

О двусторонних приближениях решений некоторых дифференциальных и операторных уравнений

Й. ХЕГЕДЫШ (Szeged)

Многие задачи теории дифференциальных уравнений эквивалентны отысканию неподвижной точки некоторого оператора A : например, начальные или краевые задачи эквивалентны отысканию неподвижной точки некоторого интегрального оператора A с ядром $G(x, t)$. Начальным задачам и некоторым специальным краевым задачам соответствуют такие ядра G , которые вместе со своими производными по x неотрицательны (или все неположительны), а потому соответствующий оператор A является монотонным (изотонным) оператором или легко сводится к монотонному случаю (см. напр. [6], [7]), что позволяет построить как угодно близкие двусторонние приближения для решения задачи (и его производных): см. напр. [1], [4], [6], [7].

Изложенный в настоящей работе метод дает двусторонние приближения для решения и его производных вышеупомянутых (начальных и специальных краевых) задач, для решения и его производных общей краевой задачи для нелинейного уравнения n -го порядка с однородными краевыми условиями, и для решения операторных уравнений в полуупорядоченном метрическом множестве, при условии сжатости соответствующих операторов A . Наш метод усиливает результаты работ [2], [5].

Мы будем рассматривать уравнение

$$(1) \quad y = Ay$$

в частично упорядоченном, полном метрическом множестве M , где заданный оператор A сжато отображает M в M , т. е.

$$Ah \in M, \quad \varrho(Ah, Ag) \leq \Theta \varrho(h, g)$$

$$(\forall h, g \in M; \Theta = \text{const.}, 0 < \Theta < 1).$$

Расстояние мы обозначаем буквой ϱ , а порядок знаком $\leq$.

Мы предполагаем, что метрика и упорядочение согласованы, в том смысле, что

$$[h \leq g \leq l] \Rightarrow \varrho(h, g), \quad \varrho(g, l) \leq \varrho(h, l) \quad (\forall h, g, l \in M),$$

более того, предполагаем, что члены монотонных, сходящихся (по метрике) последовательностей $\{h_p\} \nearrow$, $\{g_p\} \searrow$ сравнимы со своими пределами h, g (очевидно $h_p \leq h, g \leq g_p$).

В дальнейшем мы будем считать, что M есть подмножество линейного векторного пространства V , и пусть для любых $h, g \in M$

$$\frac{1}{2}(h+g) \in M^*).$$

$$\alpha_n h + (1 - \alpha_n)g \xrightarrow{q} \alpha h + (1 - \alpha)g \quad (0 \leq \alpha_n \leq 1).$$

Пусть

$$M' = \{\alpha(h-g) | h, g \in M; \alpha = \frac{1}{2}, 1\} \quad (h-h = 0 \in M')$$

и

$$\hat{M} = \{h \pm q | h \in M, q \in M'\} \quad (V \supseteq \hat{M} \supseteq M).$$

Пусть в $2M'$ введена метрика ϱ' и упорядочение $\cong'$ с помощью нулевого элемента, со свойством согласованности, и свойством сравнимости монотонных сходящихся (по ϱ') последовательностей со своими пределами; и пусть ϱ и ϱ' , $\cong$ и $\cong'$ эквивалентны, т. е.

$$a \cong b \Leftrightarrow a - b \cong' 0; \quad \varrho(a, b) = \varrho'(a - b, 0) = \|a - b\| \quad (\forall a, b \in M).$$

Упорядочение между элементами $h \in M$ и $a + q \in \hat{M}$ вводим по формуле

$$h \cong a + q \Leftrightarrow h - a \cong' q,$$

а для $a_1 + q_1, a_2 + q_2 \in \hat{M}$ порядок определяется формулой

$$a_1 + q_1 \cong a_2 + q_2 \Leftrightarrow a_1 - a_2 \cong' q_2 - q_1.$$

Пусть наконец M обладает свойством

$$(2) \quad [h_1 \cong g, g \cong h_2 \quad (h_1, h_2 \in M; g \in \hat{M})] \Rightarrow g \in M.$$

Вернемся к уравнению (1). При наших условиях существует единственное решение этой задачи (в дальнейшем всюду будем обозначать его через y). Пусть B есть оператор: $M \times M \rightarrow 2M'$, причем

$$\|B(h, g)\| \cong \Theta \|h - g\| \quad (0 < \Theta < 1, \Theta = \text{const}),$$

и пусть B не возрастает по h , а по g пусть не убывает. Введем операторы $F(h, g)$, $\Phi(h, g)$ по формулам:

$$F(h, g) = \frac{1}{2}(Ah + Ag) + \frac{1}{2}B(h, g),$$

$$\Phi(h, g) = \frac{1}{2}(Ah + Ag) - \frac{1}{2}B(h, g)$$

$$(F, \Phi: M \times M \rightarrow \hat{M}).$$

*) Это условие можно было бы более коротким условием — о выпуклости M — заменить, если из $\alpha_n \rightarrow \alpha$ следовало бы

Пусть F не возрастает по h и не убывает по g ; а Φ неубывает по h и не возрастает по g .

