

Diophantische Approximationen mit natürlichen Zahlen

Von ATTILA PETHŐ (Debrecen)

1. Einleitung

Bezeichne R^n das n -dimensionale reelle euklidische Raum und Z^n das Gitter der Punkte in R^n mit ganzen Koordinaten. Ist $(x_1, \dots, x_n) = \underline{x} \in R^n$, dann setzen wir $|\underline{x}| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Wir schreiben $\underline{x} > \underline{0}$ ($\underline{x} < \underline{0}$), wenn alle Koordinaten von $\underline{x}$ positiv (negativ) sind, und wir nennen diese Vektoren positiv (negativ).

Seien $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ linear unabhängige Linearformen mit reellen Koeffizienten und $\mathcal{L}(\underline{x}) = (L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x}))$. Nach dem Dirichletschen Approximationsatz (s. z. B. [1]) existieren eine Konstante $c > 0$ und unendlich viele $(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_r) \in Z^{n+r}$ mit $\underline{x} \neq \underline{0}$, welche der Ungleichung

$$(1) \quad \max_{1 \leq i \leq r} (|L_i(\underline{x}) - y_i|) = |\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leq c |\underline{x}|^{-(n/r)}$$

genügen. Der Einfachheit halber werde ich im Weiteren — wenn ich nicht anderes sage — unter einer Lösung eines Ungleichungssystems immer ein Element von Z^{n+r} verstehen.

Die Lage ist viel komplizierter, wenn wir Linearformen mit natürlichen Zahlen approximieren wollen.

Einerseits hat N. OBRESKOV [2] bewiesen, daß eine Konstante $c_1 > 0$ und unendlich viele $(\underline{x}, \underline{y}) \in Z^{n+r}$ mit $\underline{x} > \underline{0}$ existieren, welche der Ungleichung

$$|\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leq c_1 |\underline{x}|^{-(1/r)}$$

genügen. Später zeigte W. M. SCHMIDT [4] wenn $1, \alpha, \beta$ über Q linear unabhängige reelle Zahlen sind, dann existieren für jede $\varepsilon > 0$ unendlich viele x_1, x_2 natürliche Zahlen mit

$$\|\alpha x_1 + \beta x_2\| < \varepsilon |\underline{x}|^{-\mu}$$

wo $\mu = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist, und $\|z\|$ den Abstand zwischen z und der nächsten ganzen Zahl bezeichnet.

Andererseits bewies Schmidt in derselben Arbeit, daß über Q linear unabhängige reelle Zahlen $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ existieren, für welche bei jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c(\varepsilon)$ existiert, s. d.

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| > c(\varepsilon) |\underline{x}|^{-2-\varepsilon}$$

gilt für alle $\underline{0} < \underline{x} \in Z^n$.

In dieser Arbeit verallgemeinere ich ein Lemma von Schmidt auf den mehrdimensionalen Fall. Als Anwendung beweise ich unter anderem, daß $\mathcal{L}(\underline{x})$ mit natürlichen Zahlen nur dann sehr schlecht approximierbar ist, wenn es mit ganzen Zahlen sehr gut approximierbar ist.

Zur Formulierung der Sätze benötigen wir noch einige Bezeichnungen. Seien $M_1(\underline{x}), \dots, M_n(\underline{x})$ über R linear unabhängige Linearformen mit reellen Koeffizienten und $\mathfrak{M}(\underline{x}) = (M_1(\underline{x}), \dots, M_n(\underline{x}))$. Die Menge der Punkte $\underline{x}$ von R^n , welche dem Ungleichungssystem

$$(2) \quad |M_i(\underline{x})| < |M_n(\underline{x})| \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

genügen, werden wir *eckiges Bereich* nennen und mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß in jedem eckigen Bereich unendlich viele Elemente von Z^n liegen.

Satz 1. Sei $w^* < \infty$ die obere Grenze der Zahlen $w \geq 0$, für welche das Ungleichungssystem

$$(3) \quad |\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leq |\underline{x}|^{-(n/r)(1+w)}$$

unendlich viele Lösungen $\underline{x} \neq \underline{0}$ besitzt. Sei weiter η^* die untere Grenze der Zahlen η , für welche das Ungleichungssystem

$$(4) \quad |\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leq |\underline{x}|^{-(n/r)(1-\eta)}$$

unendlich viele Lösungen $\underline{x} \in \mathfrak{M} \cap Z^n$ besitzt. Dann ist

$$\eta^* \leq \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*}.$$

Da $1+nw^* > 0$ gilt, ist die Funktion $f(w^*) = \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*}$ streng monoton wachsend. So besteht

$$\eta^* \leq f(w^*) \leq \lim_{w^* \rightarrow \infty} \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*} = \frac{n-1}{n}$$

für alle $w^* < \infty$. Also ist η^* nicht größer als $(n-1)/n$ und $\frac{n}{r}(1-\eta^*) > \frac{1}{r}$.

