

Multiplications infra-distributives sur un groupe

Par MIRELA ȘTEFĂNESCU (Jasi)

On définit et on étudie la notion de multiplication infra-distributive à gauche sur un groupe G . On établit aussi la liaison entre ces multiplications et les multiplications distributives à gauche et les multiplications «faiblement» distributives [8]. On étudie l'équivalence des multiplications infra-distributives à gauche, obtenant des résultats qui généralisent ceux de WILLIAMS [10] et CLAY [4]. On donne des exemples de multiplications infra-distributives à gauche sur un groupe G qui sont exprimées par l'opération groupale. L'ensemble des multiplications infra-distributives à gauche sur G est muni-quand il est possible-d'une structure de groupe, en retrouvant ainsi des résultats concernant les multiplications distributives à gauche [3] ou bilatéralement [7].

§.1. Notations, définitions, exemples

Nous désignons par $G=(G, +)$ un groupe, par $\text{End } G$ ($\text{Aut } G$) l'ensemble de ses endomorphismes (resp. automorphismes), par $\text{Map}(A, B)$ l'ensemble des fonctions de A dans B (A et B sont deux ensembles).

Soit $A=(A, +, \cdot)$ un anneau (presque-anneau distributif avec les produits de ses éléments dans le centre de $(A, +)$). Alors l'anneau faible [5, 6] (le presque-anneau faible [8]) associé à A est la structure algébrique $(A, +, \circ)$, où l'opération binaire « $\circ$ » est définie par: $x \circ y = x \cdot y + x + y$, $\forall x, y \in A$, pour le premier type, et par $x \circ y = x \cdot y + \varphi(x) + \psi(y)$, $\forall x, y \in A$, avec $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$, $\psi_1(x) = \psi(x) - \psi(0)$, $\forall x \in A$, des endomorphismes de $(A, +)$, pour le second type.

Definition 1.1. Nous appelons une fonction $\mu: G \times G \rightarrow G$ multiplication infra-distributive à gauche (m.i.-d.g.), si on a:

$$(1.1) \quad \mu(x, y+z) = \mu(x, y) - \mu(x, 0) + \mu(x, z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

Si μ est associative, alors nous appelons $(G, +, \mu)$ un infra-presque anneau à gauche.

Si $\mu(x, 0) = 0$, $\forall x \in G$, alors μ est appelée distributive à gauche (m.d.g.) ([3]).

Nous désignons l'ensemble des m.d.g. sur G par $\text{Mult}_g G$, et celui des m.i.-d.g. par $\text{Mult}_i G$.

Alors $\text{Mult}_g G \subseteq \text{Mult}_i G$. Il y a, évidemment, des éléments de $\text{Mult}_i G$ qui ne sont pas en $\text{Mult}_g G$. Ainsi, les multiplications d'anneau (presque anneau) faible sur l'anneau $(A, +, \cdot)$ sont m.i.-d.g. avec $\mu(x, 0) = x$ (le premier type) et $\mu(x, 0) = \varphi(x) + \psi(0)$ (le second type), $\forall x \in A$, sans être m.d.g. Il y a des multiplications qui sont à la fois m.i.-d.g. et distributives à droite, c'est-à-dire $\mu(x+y, z) =$

$=\mu(x, z)+\mu(y, z), \forall x, y, z \in G$. Par exemple, si G est un groupe métabelien, la multiplication $\mu(x, y)=[x, y]+x, \forall x, y \in G$, où $[x, y]:=-x-y+x+y$, est de ce type. Enfin, si V est un espace vectoriel sur un corps commutatif, l'ensemble des transformations affines de V est un presque anneau à droite [2], mais sa multiplication (la composition des transformations) est i.-d.g. par rapport à l'addition (ponctuelle), comme nous avons remarqué. Ce type de multiplications nous a inspiré une autre Note [8].

Quelques multiplications bilatéralement distributives et associatives sur G sont les suivantes:

(a) $\mu_1(x, y)=x, \mu_2(x, y)=y, \mu_3(x, y)=y+x, \mu_4(x, y)=x+a+y, \forall x, y \in G$ (a étant un élément fixé de G). Nous remarquons que μ_3 et μ_4 sont des opérations groupales. De plus, si $\mu \in \text{Mult}_i G$, alors μ est i.-d.g. sur μ_4 . On peut ainsi construire une suite de multiplications qui sont à la fois des opérations groupales, i.-d.g. sur les autres et admettent μ comme m.i.-d.g.

(b) $\mu_5(x, y)=-x, \mu_6(x, y)=-x+y, \mu_7(x, y)=y-x, \mu_8(x, y)=-x+y+x,$
 $\forall x, y \in G,$

sont i.-d.g., sans être, en général, associatives.