Мы будем говорить, что последовательности $\{a_p\}$, $\{b_p\}$ обладают свойством (A) в M , если все $a_p, b_p \in M$, кроме того для них и решения y задачи (1) имеет место

$$(A) \quad \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq y \leq \dots \leq b_2 \leq b_1, \\ a_p, b_p \xrightarrow{q} y \quad (p \rightarrow \infty). \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Если существуют такие элементы $z_1, w_1 \in M$, для которых

$$(i) \quad z_2 = F(z_1, w_1) \text{ и } w_2 = \Phi(z_1, w_1) \text{ принадлежат } M,$$

$$(ii) \quad z_2 \leq z_1, \quad w_1 \leq w_2,$$

$$(iii) \quad F(z_2, w_2) \leq z_1, \quad w_1 \leq \Phi(z_2, w_2),$$

тогда подпоследовательности $\{w_{2l-1}\}$, $\{z_{2l-1}\}$; $\{z_{2l}\}$, $\{w_{2l}\}$ ($l=1, 2, \dots$) последовательностей $\{z_p\}$, $\{w_p\}$, построенных по закону

$$(3) \quad z_{p+1} = F(z_p, w_p), \quad w_{p+1} = \Phi(z_p, w_p) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

обладают свойством (A) в M .

Доказательство. 1. Покажем, что все z_p, w_p принадлежат M . По предположению $z_1, z_2, w_1, w_2 \in M$, а поскольку

$$z_2 \leq z_1, \quad w_1 \leq w_2$$

то, в силу монотонности F и Φ получаем:

$$(4) \quad z_2 \leq z_3, \quad w_3 \leq w_2,$$

а эти неравенства, поскольку в силу условия (iii)

$$(5) \quad z_3 \leq z_1, \quad w_1 \leq w_3 \quad (z_3, w_3 \in \hat{M}),$$

лают

$$(6) \quad z_2 \leq z_3 \leq z_1, \quad w_1 \leq w_3 \leq w_2.$$

Из (6) в силу свойства (2) получаем, что $z_3, w_3 \in M$.

Приближения z_4, w_4 мы теперь можем вычислить по закону (3). Учитывая монотонность F, Φ , из неравенств

$$(7) \quad z_2 \leq z_3, \quad w_3 \leq w_2$$

получаем, что

$$(8) \quad z_4 \leq z_3, \quad w_3 \leq w_4,$$

аналогично из неравенств

$$(9) \quad z_3 \leq z_1, \quad w_1 \leq w_3$$

вытекает в силу монотонности F и Φ , что

$$(10) \quad z_2 \leq z_4, \quad w_4 \leq w_2.$$

Неравенства (8) и (10) вместе дают

$$(11) \quad z_2 \leq z_4 \leq z_3, \quad w_3 \leq w_4 \leq w_2 \quad (z_4, w_4 \in \dot{M}).$$

В силу свойства (2) отсюда заключаем, что $z_4, w_4 \in M$.

Совершенно так же можно (по индукции) показать, что все $z_p, w_p \in M$ ($p=1, 2, \dots$) и что справедливы неравенства типа (6), (11) при $l=1, 2, \dots$

$$(12) \quad \begin{cases} z_{2l} \leq z_{2l+2} \leq z_{2l+1}, & z_{2l} \leq z_{2l+1} \leq z_{2l-1}, \\ w_{2l+1} \leq w_{2l+2} \leq w_{2l}, & w_{2l-1} \leq w_{2l+1} \leq w_{2l}, \end{cases}$$

из которых вытекает, что

$$(13) \quad w_{2l-1} \nearrow, z_{2l-1} \searrow; \quad z_{2l} \nearrow, w_{2l} \searrow \quad (l=1, 2, \dots).$$

2. Покажем, что последовательности в (13) фундаментальны. Очевидно, что

$$(14) \quad \|z_{p+1} - w_{p+1}\| = \|B(z_p, w_p)\| \leq \Theta \|z_p - w_p\| \leq \Theta^p \|z_1 - w_1\| \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

