text{und } (p^y d)^{(m'-n'+k')} = 0, \\ m \leq n, m' > n' & \text{und } (p^x b)^{(m'-n'+k')} = 0, \\ m > n, m' \leq n', \pi = 0 & \text{und } (p^x b)^{(n'-m'+k')} = 0. \end{cases}$$

Es wird definiert:

$$(12) \quad \pi^A := \begin{cases} [(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1}]^{(|n'-m'|+k')} & \text{für } m \leq n, m' \leq n' \quad \text{oder} \\ & m > n, m' \leq n', \pi \neq 0 \quad \text{ohne } (*) \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{(|n'-m'|+k')} & \text{für } m \leq n, m' > n' \quad \text{oder} \\ & m > n, m' \leq n', \pi = 0 \quad \text{ohne } (*) \\ \left(\frac{c}{d}\right)^{(|n'-m'|+k')} & \text{für } m > n, m' > n' \quad \text{ohne } (*) \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

und weiter

$$(13) \quad \begin{cases} m^A := \begin{cases} \max(m', n'), & \text{für } \pi^A \notin \mathbb{Q}_p^* \quad \text{oder für } (*) \\ \min(m', n') - k' & \text{für } \pi^A \in \mathbb{Q}_p^* \quad \text{und nicht } (*), \end{cases} \\ n^A := \begin{cases} \min(m', n') - k' & \text{für } \pi^A \notin \mathbb{Q}_p^* \quad \text{oder für } (*) \\ \max(m', n') & \text{für } \pi^A \in \mathbb{Q}_p^* \quad \text{und nicht } (*). \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist die Operation $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^A$ vollständig beschrieben.

Es sei

$$P^*(\mathbf{M}) := \{p \in \mathbf{P} \mid m_p > n_p \text{ und } \pi_p = 0\}.$$

3. Untergruppen

Zwei Charakteristiken $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ heißen äquivalent, $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}'$, wenn es eine Basistransformation $A \in GL(2, \mathbb{Q})$ bzgl. $\mathbf{M}$ gibt mit $\mathbf{M}^A = \mathbf{M}'$. Nach [3, Satz 1] sind $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ genau dann äquivalent, wenn sie isomorphe Gruppen beschreiben, es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathfrak{M}$ aller Charakteristiken. Eine Äquivalenzklasse in $\mathfrak{M}$ heißt ein Typ $\mathbf{t}$. Die Gruppe G heißt vom Typ $\mathbf{t} = \mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(\mathbf{M})$, wenn es eine Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathbf{t}$ gibt mit $\mathbf{M} \sim G$. Dieser Typ ist

eine echte Invariante für Gruppen des Ranges 2, denn es gilt:

$$G \cong H \Leftrightarrow \mathfrak{t}(G) = \mathfrak{t}(H).$$

Wie auch für Gruppen des Ranges 1 definiert man für Charakteristiken aus $\mathfrak{M}$ (2-Charakteristiken im Unterschied zu 1-Charakteristiken der Gruppen des Ranges 1) eine Ordnung. Dazu wird eine Bezeichnung für p -adische Zahlen $\pi \in \mathbf{K}_p^*$ benötigt:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_p(\pi) &:= x \in \mathbf{Z} \quad \text{mit } x \text{ minimal bzgl. } p^{-x}\pi \in \mathbf{Q}_p^*, \text{ d.h.} \\ \mathcal{O}_p(\pi) &\equiv 0 \quad \text{für } 0 \neq \pi \in \mathbf{Q}_p^*, \quad \mathcal{O}_p(0) := \infty \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_p(\pi^{-1}) = -\mathcal{O}_p(\pi). \end{aligned}$$

Definition. Seien $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$, $k'_p := \min(m'_p, n'_p)$ und $l_p := \max(m_p, n_p)$. $\mathbf{M}$ ist in $\mathbf{M}'$ enthalten, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$, wenn