Nous avons des exemples de multiplications qui sont i.-d. g. seulement quand G satisfait des conditions spéciales:

(c) $\mu_9(x, y)=x+y+[x, y], \mu_{10}(x, y)=y+[x, y]+x, \mu_{11}(x, y)=$
 $=y+[-x, -y]+x, \forall x, y \in G,$

sont des m.i.-d.g. si et seulement si les éléments de G satisfont à la condition:

$$(1.2) \quad [x, y]+[z, x]=[z, x]+[x, y], \quad \forall x, y, z \in G.$$

Chaque groupe métabelien satisfait à (1.2), mais il y a des groupes par exemple ceux nilpotents de troisième ordre, qui satisfont à (1.2), sans être métabéliens.

Si on donne la multiplication:

(d) $\mu_{12}(x, y)=f(x)+g(y), \quad \forall x, y \in G, \quad f, g \in \text{Map}(G, G),$

alors $\mu_{12} \in \text{Mult}_i G$ si et seulement si g satisfait à la condition:

$$(1.3) \quad g(y+z)=g(y)-g(0)+g(z), \quad \forall x, y \in G.$$

Definition 1.2. Une fonction $g \in \text{Map}(G, G)$ est appelée *infra-additive*, si elle satisfait à la condition (1.3). Nous désignons l'ensemble des fonctions infra-additives sur G par $A(G)$ et ses éléments sont obtenus comme la somme ponctuelle d'un endomorphisme de G et d'une fonction constante sur G . $A(G)$ est un groupe par rapport à la somme ponctuelle si et seulement si G est abélien. Dans ce cas, $(A(G), +, \circ)$ est un infra-presque anneau à gauche et un presque anneau à droite.

Si $f \in \text{Map}(G, G), g \in \text{End } G$, alors la multiplication:

(e) $\mu_{13}(x, y)=[f(x), g(y)], \quad \forall x, y \in G,$

est i.-d.g. (de plus, elle est une m.d.g.), si et seulement si les images $f(G)$ et $g(G)$ sont contenues dans un sous-groupe métabelien de G .

La «deviation de la linéarité» d'une fonction $f \in \text{Map}(G, G)$, avec la propriété $f(0)=0$, définit une multiplication:

$$(f) \quad \mu_{14}(x, y) = f(x+y) - f(y) - f(x), \quad \forall x, y \in G,$$

qui est m.i.-d.g. si et seulement si $g_x \in A(G)$, $\forall x \in G$, où $g_x(y) = f(x+y) - f(y)$, $\forall y \in G$.

Soit $(I, +)$ un sous-groupe de G , qui est un infra-presque anneau à gauche par rapport à $+$ et μ . Si $f \in \text{Hom}(G, I)$ a les propriétés: $f \circ f = f$ et la restriction de f à I est un endomorphisme de l'infra-presque anneau I , alors la multiplication définie par:

$$(1.4) \quad \tilde{\mu}(x, y) = \mu(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in G,$$

est i.-d.g. et associative sur G .

Definition 1.3. Si $(G, +, \cdot)$ est un presque anneau à gauche et $(G, +, *)$ est un infra-presque anneau à gauche, alors nous appelons $(G, +, *)$ un *infra-presque anneau de Dickson associé au presque anneau $(G, +, \cdot)$* , s'il existe un homomorphisme de demigroupes: $\Phi: (G, *) \rightarrow (\text{Si}(G), \circ)$ (où $\text{Si}(G) = A(G, +) \cap \text{End}(G, \cdot)$, $\Phi(x) = \Phi_x$, $\forall x \in G$, et « $\circ$ » est la composition des fonctions), tel qu'on ait:

$$(1.5) \quad x * y = x \cdot \Phi_x(y), \quad \forall x, y \in G.$$

L'égalité (1.5) et l'associativité de « $*$ » impliquent:

$$(1.6) \quad x \cdot \Phi_x(y) \cdot \Phi_{x \cdot \Phi_x(y)}(z) = x \cdot \Phi_x(y) \cdot (\Phi_x \circ \Phi_y)(z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

Cette condition est satisfaite si Φ satisfait à la condition suffisante:

$$(1.7) \quad \Phi_x \circ \Phi_y = \Phi_{x \cdot \Phi_x(y)}, \quad \forall x, y \in G,$$

ou, ce qui est la même chose, le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\Phi \times \Phi} & \text{Si}(G) \times \text{Si}(G) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \circ \\ G & \xrightarrow{\Phi} & \text{Si}(G) \end{array}$$

est commutatif, où $\Psi(x, y) = (\sigma_x \circ \Phi_x)(y) = x \cdot \Phi_x(y)$, $\forall x, y \in G$, $\sigma_x(y) = x \cdot y$, $\forall x, y \in G$.