и что при любых l, k натуральных

$$(14) \quad \|z_{p+1} - w_{p+1}\| = \|B(z_p, w_p)\| \leq \Theta \|z_p - w_p\| \leq \Theta^p \|z_1 - w_1\| \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

(15) и что при любых l, k натуральных

Покажем справедливость отношений (15) например для элементов с четным индексом (второе соотношение, для нечетных индексов совершенно так же доказывается). Заметим, что

$$z_{2k} - w_{2k} = B(z_{2k-1}, w_{2k-1}),$$

откуда, поскольку

$$z_{2k-1} \searrow, w_{2k-1} \nearrow$$

и B невозрастает по первому аргументу, а по второму не убывает, получаем, что

$$z_{2k} - w_{2k} \nearrow, \quad \text{т. е.} \quad z_{2k} - w_{2k} \leq' z_{2(k+1)} - w_{2(k+1)} \leq' \dots,$$

а по (14)

$$z_{2k} - w_{2k} \xrightarrow{\parallel} 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Из последних двух соотношений получаем, что

$$z_{2k} - w_{2k} \leq' 0, \quad \text{т. е.} \quad z_{2k} \leq w_{2k},$$

а отсюда, поскольку $\{z_{2k}\} \nearrow$, вытекает, что

$$z_{2l} \leq z_{2k} \leq w_{2k} \quad (l \leq k).$$

В случае $l > k$ можем воспользоваться тем, что $\{w_{2k}\} \searrow$, и значит

$$z_{2l} \leq w_{2l} \leq w_{2k}.$$

Формулы (15) доказаны.

Докажем теперь, что последовательность $\{z_{2k}\}$ фундаментальна (для остальных трех подпоследовательностей (13) совершенно так же можно это показать).

Последовательность $\{z_{2k}\}$ не убывает, поэтому в силу (15), (14) и согласованности упорядочения и метрики при любых m и n ($m > n$) имеем:

$$z_{2n} \leq z_{2m} \leq w_{2n}, \quad \|z_{2m} - z_{2n}\| \leq \|w_{2n} - z_{2n}\| \leq \Theta^{2n-1} \|z_1 - w_1\|,$$

откуда вытекает фундаментальность $\{z_{2k}\}$.

3. Покажем, что последовательности (13) сходятся к решению y задачи (1). В силу полноты M существуют пределы (по норме)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{2k} = h, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} w_{2k} = g \quad (h, g \in M),$$

причем $h = g$, поскольку

$$\|h - g\| \leq \|h - z_{2k}\| + \|z_{2k} - w_{2k}\| + \|w_{2k} - g\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Аналогично можно показать, что

$$z_{2l-1}, w_{2l-1} \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{h} \in M.$$

Покажем, что $h = \tilde{h}$. Для этого перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$ в формуле

$$z_{p+1} = F(z_p, w_p)$$

сначала по p четным, а потом по p нечетным. Оператор A сжатие, потому он непрерывен (относительно метрики), далее $\|B(z_p, w_p)\| \rightarrow 0$ ($p \rightarrow \infty$), поэтому после упомянутых предельных переходов получаем

$$\tilde{h} = Ah, \quad h = A\tilde{h},$$

откуда

$$\varrho(\tilde{h}, h) = \varrho(Ah, A\tilde{h}) \leq \Theta \varrho(\tilde{h}, h) \quad (0 < \Theta < 1, \quad \Theta = \text{const}),$$

т. е. $\tilde{h} = h = y$, что и требовалось доказать. Доказанная теорема имеет много применений (см. об этом [7]).

II.

Рассмотрим краевую задачу

$$(16) \quad \begin{cases} y^{(n)}(x) = f[y] \equiv f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) & (0 \leq x \leq 1, \quad n \geq 2), \\ L_i y = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{ik} y^{(k)}(0) + b_{ik} y^{(k)}(1)) = 0 & (i = 0, \dots, n-1) \end{cases}$$

с заданной непрерывной непрерывно дифференцируемой о $u_0, \dots, u_{n-1}$ функцией

$$f(x, u_0, \dots, u_{n-1}): [0, 1] \times R \times \dots \times R \rightarrow R, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right| \leq N \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

и с такими постоянными a_{ik} , b_{ik} , чтобы задача

$$y^{(n)}(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1; n \geq 2), \quad L_i y = 0 \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

имела лишь тривиальное решение $y \equiv 0$.

Задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y = y(x) = Ay = \int_0^1 G(x, t) f[y(t)] dt$$

(где G есть функция Грина) в линейном пространстве M , $(n-1)$ -раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих краевым условиям. Введем упорядочение и метрику в M по формулам:

$$(17) \quad \begin{cases} z \leq w \Leftrightarrow z^{(i)}(x) \leq w^{(i)}(x) & (0 \leq x \leq 1; i = 0, \dots, n-1), \\ \varrho(z, w) = \|z - w\| = \sum_{i=0}^{n-1} \max_{[0,1]} |z^{(i)}(x) - w^{(i)}(x)|. \end{cases}$$

Предположим, что выполнено условие

$$(18) \quad N \sum_{i=0}^{n-1} \max_{[0,1]} \int_0^1 \left| \frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i} \right| dt = \Theta < 1,$$

которое обеспечивает, что A сжато отображает M в M . В конце работы мы покажем, что для задачи (16) существует функция $\tilde{G}(x, t)$ ($0 \leq x, t \leq 1$), $(n-2)$ -раза непрерывно дифференцируемая по x в каждом из секторов $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, $0 \leq t \leq 1$; причем в точках линий $x = x_j$ ($j = 0, \dots, m$) существуют только односторонние производные порядка $i = 0, \dots, n-1$, где

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_m = 1$$

некоторые числа $\left(\frac{\partial^{n-1} \tilde{G}}{\partial x^{n-1}} \right)$ непрерывна в каждом из секторов $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, $t \leq x$ соотв. $x \leq t$, но в точках линии $x = t$ односторонние производные $\frac{\partial^{n-1} \tilde{G}}{\partial x^{n-1}}$ не обязательно совпадают; а односторонние производные $\frac{\partial^i \tilde{G}}{\partial x^i}$ ($i \leq n-2$) в точках линии $x = x_j$ могут не совпадать). Для построенной нами функции $\tilde{G}$ выполняются неравенства

$$(19) \quad N \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \left| \frac{\partial^i \tilde{G}(x, t)}{\partial x^i} \right| dt = \Theta_1 < 1 \quad \left(\widetilde{[0, 1]} = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^m x_j \right),$$

$$(20) \quad \frac{\partial^i \tilde{G}(x, t)}{\partial x^i} \leq - \left| \frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i} \right| \quad (i = 0, \dots, n-1; x \neq x_0, \dots, x_m).$$

Подчеркиваем, что в задаче (16) мы не требуем знакопостоянности ни самой функции G , ни ее производных.

Введем теперь и линейное пространство Z функций $(n-1)$ -раз непрерывно дифференцируемых на множестве $\bigcup_{j=0}^{m-1} [x_j+0, x_{j+1}-0]$ (в самих точках x_j мы требуем существование односторонних производных порядка $i=0, \dots, n-1$). Введем упорядочение и метрику в Z по формулам:

$$(21) \quad z \leq w \Leftrightarrow \begin{cases} z^{(i)}(x) \leq w^{(i)}(x) & (x \in \bigcup_{j=0}^{m-1} (x_j, x_{j+1})), \\ z^{(i)}(x_j+0) \leq w^{(i)}(x_j+0), \\ z^{(i)}(x_{j+1}-0) \leq w^{(i)}(x_{j+1}-0), \\ (i = 0, \dots, n-1; j = 0, \dots, m-1), \end{cases}$$

$$(22) \quad \rho(z, w) = \|z - w\| = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [0,1]} |z^{(i)}(x) - w^{(i)}(x)|.$$

Очевидно, что $Z \supset M$ и что Z полно относительно метрики, более того метрика и упорядочение согласованы, члены монотонных сходящихся последовательностей сравнимы со своими пределами.

Пусть в дальнейшем $\tilde{A}$ (расширение оператора A на Z) и $\tilde{B}$ обозначают следующие операторы, переводящие Z , соотв. $Z \times Z$ в Z :

$$(23) \quad \begin{cases} \tilde{A}z = \int_0^1 G(x, t) f[z(t)] dt = \sum_{i=1}^{s-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x, t) f[z(t)] dt + \int_{x_s}^x G(x, t) f[z(t)] dt + \\ + \int_x^{x_{s+1}} G(x, t) f[z(t)] dt + \sum_{i=s+1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x, t) f[z(t)] dt, \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \tilde{B}(z, w) = N \int_0^1 \tilde{G}(x, t) \Delta_{z, w}(t) dt = N \left\{ \sum_{i=0}^{s-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{G}(x, t) \Delta_{z, w}(t) dt + \right. \\ \left. + \int_{x_s}^x \tilde{G}(x, t) \Delta_{z, w}(t) dt + \int_x^{x_{s+1}} \tilde{G}(x, t) \Delta_{z, w}(t) dt + \sum_{i=s+1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{G}(x, t) \Delta_{z, w}(t) dt \right\}, \end{cases}$$