Ich werde in Lemma 1 ein eckiges Bereich angeben, worin nur positive oder negative Vektoren liegen. Als Spezialfall folgt aus Satz 1 der Satz von Obreskov für alle Linearformen, welche in endlicher Ordnung approximierbar sind.

Ein System der Linearformen nenne ich, wie gewöhnlich, ein *Roth System* wenn für dieses die, in Satz 1 definierte Zahl $w^* = 0$ ist.

Das System der Linearformen $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ nenne ich *schlecht approximierbar* wenn eine solche Konstante $B > 0$ existiert, daß das Ungleichungssystem

$$(5) \quad |\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leq B|\underline{x}|^{-(n/r)}$$

keine Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$ besitzt.

Satz 2. Sei $\mathfrak{M}$ ein eckiges Bereich und $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein Roth System, dann besitzt für jede $\varepsilon, \eta > 0$

$$(6) \quad |\mathcal{L}(\underline{x}) - y| < \varepsilon |\underline{x}|^{-(n/r)(1-\eta)}$$

unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{Z}^n$.

Satz 3. Sei $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein schlecht approximierbares System und habe (5) mit $B = B_0$ keine Lösungen. Dann besitzt (5) für

$$B = P = \max(2^{1/r}, 2^{n(n^3+1)/r} B_0^{-n+1})$$

unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} > 0$.

Aus dem Beweis folgt, daß Satz 3 auch für alle eckigen Bereiche gilt.

Ein wichtiger Spezialfall der Sätze 2 und 3 ist: wenn $r=1$ und die Koeffizienten der Linearform $L(\underline{x}) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + x_{n+1}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige algebraische Zahlen sind. Wie W. M. Schmidt [3] gezeigt hatte, ist eine derartige Linearform ein Roth System. Wenn sogar $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu einem Körper vom Grad $n+1$ gehören, dann ist $L(\underline{x})$ schlecht approximierbar [1]. In Lemma 1 werde ich ein eckiges Bereich angeben, welches nur positive und negative Vektoren enthält. Auf dieses spezielle Bereich die obigen Sätze anwendend folgen die nächsten beiden Folgerungen aus Satz 2 bzw. 3.

Folgerung 1. Seien $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige reelle algebraische Zahlen, dann besitzt für jede $\varepsilon, \eta > 0$

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| < \varepsilon |\underline{x}|^{-n+\eta}$$

unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} > 0$.

Folgerung 2. Sei $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis eines Zahlkörpers vom Grad $n+1$. Es existiert eine Konstante $P_1 > 0$, für welche

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| < P_1 |\underline{x}|^{-n}$$

unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} > 0$ besitzt.

2. Lemmata

Zum Beweis der Sätze brauchen wir einige Lemmata.

Lemma 1. Sei $n \geq 2$; $\underline{x} \in R^n$ und

$$(7) \quad \begin{aligned} N_i(\underline{x}) &= x_1 + \dots + x_i - x_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ N_n(\underline{x}) &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Bezeichne $\mathfrak{N}$ das durch die $N_i(\underline{x})$ bestimmte eckige Bereich. Alle Elemente von $\mathfrak{N}$ sind entweder negativ oder positiv.

BEWEIS. Wir bemerken zuerst, daß $N_1(\underline{x}), \dots, N_n(\underline{x})$ über R linear unabhängig sind, so daß $\mathfrak{N}$ tatsächlich ein eckiges Bereich ist.

Das Lemma werden wir mit vollständiger Induktion beweisen. Setzen wir zunächst $n=2$. Dann ist nach der Definition

$$|x_1 - x_2| < |x_1 + x_2|.$$

Es gilt also $x_1 x_2 > 0$, deswegen haben x_1 und x_2 gleiche Vorzeichen und keine der beiden ist 0.

Nehmen wir nun an, daß die Behauptung für $n-1$ wahr ist. Setzen wir in (2) statt $M_i(\underline{x})$ überall $N_i(\underline{x})$, so bekommen wir die Definitionsungleichungen von $\mathfrak{N}$. Wegen der Konstruktion der $N_i(\underline{x})$ folgt aus den ersten $n-2$ Ungleichungen und aus der Induktionsvoraussetzung, daß $x_1, \dots, x_{n-1}$ gleiche Vorzeichen haben und alle $\neq 0$ sind.

Die letzte Ungleichung ist

$$|x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n| < |x_1 + x_2|.$$

Hätte x_n anderes Vorzeichen, als die anderen, oder wäre $x_n = 0$, dann wäre

$$|x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n| \geq |x_1 + \dots + x_{n-1}| \geq |x_1 + x_2|,$$

ein Widerspruch. So muß das Vorzeichen von x_n mit dem von $x_1, \dots, x_{n-1}$ übereinstimmen und das Lemma ist bewiesen.