§.2. Propriétés de l'ensemble $\text{Mult}_i g$

Une m.i.-d.g. $\mu: G \times G \rightarrow G$ a les propriétés:

$$(2.1) \quad \mu(x, -z) = \mu(x, 0) - \mu(x, z) + \mu(x, 0), \quad \forall x, z \in G,$$

$$(2.2) \quad \mu\left(x, \sum_{j=1}^n y_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} (\mu(x, y_j) - \mu(x, 0)) + \mu(x, y_n), \quad \forall x, y_j \in G,$$

$j=1, 2, \dots, n$, qu'on peut démontrer en calculant $\mu(x, 0)=\mu(x, z-z)$ et, respectivement, en utilisant (1.1) et l'induction par rapport à n . Par l'addition de $-\mu(x, 0)$ à droite, la relation (1.1) devient :

$$(2.3) \quad \mu(x, y+z)-\mu(x, 0)=[\mu(x, y)-\mu(x, 0)]+[\mu(x, z)-\mu(x, 0)],$$

pour x, y, z arbitraires en G , ce qui nous suggère les notations :

$$(2.4) \quad v_x(y)=\mu(x, y)-\mu(x, 0), \quad \forall y \in G, \quad \forall x \in G,$$

$$(2.5) \quad \bar{\mu}(x, y)=\mu(x, y)-\mu(x, 0), \quad \forall x, y \in G,$$

$$(2.6) \quad \eta(x)=\mu(x, 0), \quad \forall x \in G.$$

On voit que $v_x \in \text{End } G$, donc on peut définir $v \in \text{Map}(G, \text{End } G)$ par $v(x)=v_x$, $\forall x \in G$. On voit aussi que $\bar{\mu} \in \text{Mult}_g G$, tandis que $\eta \in \text{Map}(G, G)$. Par exemple, pour la multiplication d'anneau faible ou de presque anneau faible sur $(A, +, \cdot)$, les images de la fonction v sont : $v_x(y)=x \cdot y+y$, respectivement : $v_x(y)=x \cdot y + (x+y-x)$ (premier type) et $v_x(y)=x \cdot y + \psi_1(y)$, respectivement $v_x(y)=x \cdot y + \varphi(x) + \psi_1(y) - \varphi(x)$ (2nd type).

Quand $\mu \in \text{Mult}_i G$ est à la fois une multiplication distributive à droite, alors la fonction η , donnée par (2.6), a les propriétés suivantes :

$$(2.7) \quad \mu(\eta(x), z)=\eta(x), \quad \forall x, z \in G,$$

$$(2.8) \quad \mu(z, \eta(x))=\eta(\mu(z, x)), \quad \forall x, z \in G,$$

$$(2.9) \quad \eta \in \text{End } G, \quad \eta \circ \eta = \eta,$$

$$(2.10) \quad \eta(\bar{\mu}(x, y))=\bar{\mu}(x, \eta(y)), \quad \bar{\mu}(\eta(x), y)=0, \quad \forall x, y \in G,$$

c'est-à-dire η est un endomorphisme de G (comme un G -groupe à gauche) et l'image de η est invariante, élément à élément, à la multiplication à droite avec des éléments de G .

Considérons maintenant $\mu_1, \mu_2 \in \text{Mult}_i G$. Leur somme ponctuelle est aussi un élément de $\text{Mult}_i G$ si et seulement si on a $(\forall x, y, z \in G)$:

$$(2.11) \quad [\mu_2(x, y)-\mu_2(x, 0)]+[-\mu_1(x, 0)+\mu_1(x, z)]= \\ = [-\mu_1(x, 0)+\mu_1(x, z)]+[\mu_2(x, y)-\mu_2(x, 0)].$$