где

$$\Delta_{z, w}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} [z^{(i)}(t) - w^{(i)}(t)].$$

Отметим, что $\tilde{B}$ не возрастает по z и не убывает по w . Очевидно, что операторы F и Φ определенные на $Z \times Z$, действующие по формулам:

$$(25) \quad F(z, w) = \frac{1}{2} (\tilde{A}z + \tilde{A}w) + \frac{1}{2} \tilde{B}(z, w),$$

$$(26) \quad \Phi(z, w) = \frac{1}{2} (\tilde{A}z + \tilde{A}w) - \frac{1}{2} \tilde{B}(z, w),$$

переводят $Z \times Z$ в Z . Легко показать, используя формулы (20), что F не возрастает по z и не убывает по w , а Φ не убывает по z и не возрастает по w .

Используя неравенство (19), нетрудно убедиться в том, что оператор $\tilde{A}$ сжато отображает Z в Z , поэтому уравнение $\tilde{A}z = z$ в пространстве Z имеет единственное решение $z = z(x)$. Однако сужение метрики, введенной в Z , на M совпадает с исходной метрикой M а $\tilde{A}|_M = A$ сжато отображает (относительно этой исходной метрики) M в M , и поэтому функция $z = z(x)$ совпадает с единственным решением $y = y(x)$ задачи (16). Справедлива следующая

Теорема 2. Если существуют такие функции $z_1, w_1 \in Z$, для которых

$$(i) \quad z_2 = F(z_1, w_1) \leq z_1, \quad w_1 \leq w_2 = \Phi(z_1, w_1),$$

$$(ii) \quad z_3 = F(z_2, w_2) \leq z_1, \quad w_1 \leq w_3 = \Phi(z_2, w_2)^*),$$

тогда подпоследовательности $\{w_{2l-1}\}, \{z_{2l-1}\}; \{z_{2l}\}, \{w_{1l}\} (l=1, 2, \dots)$ последовательностей $\{z_p\}, \{w_p\}$, построенных по закону

$$(27) \quad z_{p+1} = F(z_p, w_p), \quad w_{p+1} = \Phi(z_p, w_p) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

обладают свойством (A) в пространстве Z (таким образом и односторонние производные $z_p^{(i)}(x_j \pm 0), w_p^{(i)}(x_j \pm 0) (i=0, \dots, n-1; j=0, \dots, m)$ сходятся к одному и тому же пределу, именно к $y^{(i)}(x_j)$).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1, используя монотонность F и Φ , легко доказать неравенства

$$(28) \quad \begin{cases} z_{2l} \leq z_{2l+2} \leq z_{2l+1}, & z_{2l} \leq z_{2l+1} \leq z_{2l-1}, \\ w_{2l+1} \leq w_{2l+2} \leq w_{2l}, & w_{2l-1} \leq w_{2l+1} \leq w_{2l}, \end{cases}$$

при $l=1, 2, \dots$; из которых вытекает, что

$$(29) \quad w_{2l-1} \nearrow, z_{2l-1} \searrow; z_{2l} \nearrow, w_{2l} \searrow \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Эти монотонные последовательности функций ограничены, значит сходятся к некоторому элементу Z , но поскольку

$$\|z_{2l-1} - w_{2l-1}\|, \|z_{2l} - w_{2l}\| \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty),$$

можно утверждать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} z_{2l-1} = \lim_{l \rightarrow \infty} w_{2l-1} = \tilde{y}; \quad \lim_{l \rightarrow \infty} z_{2l} = \lim_{l \rightarrow \infty} w_{2l} = \tilde{\tilde{y}}.$$

Перейдем теперь к пределу при $p \rightarrow \infty$ в формулах (27), сначала по p четным, потом по p нечетным. Учитывая непрерывность $\tilde{A}$, вытекающую из того, что $\tilde{A}$ сжатие, получаем

$$\tilde{\tilde{y}} = \tilde{A}\tilde{y}, \quad \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{\tilde{y}},$$

откуда

$$\varrho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) = \varrho(\tilde{A}\tilde{\tilde{y}}, \tilde{A}\tilde{y}) \leq \Theta \varrho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) \quad (0 < \Theta < 1),$$

*) Можно показать, что если левая часть в условии сжатости (18) меньше чем $\frac{1}{2}$, то функции z_1, w_1 , удовлетворяющие (одновременно) условиям (i), (ii) существуют.