(i) für alle Primzahlen $p \in \mathbf{P}$ gilt: $m_p \equiv m'_p$ und $n_p \equiv n'_p$,

$$(ii) \quad \begin{cases} \pi_p = \pi'_p & \text{für } l_p - k'_p = \infty \quad (\infty - \infty := 0) \\ \text{oder} \\ l_p - k'_p \equiv \begin{cases} \mathcal{O}_p(\pi_p - \pi'_p) & \text{für } \pi_p, \pi'_p \in \mathbf{Q}_p^* \\ \mathcal{O}_p(\pi_p^{-1} - \pi'^{-1}) & \text{für } \pi_p, \pi'_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^* \\ -\mathcal{O}_p(\pi'_p) & \text{für } p \in P^*(\mathbf{M}) \setminus P^*(\mathbf{M}') \\ -\mathcal{O}_p(\pi_p) & \text{für } p \in P^*(\mathbf{M}') \setminus P^*(\mathbf{M}). \end{cases} \end{cases}$$

Die Bedeutung dieser Ordnung für 2-Charakteristiken klärt der folgende Sachverhalt.

Lemma 1. Seien $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$, $G := \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$ und $G' := \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle$. G ist genau dann Untergruppe von G' , wenn $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$ ist.

BEWEIS. Es genügt die lokalen p -Strukturen einzeln zu betrachten. Der Fall $m_p \equiv n_p$ und $m'_p < n'_p$ wird exemplarisch behandelt und die Indizierung mit p wird weggelassen. Es ist zu zeigen, daß die Elemente $p^{-m}u$ und $p^{-n}(v + \pi u)$ modulo $\langle u, v \rangle$ genau dann ganzzahlige Linearkombinationen von $p^{-m'}u$ und $p^{-n'}(v + \pi' u)$ sind, wenn $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$ gilt. Es folgt sofort $m \equiv m'$ und $n \equiv n'$. Setzt man mit ganzen Zahlen x, y :

$$p^{-n}(v + \pi u) \equiv xp^{-m'}u + yp^{-n'}(v + \pi' u) \pmod{\langle u, v \rangle}$$

so impliziert $n = \infty$ sofort $\pi = \pi'$. Für $m' = \infty$ können π, π' beliebig sein. Sei also $m', n < \infty$, so gilt

$$p^{-n}(v + \pi u) \equiv xp^{-m'}u + p^{-n}(v + \pi'(n - m')u)$$

und damit

$$p^{m'-n}(\pi - \pi') \in \mathbf{Q}_p^*.$$

Somit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 1 zeigt auch, daß die Relation „ $\equiv$ “ für 2-Charakteristiken transitiv und antisymmetrisch ist, also tatsächlich eine Ordnungsrelation.

Eine 1-Charakteristik χ (für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 1, siehe FUCHS [2]) hat die Form:

$$\chi = \{k_p | p \in \mathbf{P}\}$$

mit $0 \equiv k_p \in \mathbf{Z}$ oder $k_p = \infty$. Wie für 2-Charakteristiken läßt sich eine Gruppe

des Ranges 1 schreiben als:

$$(15) \quad G = \langle u, p^{-k_p} u \mid p \in \mathbf{P} \rangle := \langle u \mid \chi \rangle$$

oder wenn die Basis der Gruppe G nicht näher bezeichnet werden soll, als $G \sim \chi$. Für 1-Charakteristiken χ, χ' läßt sich wie in FUCHS [2] eine Ordnung „ $\leq$ “ definieren, so daß gilt:

$$\langle u \mid \chi \rangle \leq \langle u \mid \chi' \rangle \Leftrightarrow \chi \leq \chi'.$$

Nun wird auch zwischen einer 1-Charakteristik und einer 2-Charakteristik eine Relation „ $\leq$ “ eingeführt.