Seien $\mathcal{L}(\underline{x})$ und $\mathfrak{M}(\underline{x})$ wie früher. Bilden wir aus den Koeffizienten von $M_1(\underline{x}), \dots, M_n(\underline{x})$ eine Determinante, wie gewöhnlich. Also in ihrer j -ten Reihe stehen der Reihe nach die Koeffizienten von $M_j(\underline{x})$. Den, von 0 verschiedenen, absoluten Betrag dieser Determinante werden wir mit D bezeichnen.

$M_1(\underline{x}), \dots, M_n(\underline{x})$ sind über R linear unabhängig, deshalb gibt es eine Konstante d , so daß

$$(8) \quad |\underline{x}| \leq d |\mathfrak{M}(\underline{x})|$$

für alle $\underline{x} \in R^n$ erfüllt ist.

Lemma 2. Seien $\mathcal{L}(\underline{x})$ und $\mathfrak{M}(\underline{x})$ wie früher, w^* wie in Satz 1, endlich $w > w^*$. Das Ungleichungssystem

$$(9) \quad |\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| < \varepsilon |\underline{x}|^{-(n/r)(1-\eta)}$$

besitzt für $\eta = \frac{(n-1)w}{1+nw} > 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M} \cap Z^n$.

BEWEIS. Seien D, d die obigen Konstanten. Es existiert eine weitere Konstante $(K\varepsilon, w) = K > 0$ welche der Bedingung

$$(10) \quad D^{\frac{1}{r}} K (d^n K^{-r})^{\frac{n(1+w)}{r(1+nw)}} < \varepsilon$$

genügt, wo ε, η die im Lemma gegebenen Konstanten sind.

Nehmen wir an, daß die Anzahl der Lösungen von (9) endlich ist. Dann gibt es eine N_0 so, daß für alle $N > N_0$, $\underline{x} \in \mathfrak{M}$, $(\underline{x}, \underline{y}) \in Z^{n+r}$ die Ungleichungen

$$|\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \geq \varepsilon N^{-(n/r)(1-\eta)}$$

$$|\underline{x}| \leq N$$

gelten.

Seien T eine beliebige reelle Zahl und $\Pi(T)$ die Menge derjenigen Elemente von R^{n+r} , welche den Bedingungen

$$(11) \quad \begin{aligned} |L_i(\underline{x}) - y_i| &< D^{1/r} K T^{-(n/r)(1+w)} \quad (i = 1, \dots, r) \\ |M_i(\underline{x})| &\leq d^{-1} T \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ |M_n(\underline{x})| &\leq d^{n-1} K^{-r} T^{1+nw} \end{aligned}$$

genügen. Man kann sehr leicht nachprüfen, daß der absolute Betrag der Determinante dieses Systems D ist. Infolge des Minkowskischen Linearformensatzes enthält $\Pi(T)$ für alle T einen von $\underline{0}$ verschiedenen ganzen Vektor.

Wenn T groß genug ist, dann ist $|\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}|$ klein und außerdem

$$d^{-1} T \leq d^{n-1} K^{-r} T^{1+nw}.$$

Nach (8) muß

$$|\underline{x}| \leq d d^{n-1} K^{-r} T^{1+nw} = N$$

gelten. Somit gilt

$$|\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| < D^{1/r} K (d^n K^{-r})^{\frac{n}{r} \frac{1+w}{1+nw}} N^{-\frac{n}{r} \frac{1+w}{1+nw}} < \varepsilon N^{-\frac{n}{r} (1-\eta)}.$$

Sei nun T so groß, daß auch noch $N > N_0$ erfüllt sei. So muß $\underline{x}$ infolge der indirekten Voraussetzung außer $\mathfrak{M}$ liegen. Es gilt also $|M_j(\underline{x})| \equiv |M_n(\underline{x})|$ für diese $\underline{x}$ mit irgendeinem Index $1 \leq j \leq n-1$. Nun folgt nochmals aus (8) und (11), daß

$$(12) \quad \begin{aligned} |\mathcal{L}(\underline{x}) - \underline{y}| &< D^{\frac{1}{r}} K T^{-\frac{n}{r} (1+w)} \\ |\underline{x}| &\leq T \end{aligned}$$

für alle genug große T mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt.

Es gibt weiter ein w' mit $w > w' > w^*$ und mit

$$D^{\frac{1}{r}} K < T^{\frac{n}{r} (w-w')}.$$

Infolge (12) besitzt (3) mit dieser w' unendlich viele Lösungen $\underline{x} \neq \underline{0}$. So muß $w' \equiv w^*$ sein, was ein Widerspruch ist. Die Voraussetzung also daß nur endlich viele Lösungen von (9) im $\mathfrak{M}$ liegen, war falsch. Somit ist Lemma 2 bewiesen.