значит

$$\tilde{y} = \tilde{\tilde{y}}, \quad \tilde{y} = A\tilde{y}.$$

Итак, предельная функция $\tilde{y}$ является элементом пространства M , т. е. $\tilde{y}$ совпадает с решением y задачи (16). Теорема доказана.

Теперь можем сформулировать обобщение теорем 1 и 2.

Вернемся к уравнению (1). Предположим, что имеется полное метрическое, частично упорядоченное множество $\tilde{M} \supset M$, с метрикой $\tilde{\varrho}$ и, упорядочением $\tilde{\leq}$ ($\tilde{\varrho}$ и $\tilde{\leq}$ обладают всеми свойствами ϱ и $\leq$), обладающее всеми свойствами M ; кроме того, пусть $\tilde{\varrho}$ и $\tilde{\leq}$ являются продолжением ϱ и $\leq$, т. е. для любых $h, g \in M$

$$\varrho(h, g) = \tilde{\varrho}(h, g); \quad h \leq g \Leftrightarrow h \tilde{\leq} g.$$

Допустим, что оператор A имеет продолжение $\tilde{A}$, сжато отображающее (относительно $\tilde{\varrho}$) $\tilde{M}$ в $\tilde{M}$. Пусть имеется у нас оператор $\tilde{B}: \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow 2\tilde{M}'$ (см. разд. I), причем для любых двух $\tilde{h}, \tilde{g} \in \tilde{M}$

$$\|\tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g})\| \sim \tilde{\varrho}(\tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}), 0) \leq \Theta_1 \|\tilde{h} - \tilde{g}\| \sim \quad (0 < \Theta_1 < 1),$$

$\tilde{B}$ не возрастает по первому и не убывает по второму аргументу. Введем операторы

$$\tilde{F}(\tilde{h}, \tilde{g}) = \frac{1}{2} (\tilde{A}\tilde{h} + \tilde{A}\tilde{g}) + \frac{1}{2} \tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}),$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{h}, \tilde{g}) = \frac{1}{2} (\tilde{A}\tilde{h} + \tilde{A}\tilde{g}) - \frac{1}{2} \tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}).$$

Пусть $\tilde{F}$ не возрастает по $\tilde{h}$ и не убывает по $\tilde{g}$, а $\tilde{\Phi}$ наоборот.

Задача (1) при наших условиях имеет единственное решение $\tilde{y} \in \tilde{M}$ (в самом деле $\tilde{y} \in M$). Двусторонние приближения (относительно $\tilde{\leq}$) к $\tilde{y}$ мы будем строить, исходя из некоторых $\tilde{z}_1, \tilde{w}_1 \in \tilde{M}$ по формуле:

$$\tilde{z}_{p+1} = \tilde{F}(\tilde{z}_p, \tilde{w}_p), \quad \tilde{w}_{p+1} = \tilde{\Phi}(\tilde{z}_p, \tilde{w}_p) \quad (p = 1, 2, \dots).$$

При этих условиях имеет место:

Теорема 3. Если существуют такие элементы $\tilde{z}_1, \tilde{w}_1 \in \tilde{M}$, для которых выполняются условия (i), (ii), (iii) теоремы 1 в $\tilde{M}$, то подпоследовательности $\{\tilde{w}_{2l-1}\}$, $\{\tilde{z}_{2l-1}\}$; $\{\tilde{z}_{2l}\}$, $\{\tilde{w}_{2l}\}$ обладают свойством (A) в $\tilde{M}$.

Доказательство почти совпадает с доказательством теоремы 2 имеются лишь следующие различия. В этом случае надо обеспечить отдельным условием, чтобы все $\tilde{z}_p, \tilde{w}_p$ принадлежали $\tilde{M}$ (это как раз условия (i), (iii) и (2)), кроме того, для доказательства фундаментальности $\{\tilde{z}_p\}$, $\{\tilde{w}_p\}$ надо провести рассуждения части 2. доказательства теоремы 1.

Теорема 3. может быть применена к общей задаче (16) с правой частью $f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, определенной лишь в конечном бруске $[0, 1] \times [-K, K] \times \dots \times [-K, K]$ ($K > 0$).

О построении функции $\tilde{G}$.