Definition: Seien $\chi = \langle k_p \mid p \in \mathbf{P} \rangle$ und $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ eine 1-bzw. 2-Charakteristik. χ ist in $\mathbf{M}$ enthalten, $\chi < \mathbf{M}$, wenn für alle Primzahlen $p \in \mathbf{P}$ gilt:

$$(16) \quad k_p \leq \begin{cases} m_p & \text{für } \pi_p \in \mathbf{Q}_p^* \\ n_p - \mathcal{O}_p(\pi_p) & \text{für } \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*. \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung gilt:

Lemma 2. Seien χ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken, $G = \langle u \mid \chi \rangle$, $H = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$. G ist genau dann Untergruppe von H , wenn $\chi < \mathbf{M}$ ist.

BEWEIS. Ganz ähnlich, wie im Beweis von Lemma 1, zeigt man, daß $p^{-k}u$ modulo $\langle u, v \rangle$ genau dann eine ganzzahlige Linearkombination von $p^{-m}u$ und $p^{-n}(v + \pi u)$ ist (Indizierung mit p ist weggelassen), wenn $\chi < \mathbf{M}$ gilt. Für $m \leq n$ (d.h. $\pi \in \mathbf{Q}_p^*$) folgt sofort $k \leq m$, für $m > n$ und $\pi = 0$ gilt $k \leq m$. Ist $m > n$ und $\pi \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*$, so gilt:

$$p^{-k}u \equiv xp^{-m}(u + \pi^{-1}v) + yp^{-n}v \pmod{\langle u, v \rangle}$$

mit $x, y \in \mathbf{Z}$ genau dann, wenn $k \leq n + \mathcal{O}_p(\pi^{-1})$, und Lemma 2 ist bewiesen.

Korollar 1. Seien χ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken, $G = \langle u \mid \chi \rangle$, $H = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$. G ist genau dann reine Untergruppe (pure subgroup) von H , wenn gilt:

$$(17) \quad k_p = \begin{cases} m_p & \text{für } \pi_p \in \mathbf{Q}_p^* \\ n_p - \mathcal{O}_p(\pi_p) & \text{für } \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*. \end{cases}$$

BEWEIS. Für die reine Untergruppe G ist k_p aus Formel (16) für jede Primzahl maximal zu wählen. Man erhält (17) und Korollar 1 ist bewiesen.

Ähnlich wie für 1-Typen von Gruppen des Ranges 1 (FUCHS [2, § 85]) heiße

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(G) := \{\mathbf{M} \in \mathfrak{M} \mid \mathbf{M} \sim G\} = \mathbf{t}(\mathbf{M})$$

2-Typ der torsionsfreien abelschen Gruppe $G \sim \mathbf{M}$. Ein 2-Typ ist die Äquivalenzklasse von 2-Charakteristiken, die isomorphe Gruppen beschreiben, d.h. nach [3, Satz 1] gibt es für $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathbf{t}$ eine Basistransformation A bzgl. $\mathbf{M}$, so daß $\mathbf{M}' = \mathbf{M}^A$ ist. Natürlich gilt mit diesen Bezeichnungen für Gruppen G, H der Ränge 1 oder 2:

$$G \cong H \Leftrightarrow \mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H).$$

$\mathfrak{T}$ sei die Menge aller Typen der Gruppen des Ranges 1 und 2. Seien $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathfrak{T}$, dann heiße $\mathbf{t}$ in $\mathbf{t}'$ enthalten, $\mathbf{t} \leq \mathbf{t}'$, wenn es Charakteristiken $\chi \in \mathbf{t}$ und $\chi' \in \mathbf{t}'$ gibt,

so daß gilt: $t \leq t'$. Für 1-Typen (Klassen von 1-Charakteristiken) ist dieser Sachverhalt wohlbekannt (siehe FUCHS [2, § 85]); ist $t' = t(\mathbf{M})$ ein 2-Typ (Klasse von 2-Charakteristiken), so gilt $t(t) \leq t(\mathbf{M})$ genau dann, wenn es für die Charakteristik $t \in t$ eine Basistransformation A bzgl. $\mathbf{M} \in t'(\mathbf{M})$ gibt, so daß mit den oben gegebenen Definitionen $t \leq \mathbf{M}^A$ ist. Die Bestimmung einer Beziehung der Form $t \leq t'$ führt damit auf ähnliche rechnerische bzw. prinzipielle Probleme wie sie schon bei der Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 in [3] aufgetreten sind. Der Sinn der obigen Vereinbarungen kommt in dem nun folgenden Satz zum Ausdruck.