Sei jetzt $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein schlecht approximierbares System. $\mathfrak{M}$, D und d seien wie in Lemma 2, ferner sei $A \leq d^{n/r}$ sowie

$$P \leq D^{\frac{1}{r}} A^{-n} d^{\frac{n^2}{r}}.$$

Lemma 3. Seien $\mathcal{L}(\underline{x})$, $\mathfrak{M}$ und P wie oben. Nehmen wir an, daß (5) für $B = P$ nur endlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M}$ besitzt. Dann hat (5) für $B = D^{1/r} A$ unendlich viele nichttriviale Lösungen.

BEWEIS. Dieses Lemma kann man mit demselben Gedankengang beweisen als Lemma 2, deshalb lassen wir den Beweis weg.

3. Beweis der Sätze

BEWEIS VON SATZ 1. Da $\eta > \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*} \geq 0$ ist, gibt es eine $w > 0$ mit $\eta = \frac{(n-1)w}{1+nw}$. Die Funktion $f(u) = \frac{(n-1)u}{1+nu}$ ist für $u \geq 0$ streng monoton wachsend, so muß $w > w^*$ sein.

Nach Lemma 2 besitzt (9) für dieses η und für jede $\varepsilon > 0$ unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M}$. Demzufolge gilt $\eta^* \leq \eta$ für alle $\eta = f(w) > f(w^*)$. So gilt

$$\eta^* \equiv \inf_{w > w^*} f(w) = \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*}$$

und damit ist Satz 1 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 2. Nach der Voraussetzung bilden die Linearformen $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein Roth System, d. h. für diese ist $w^* = 0$. Seien $\varepsilon, \eta > 0$ beliebige reelle Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\eta < (n-1)/n$ annehmen. Wenn dies nicht gilt, dann wählen wir ein kleineres η die der Bedingung genügt. Wenn der Satz für dieses kleineren Wert wahr ist, dann gilt er selbstverständlich auch für einen größeren Wert.

Setzen wir $w = \frac{\eta}{n-1-n\eta}$. Diese ist wegen der Wahl von η positiv. Wenden wir nun Lemma 2 auf $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ und $\mathfrak{M}$ mit dem obigen ε an. Da $w > w^* = 0$ gilt, besitzt (6) unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 3. Nach der Voraussetzung besitzt (5) mit $B = B_0$ und mit der Linearformen $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ keine Lösungen. Sei D der absolute Betrag der Determinante von $N_1(\underline{x}), \dots, N_n(\underline{x})$. $D = 2$ kann man mit einfacher Rechnung nachprüfen. Aus (7) kann man die x_i mit $N_i(\underline{x})$ folgenderweise ausdrücken.

$$x_1 = \frac{N_1(\underline{x}) + N_n(\underline{x})}{2}, \quad x_2 = \frac{N_n(\underline{x}) - N_1(\underline{x})}{2}$$

$$x_i = 2x_{i-1} + N_{i-2}(\underline{x}) - N_{i-1}(\underline{x}) \quad (i = 3, \dots, n)$$

Daraus folgt

$$|x_i| \leq 2^{n-1} |\mathfrak{N}(\underline{x})| \quad (i = 1, \dots, n)$$

für alle $\underline{x} \in R^n$.

Setzen wir $d = 2^{n-1}$, $A \leq \min(d^{\frac{n}{r}}, 2^{-\frac{1}{r}} B_0)$ und $P \geq 2^{1/r} A^{-n+1} d^{n^2/r}$. Hätte (5) für dieses P nur endlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{N}$, dann würde (5) für $B = 2^{\frac{1}{r}} A$ nach Lemma 3 unendlich viele nichttriviale Lösungen besitzen. Es gilt aber $B = 2^{\frac{1}{r}} A \leq B_0$, was der Wahl von B_0 widerspricht. So muß (5) für $B = P$ unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{N}$ besitzen.

$\mathfrak{N}$ ist ein zu $\underline{0}$ symmetrisches Bereich. Wenn $\underline{x}$ mit irgendeinem $\underline{y}$ (5) genügt, dann ist auch $(-\underline{x}, -\underline{y})$ eine Lösung von (5). Dies vervollständigt den Beweis von Satz 3.

Literatur

- [1] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Berlin, 1936.
- [2] Н. Обрешков, О диофантовых приближениях линейных форм для положительных значений переменных, *Докл. Акад. Наук. С.С.С.Р.*, **73** (1950), 21—24.
- [3] W. M. Schmidt, Linear forms with algebraic coefficients. I. *J. Number Theory* **3** (1971), 253—277.
- [4] W. M. Schmidt, Two questions in Diophantine approximation, *Monatsh. Math.* **82** (1976), 237—245.

(Eingegangen am 5. May 1977.)