Предположим, что нам надо решить задачу (16) при условиях, описанных в начале части II. работы. В конкретной ситуации у нас имеется фиксированная функция f , удовлетворяющая условию (18). Возьмем теперь число $\frac{1}{2}(1-\Theta)$. Мы построим такую функцию $\tilde{G}$ с требуемой гладкостью, для которой выполняются неравенства

$$-\left|\frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i}\right| - \varepsilon \leq \frac{\partial^i \tilde{G}(x, t)}{\partial x^i} \leq -\left|\frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i}\right| \quad (i = 0, \dots, n-2),$$

$$\frac{\partial^{n-1} \tilde{G}(x, t)}{\partial x^{n-1}} = -\left|\frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}}\right|,$$

а значит и условие (19) выполняется, если

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}(1-\Theta) \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Функция Грина задачи $y^{(n)}=f$, $L_i y=0$ ($i=0, \dots, n-1$) соответствующая задаче (16), есть

$$G(x, t) = \begin{cases} A_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + A_0(t) & x \leq t, \\ B_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + B_0(t) & x \geq t. \end{cases}$$

Введем теперь вспомогательные функции $z_*(x, t)$ и $z^*(x, t)$, определенные для значений (x, t) из нижнего соотв. верхнего треугольников ($x \geq t$, соотв. $x \leq t$) квадрата $0 \leq x, t \leq 1$, исходя из точки (x_0, t) :

$$z_*(x, t), z^*(x, t) =$$

$$= -\left|\frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}}\right|_{(x_0, t)} \left[\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i}\right|_{(x_0, t)} \right] \right],$$

или более подробно:

$$(30) \quad z_*(x, t) = -|B_{n-1}(t)|(x-x_0)^{n-1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{j=i}^{n-1} B_j(t) x_0^{j-i} \cdot j(j-1) \dots (j-i+1) \right| \right] \quad (x > x_0),$$

$$(31) \quad z^*(x, t) = -|A_{n-1}(t)|(x-x_0)^{n-1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{j=i}^{n-1} A_j(t) x_0^{j-i} \cdot j(j-1) \dots (j-i+1) \right| \right] \quad (x < x_0).$$

Вычислим теперь производные порядка k ($0 \leq k \leq n-2$) по x от функций z_* и z^* . Они являются полиномами относительно $(x-x_0)$ с коэффициентами,

не превосходящими по модулю некоторого числа $K > 0$, с постоянным членом

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right|_{(x_0, t)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{2} - \left| \sum_{j=k}^{n-1} B_j(t) x_0^{j-k} \cdot j(j-1) \dots (j-k+1) \right| & x_0 \geq t, \\ -\frac{\varepsilon}{2} - \left| \sum_{j=k}^{n-1} A_j(t) x_0^{j-k} \cdot j(j-1) \dots (j-k+1) \right| & x_0 \leq t. \end{cases}$$

Поэтому если мы строим $z_*(x, t)$ и $z^*(x, t)$ для точек линии $t = \text{const.}$ вправо соотв. и влево от точки (x_0, x_0) , то из известных свойств функции Грина G вытекает, что все производные k -го порядка ($0 \leq k \leq n-2$) от z_* и z^* по x в точке (x_0, x_0) совпадают, они равны только что выписанному постоянному члену при $t = x_0$, и поэтому и неравенство

$$-\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right| - \varepsilon < \frac{\partial^k z_*(x, t)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^k z^*(x, t)}{\partial x^k} < -\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right| \quad (0 \leq k \leq n-2)$$

обеспечено в точке (x_0, x_0) . Поскольку k -ая производная от z_* , z^* в точке (x_0, x_0) есть

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right|_{(x_0, x_0)},$$

то в силу равномерной непрерывности $\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right|$ ($0 \leq k \leq n-2$) по (x, t) и того, что коэффициенты полинома для k -ой производной от z_* и z^* по модулю не превосходят некоторого числа $K > 0$, неравенство

$$-\varepsilon - \left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right| \leq \frac{\partial^k z_*(x, t)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^k z^*(x, t)}{\partial x^k} \leq -\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right| \quad (0 \leq k \leq n-2)$$

сохраняется и при всех тех значениях x (при строении z_* и z^* для точек линии $t = \text{const.}$, исходя из точки (x_0, x_0)), для которых

$$|x - x_0| < \delta_1,$$

где $\delta_1 > 0$ некоторая универсальная постоянная для всех только что упомянутых (в скобках) строений.