Satz 1. *Seien G und H torsionsfreie abelsche Gruppen der Ränge 1 oder 2, so ist G genau dann isomorph zu einer Untergruppe von H , wenn $t(G) \leq t(H)$ ist.*

BEWEIS. Haben G und H den Rang 1, so ist der Satz wohlbekannt (siehe FUCHS [2, § 85, Exercise 8]). Sei also $H = \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle$ vom Rang 2 mit $\mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$. G kann den Rang 1 oder 2 haben. Sei G zuerst vom Rang 2, $G = \langle x, y | \mathbf{M} \rangle$ mit $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$. Ist $G \leq H$, so ist x, y auch eine Basis von H und mit

$$x = au + bv, \quad y = cu + dv, \quad A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

(a, b, c, d rational) beschreibt also A eine Basistransformation bzgl. $\mathbf{M}'$, und es gilt:

$$\langle x, y | \mathbf{M} \rangle \leq \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle = \langle x, y | \mathbf{M}'^A \rangle.$$

Nach Lemma 1 folgt $\mathbf{M} \leq \mathbf{M}'^A$ und damit gilt:

$$t(G) = t(\mathbf{M}) \leq t(\mathbf{M}'^A) = t(\mathbf{M}') = t(H).$$

Setzt man $t(G) \leq t(H)$ voraus, so gibt es $\mathbf{M} \in t(G)$ und $\mathbf{M}' \in t(H)$ mit $\mathbf{M} < \mathbf{M}'$ und nach Lemma 1 ist

$$G \cong \langle u, v | \mathbf{M} \rangle \leq \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle \cong H.$$

Hat G den Rang 1 so führt man mittels Lemma 2 den Beweis des Satzes 1 analog.

Einen wesentlichen Gesichtspunkt stellt hier die Tatsache dar, daß im Gegensatz zu 1-Typen, die Relation „ $\leq$ “ für 2-Typen keine Ordnungsrelation ist, denn aus $t \leq t'$ und $t' \leq t$ folgt nicht $t = t'$ (keine Antisymmetrie); diese Situation liegt beispielsweise für quasiisomorphe Gruppen vor, die nicht isomorph sein müssen, da der Rang größer als 1 ist (siehe FUCHS [2, § 92]). Eine weitere Vereinbarung sei für $\pi \in \mathbf{K}_p^*$:

$$\mathcal{O}_p^+(\pi) := \max(\mathcal{O}_p(\pi), 0)$$

$$\mathcal{O}_p^-(\pi) := \min(\mathcal{O}_p(\pi), 0).$$

Damit gilt:

$$\mathcal{O}_p(0) = \mathcal{O}_p^+(0) = \infty, \quad \mathcal{O}_p^-(0) = 0 \quad \text{und}$$

$$\mathcal{O}_p^+(\pi) = \mathcal{O}_p(\pi), \quad \mathcal{O}_p^-(\pi) = 0 \quad \text{für } \pi \in \mathbf{Q}_p^*$$

$$\mathcal{O}_p^-(\pi) = \mathcal{O}_p(\pi), \quad \mathcal{O}_p^+(\pi) = 0 \quad \text{für } \pi \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*.$$

Einen Überblick über die Typenmenge und damit über sämtliche (reinen) Untergruppen des Ranges 1 einer torsionsfreien abelschen Gruppe des Ranges 2 vermittelt das folgende Lemma.

Lemma 3. Seien $M \in \mathfrak{M}$, $G = \langle u, v | M \rangle$, und sei $0 \neq w = xu + yv \in G$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann gilt für den Typ $t^G(w) = \{k_p | p \in P\}$ von w in G entweder, sofern $y = 0$:

$$(17') \quad k_p = \min(m_p, n_p) - \mathcal{O}_p^-(\pi_p)$$

oder, sofern $y \neq 0$:

$$(18) \quad k_p = \min(m_p, n_p) + h_p(x, y)$$

mit

$$h_p(x, y) := \min(\mathcal{O}_p^+(y\pi_p - x), |m_p - n_p|).$$

BEWEIS. Für $y = 0$ ist $w = xu$, also von u abhängig, und die Typen von w und u sind nach FUCHS [2, § 85 (A)] gleich. Nach Korollar 1, Formel (17), läßt sich der Typ von u in G aus M bestimmen.

Sei also $y \neq 0$. Wendet man auf $G = \langle u, v | M \rangle$ die Basistransformation $A := \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ an, so gilt mit $u^A := xu + yv$ und $v^A = u$ nach [3, Lemma 3]:

$$G = \langle u^A, v^A | M^A \rangle,$$

wobei $u^A = w$ und der Typ von w läßt sich nach Korollar 1 bestimmen, sofern man M^A kennt. In die Formeln (10), (11), (12) und (*) ist einzusetzen:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad d = -\frac{x}{y}.$$

Einige Details der Formeln (*) und (12) verändern den Typ von u^A nicht (Indizierung mit p ist teilweise weggelassen): $m > n$ mit $m' > n'$, sowie $m \leq n$ mit $m' > n'$ ist nur für $m, n, m^A, n^A < \infty$ und nur für endlich viele Primzahlen möglich (siehe (10) und (11)). Die Festlegung des Typs von u^A nach Formel (17) geschieht also ohne diese Primzahlen. Weiter gilt nach (10), (11) und (13) für fast alle Primzahlen entweder $m_p^A = m_p$ und $n_p^A = n_p$ oder umgekehrt $m_p^A = n_p$ und $n_p^A = m_p$. Von den endlich vielen Primzahlen, für die das eben Gesagte nicht gilt, sind nur diejenigen von Bedeutung für den gesuchten Typ, für die $|m_p - n_p| = \infty$ ist und damit auch $|m_p^A - n_p^A| = \infty$, so daß man bis auf endlich viele Ausnahmen p , für die noch $m_p, n_p < \infty$ ist, die also den Typ von u^A nicht beeinflussen, (12) wegen (13) schreiben kann wie folgt:

$$(12') \quad \pi_p^A = \begin{cases} \left(\frac{1}{y\pi_p - x} \right)^{(|m_p - n_p|)} & \text{für } p \notin P^*(M) \text{ und} \\ & (y\pi_p - x)^{(|m_p - n_p|)} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist für den ersten Fall $m_p^A < n_p^A$, wenn $\pi_p^A \in \mathbb{Q}_p^*$ und $m_p^A > n_p^A$, wenn $\pi_p^A \notin \mathbb{Q}_p^*$. Für den zweiten Fall, $\pi_p^A = 0$, ist $m_p^A \leq n_p^A$, wenn $(y\pi_p - x)^{(|m_p - n_p|)} \neq 0$, und $m_p^A > n_p^A$, wenn $(y\pi_p - x)^{(|m_p - n_p|)} = 0$.

Also ist nach Formel (17) für $p \notin P^*(M)$ und $(y\pi_p - x)^{(|m_p - n_p|)} \neq 0$ zur Bestimmung des Typs von $w = xu + yv$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} & m_p^A \quad \text{für } \pi_p^A \in \mathbb{Q}_p^* \\ & n_p^A - \mathcal{O}_p(\pi_p^A) \quad \text{für } \pi_p^A \notin \mathbb{Q}_p^*. \end{aligned}$$

Für alle anderen Primzahlen muß m_p^A bestimmt werden.