Аналогичные рассуждения показывают, что при строении z_* по формуле (30) для точек линии $t = \text{const.}$, лежащих направо от точки (x_0, t) ; соотв. при строении z^* по формуле (31) для точек линии $t = \text{const.}$, лежащих налево от точки (x_0, t) неравенства

$$-\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right| - \varepsilon < \frac{\partial^k z_*(x, t)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^k z^*(x, t)}{\partial x^k} < -\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right| \quad (0 \leq k \leq n-2)$$

сохраняются при всех x , для которых $|x - x_0| < \delta_2$, где $\delta_2 > 0$ универсальная постоянная для всех этих строений, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k z_*(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{(x_0, t)} &= -\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right|_{(x_0, t)} - \frac{\varepsilon}{2} \quad (x_0 > t), \\ \frac{\partial^k z^*(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{(x_0, t)} &= -\left| \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial x^k} \right|_{(x_0, t)} - \frac{\varepsilon}{2} \quad (x_0 < t). \end{aligned}$$

Из формул (30), (31) сразу видно, что

$$\frac{\partial^{n-1} z_*(x, t)}{\partial x^{n-1}} = -(n-1)! |B_{n-1}(t)| = - \left| \frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}} \right| \quad (x \geq t),$$

$$\frac{\partial^{n-1} z^*(x, t)}{\partial x^{n-1}} = -(n-1)! |A_{n-1}(t)| = - \left| \frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}} \right| \quad (x \leq t).$$

Возьмем теперь число $\delta > 0$ ($\delta < \delta_1, \delta_2$) и проведем конечное число прямых $x = x_i$ ($i=0, \dots, m$; $x_0=0, x_m=1$) в квадрате $0 \leq x, t \leq 1$ так, чтобы $x_{i+1} - x_i \leq \delta$ выполнялось для всех $i=0, \dots, m-1$. Требуемую функцию $\tilde{G}(x, t)$ теперь уже легко построить отдельно в каждом из секторов $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ по следующему правилу. Данный сектор разбиваем на нижний и верхний прямоугольники ($t \leq x_i$, соотв. $t \geq x_{i+1}$) и квадрат $x_i \leq x, t \leq x_{i+1}$, состоящий из нижнего и верхнего подтреугольника. В нижнем прямоугольнике $\tilde{G}(x, t)$ определяем формулой (30), исходя из точек отрезка $x = x_i$ ($t \leq x_i$) направо, а в верхнем прямоугольнике формулой (31), исходя из точек отрезка $x = x_{i+1}$ ($t \geq x_{i+1}$) налево. Далее, в нижнем подтреугольнике $\tilde{G}$ определяем формулой (30), а в верхнем подтреугольнике формулой (31).

Отметим, что во многих случаях (например при $n=2$) можно построить функцию $\tilde{G}$ более простого вида, чем вышеописанная. Для задачи в [5], например, можно взять $\tilde{G} = G$ при $x \leq t$, а в треугольнике $x \geq t$ в полосах $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ширины $\delta \leq \varepsilon = \frac{1-\theta}{2} \cdot \frac{1}{N+1}$ прямолинейные образующие поверхности $z = G(x, t)$ нужно направить под противоположным углом наклона из точек $(x_0, t, G(x_0, t))$ ($x_0 \geq t$).

Приведенные методы применимы и для решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и решения задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также для решения некоторых функционально-дифференциальных уравнений.

Литература

- [1] W. WALTER, Differential- und Integral-Ungleichungen, Springer—Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg—New York 1964.
- [2] A. AVERNA, Studio con un procedimento di quasilinearizzazione del problema:

$$\begin{cases} u^{(IV)} = f(x, u, u', u'', u'''), \\ u(0) = u'(0) = 0, u(a) = u'(a) = 0, \end{cases}$$
Matematiche (Catania), **24** (1969), 66—91.
- [3] V. LAKSHMIKANTHAM—S. LEELA, Differential and integral inequalities, Volume 1, 2; Academic Press New York—London, 1962.
- [4] Т. Аманкулов, Приближенное решение систем интегро-дифференциальных уравнений с помощью мажорантно-минорантных функций; *Изв. вузов, матем.*, **40** (70): 1968, 6—12.
- [5] Ю. И. Ковач—Л. И. Савченко, Решение одной краевой задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, *Украинский Математический Журнал*, **20**: 1 (1968), 34—44.
- [6] Ю. И. Ковач—J. HEGEDŰS, Об одном двустороннем итерационном методе решения краевой задачи с запаздыванием; *Acta Sci. Math.*, **36** (1974), 69—89.
- [7] J. HEGEDŰS, On a two-sided iterative method, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **15** Differential Equations, *Keszthely* (Hungary) 1975, 277—290.

(Поступила: 17. IX. 1975)