Für $p \notin P^*(\mathbf{M})$ und $(y\pi_p - x)^{(m_p - n_p)} \neq 0$ folgt $p \notin P^*(\mathbf{M}^A)$ und

$$(19) \quad k_p = \min(m_p, n_p) - \mathcal{O}_p^-(y\pi_p - x)^{-1}.$$

Für die Fälle, in denen $\pi_p^A = 0$ ist, muß man zwischen $(y\pi_p - x)^{(m_p - n_p)} = 0$ oder $\neq 0$ unterscheiden. Im ersten Fall ist $p \in P^*(\mathbf{M}^A)$ und

$$(20) \quad k_p = m_p^A = \max(m_p, n_p) = \min(m_p, n_p) + |m_p - n_p| = \min(m_p, n_p) + h_p;$$

im zweiten Fall ist $p \notin P^*(\mathbf{M}^A)$ und es gilt Formel (19). Aus (19) und (20) folgt (18). Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Zusammenfassend läßt sich formulieren:

Satz 2. [1; 7.4]. *G werde durch die 2-Charakteristik $\mathbf{M}$ beschrieben. G hat eine reine Untergruppe mit 1-Charakteristik $\chi = \{k_p \mid p \in \mathbf{P}\}$ genau dann, wenn entweder*

$$k_p = \min(m_p, n_p) - \mathcal{O}_p^-(\pi_p)$$

oder es gibt eine rationale Zahl $r \in \mathbf{Q}$ mit:

$$(21) \quad k_p(r) = \min(m_p, n_p) + l_p(r)$$

wobei

$$l_p(r) := \min(\mathcal{O}_p^+(\pi_p - r), |m_p - n_p|).$$

BEWEIS. Reine Untergruppen von G sind die reinen Hüllen der Elemente $0 \neq w = xu + yv \in G$. Formel (17') von Lemma 3 überträgt sich unverändert als Typ der reinen Hülle $\langle u \rangle_*^G$ von u in G , wenn $G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$ ist. Zu jeder rationalen Zahl $r = \frac{x}{y} \in \mathbf{Q}$ mit $x, y \in \mathbf{Z}$ gibt es ein $w = xu + yv \in G$. Umgekehrt gibt es auch zu jedem Element $w' \in G$ ein solches $w = xu + yv$, so daß w und w' abhängig sind, also gleichen Typ haben. Da $y \neq 0$ und damit Einheit in fast allen $\mathbf{Q}_p^*$ ist, unterscheiden sich l_p und h_p aus Lemma 3 nur an endlich vielen Stellen, und auch hier ist $h_p - l_p$ endlich, d. h. (21) beschreibt denselben Typ wie (18) und Satz 2 ist bewiesen.

Satz 2 beschreibt die Typenmenge

$$\mathfrak{T}(\mathbf{M}) = \mathfrak{T}(G) := \{t^G(x) \mid x \in G\}$$

der Gruppe $G \sim \mathbf{M}$. Da sich jede Untergruppe U des Ranges 1 von G in eine reine Untergruppe V des Ranges 1 einbetten läßt, d. h. $t(U) \subseteq t(V)$ nach Fuchs [2, § 85 Exercise 8], gibt Satz 2 einen vollständigen Überblick über alle Untergruppen des Ranges 1 von G , wenn die 2-Charakteristik $\mathbf{M}$ von G bekannt ist.

Im weiteren sollen parallel zu BEAUMONT—PIERCE [1] einige Ergebnisse über die Typenmenge $\mathfrak{T}(G)$ zusammengetragen werden.

Lemma 4. [1; 7.6] *In einer torsionsfreien abelschen Gruppe G des Ranges 2, beschrieben durch die Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$, gilt für zwei unabhängige Elemente $u, v \in G$:*

$$t^G(u) \cap t^G(v) = t_0^{\mathbf{M}} := \{\min(m_p, n_p) \mid p \in \mathbf{P}\}$$

BEWEIS. Für unabhängige $w = xu + yv$ und $w' = x'u + y'v$ kann man annehmen $y \neq 0$. Ist $y' = 0$, so werden die Typen von w und w' durch (18) bzw. (17') aus Lemma 3 angegeben deren Schnitt $t_0^{\mathbf{M}}$ ergibt, da für $\mathcal{O}_p^-(\pi_p) \neq 0$ fast immer gilt: $\mathcal{O}_p^+(y\pi_p - x) = 0$ wegen $\pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*$. Hat man $y \neq 0$ und $y' \neq 0$, so sind w und w' genau dann

unabhängig, wenn $\frac{x}{y} \neq \frac{x'}{y'}$ ist. Der Schnitt von $\left\{k_p\left(\frac{x}{y}\right) \mid p \in \mathbf{P}\right\}$ mit $\left\{k_p\left(\frac{x'}{y'}\right) \mid p \in \mathbf{P}\right\}$ ergibt wieder $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$. Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Satz 3. [1; 7.7] *G sei eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 mit der Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$.*

- (i) *Seien $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathfrak{T}(G)$. Für $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ gilt $\mathbf{t} \cap \mathbf{t}' = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$*
- (ii) *Seien $0 \neq u, v \in G$. Dann sind u und v abhängig, wenn $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) \neq \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ gilt.*
- (iii) *Ist $\mathfrak{T}(G)$ endlich, so ist $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}} \in \mathfrak{T}(G)$.*

BEWEIS. (i) folgt aus Satz 2. Für (ii) sei $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) \neq \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$. Nimmt man an, daß u und v unabhängig sind, so gilt nach Lemma 4: $\mathbf{t}(u) \cap \mathbf{t}(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$, also $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$. Dieser Widerspruch zeigt, daß u und v unabhängig sind. Zum Beweis von (iii) stellt man fest, daß nach Lemma 3, für eine Gruppe G mit endlicher Typenmenge $\mathfrak{T}(G)$, die Existenz unabhängiger Elemente mit gleichem Typ folgt; denn verschiedenen Quotienten $\frac{x}{y}$ entsprechen unabhängige Elemente. Nach (ii) ist dann $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}} \in \mathfrak{T}(G)$ und Satz 3 ist bewiesen.

4. Faktoren

Ist H Untergruppe von G , dann läßt sich der Faktor G/H natürlich nur dann ermitteln, wenn die Einbettung von H in G explizit gegeben ist.

Lemma 5. *Seien $H := \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle \cong G = \langle u, v \mid \mathbf{M}' \rangle$ torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2 mit $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$, d. h. $\mathbf{M} \cong \mathbf{M}'$. Dann ist*

$$G/H \cong \bigoplus_{p \in \mathbf{P}} [Z(p^{m'_p - m_p}) + Z(p^{n'_p - n_p})].$$

BEWEIS. Exemplarisch wird der Fall $m_p \leq n_p, m'_p \leq n'_p$ behandelt. Die p -Höhe von $p^{-m'_p}u + H$ in G/H ist $m'_p - m_p$, die p -Höhe von $p^{-n'_p}(v + \pi'_p u) + H$ ist auf Grund der Definition von $\mathbf{M} \cong \mathbf{M}'$ $n'_p - n_p$. Andere Elemente deren Ordnung eine Potenz von p wären gibt es nicht und Lemma 5 ist bewiesen.

Mit Hilfe von Basistransformationen lassen sich stets die speziellen Einbettungen in Lemma 5 und auch in den folgenden Lemma 6 und Satz 5 erreichen.

Lemma 6. *Seien χ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken, $H := \langle u \rangle_*^G = \langle u \mid \chi \rangle$ die reine Hülle von u in $G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$, dann hat der Faktor G/H den Typ:*

$$\mathbf{t}(G/H) = \{h_p \mid p \in \mathbf{P}\}$$

mit

$$h_p = \max(m_p, n_p) + \mathcal{O}_p^-(\pi_p).$$

BEWEIS. Bis auf den Fall $m_p > n_p$ und $\pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*$ ist alles klar. Es gilt (Indizierung mit p wird weggelassen) modulo H nach Korollar 1:

$$p^{m+\mathcal{O}(\pi)}p^{-m}(u + \pi^{-1}v) \equiv p^{\mathcal{O}(\pi)}(u + \pi^{-1}v) \equiv p^{-\mathcal{O}(\pi^{-1})}\pi^{-1}v,$$

und $m + \mathcal{O}(\pi)$ ist genau die p -Höhe von $v + H$ in G/H . Damit ist Lemma 6 bewiesen.

Satz 4. Sei G eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 mit der Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$. Sei $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}$ der 1-Typ, der die 1-Charakteristik $\chi_1^{\mathbf{M}} := \{m_p + n_p \mid p \in \mathbf{P}\}$ enthält. Dann gilt für eine reine Untergruppe U von G des Ranges 1:

$$\mathbf{t}(U) \cdot \mathbf{t}(G/U) = \mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}.$$

BEWEIS. Es genügt $U := \langle u \rangle_* \cong G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$ zu setzen, dann beweisen Korollar 1, siehe (17), und Lemma 6 den Satz 4, wenn man verwendet, daß G/U torsionsfrei vom Range 1 ist, Fuchs [2; § 16 Exercise 3 (d) und 26.1. (iii)].

Die 1-Typen $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ und $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}$ sind Invarianten der Gruppe $G \sim \mathbf{M}$. Für $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ folgt das aus Lemma 4 für $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}$ entweder aus Satz 4 oder man entnimmt den Formeln (10)–(13) und (*) direkt:

$$m_p + n_p = m_p^A + n_p^A \quad \text{für fast alle Primzahlen}$$

und

$$|m_p + n_p - m_p^A - n_p^A| < \infty \quad \text{für die endlich vielen Ausnahmen.}$$

Satz 5. Seien $\chi = \{h_p \mid p \in \mathbf{P}\}$ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken. Seien

$$U := \langle u \mid \chi \rangle \quad G := \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle,$$

d. h. $\chi < \mathbf{M}$. Dann gilt für die Torsionsuntergruppe von G/U :

$$T(G/U) \cong \bigoplus_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}(p^{k_p - h_p})$$

mit

$$k_p := \min(m_p, n_p) - \mathcal{O}_p^-(\pi_p) \quad \text{und} \quad \{k_p \mid p \in \mathbf{P}\} \in \mathbf{t}^*.$$

$$(G/U)/T(G/U) \quad \text{hat den Typ} \quad \mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}: \mathbf{t}^*.$$

$T(G/U)$ ist stets direkter Summand von G/U .

BEWEIS. Die reine Hülle von U ist $H := \langle u \rangle_*^G$ und nach Korollar 1 vom Typ $\{k_p \mid p \in \mathbf{P}\} \in \mathbf{t}^*$. Die Torsionsuntergruppe von G/U ist H/U , da $G/H \cong (G/U)/(H/U)$ torsionsfrei auf Grund der Reinheit von H ist. H/U läßt sich nach FUCHS [2, § 85] berechnen, wie im Satz angegeben, da, wegen $U \leq H$, für alle Primzahlen p $h_p \leq k_p$ gilt. Der Faktor $(G/U)/T(G/U) \cong G/H$ hat nach Satz 4 den Typ $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}: \mathbf{t}^*$ (Bezeichnungen siehe FUCHS [2, § 85]). Die Gruppe G/U zerfällt nach [2, 52.2].

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. BEAUMONT, R. S. PIERCE, Torsion free groups of rank two, *Mem. Amer. Math. Soc. Nr. 38* (1961).
- [2] L. FUCHS, Infinite abelian groups, *New York* (1970, 1973).
- [3] O. MUTZBAUER, Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **55** (1976), 195–208.

OTTO MUTZBAUER
 MATHEMATISCHES INSTITUT
 DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG
 87 WÜRZBURG
 AM HUBLAND
 BRD

(Eingegangen am Dezember 16. 1975.)