Pour que $\mu_1+\mu_2 \in \text{Mult}_i G$, il faut et il suffit que les sousgroupes engendrés par $P_j=\{\mu_j(x, y)/x, y \in G\}$, $j=1, 2$, en G , soient permutables élément à élément. La condition (2.11) est vérifiée par deux multiplications quelconques de l'ensemble $M_H=\{\mu/\mu \in \text{Mult}_i G, \mu(x, y) \in H, \forall x, y \in G\}$, avec H un sous-groupe abélien de G (par exemple, son centre). De plus, cet ensemble est un groupe. Quand G est abélien, alors $\text{Mult}_i G$ est aussi un groupe (abélien), comme on peut le vérifier. Si $\text{Mult}_i G$ est un groupe, alors G est abélien. En effet, vu que $\mu+\mu \in \text{Mult}_i G$, $\forall \mu \in \text{Mult}_i G$, on prend $\mu(x, y)=y$, $\forall x, y \in G$, et on trouve $y+z=z+y$, $\forall y, z \in G$. Dans ce cas, $\text{Mult}_g G$ est aussi un groupe [3] qui est un sous-groupe de $\text{Mult}_i G$ et les ensembles $\text{Map}(G, G)$, $\text{End } G$, $\text{Map}(G, \text{End } G)$ sont des groupes. Ces quelques considérations nous conduisent à la suivante :

Proposition 2.1. (i) Il existe une bijection $\Phi: \text{Mult}_i G \rightarrow \text{Map}(G, \text{End } G) \times \text{Map}(G, G)$ où $\Phi(\mu) = (v, \eta)$, $\forall \mu \in \text{Mult}_i G$, les fonctions v et η étant définies par (2.4) et (2.6). (ii) Il existe une bijection $\Psi: \text{Mult}_i G \rightarrow \text{Mult}_g G \times \text{Map}(G, G)$, où $\Psi(\mu) = (\bar{\mu}, \eta)$, $\forall \mu \in \text{Mult}_i G$, $\bar{\mu}$ et η étant définies par (2.5) et (2.6). (iii) Les bijections ci-dessus sont des isomorphismes, quand G est abélien.

Considérons $(v, \eta) \in \text{Map}(G, \text{End } G) \times \text{Map}(G, G)$ et $(\bar{\mu}, \eta_1) \in \text{Mult}_g G \times \text{Map}(G, G)$. Les multiplications μ et μ_1 , définies par $\mu(x, y) = v_x(y) + \eta(x)$, où $v_x = v(x)$, $\forall x, y \in G$ et $\mu_1(x, y) = \bar{\mu}(x, y) + \eta_1(x)$, $\forall x, y \in G$, sont i.-d.g. Nous avons: $\Phi(\mu) = (v, \eta)$ et $\Psi(\mu_1) = (\bar{\mu}, \eta_1)$, donc les applications Φ et Ψ sont surjectives. On peut voir qu'elles sont aussi injectives et, dans le cas G abélien, elles sont des homomorphismes des groupes considérés. Quand G est abélien, la restriction de Φ à $\text{Mult}_g G$ est l'isomorphisme du Théorème 1.1 de Clay [3].

Quelques fonctions sur $\text{Mult}_i G$ sont utiles dans l'étude du transfert des propriétés de G à $\text{Mult}_i G$. La manière de leur construction est indiquée dans la:

Proposition 2.2. (i) Soient les groupes G, G' , les homomorphismes $f: G \rightarrow G'$, $h: G' \rightarrow G$ et $g \in \text{Map}(G, G)$. On a une application $A: \text{Mult}_i G \rightarrow \text{Mult}_i G$ définie par $A(\mu)(x', y') = f(\mu(g(x'), h(y')))$, $\forall \mu \in \text{Mult}_i G$, $\forall x', y' \in G'$. Si $\mu \in \text{Mult}_g G$, alors $A(\mu) \in \text{Mult}_g G'$. (ii) Si f est un isomorphisme et $h = g = f^{-1}$, alors A est bijective. (iii) Pour G, G' abéliens, les applications de (i) et (ii) sont des isomorphismes de groupes.

Dans la démonstration, on utilise l'additivité de f et h (pour (i)), la bijectivité de f (pour (ii)) et la distributivité de la composition d'un homomorphisme par rapport à l'addition des fonctions (cf. Zassenhaus [11], p. 72). On peut trouver une proposition analogue pour $\text{Mult}_g G$ et $\text{Mult}_g G'$, en utilisant la restriction de A à $\text{Mult}_g G$. On obtient des conséquences utiles de ce théorème, si on prend $G' = G$ et des applications particulières pour f, g, h , par exemple: $g = I$ (l'application identique sur G), $f = g = I$; $h = g = I$. En particulier, si G est abélien et la fonction $f_n \in \text{Map}(G, G)$ (où $f_n(x) = nx$, $\forall x \in G$) est un automorphisme de G , alors la fonction $F_n: \text{Mult}_i G \rightarrow \text{Mult}_i G$ définie par $F_n(\mu) = n\mu$, $\forall \mu \in \text{Mult}_i G$, est un automorphisme (ici n est un entier positif).

Dans ce qui suit, on considère G abélien. On peut utiliser la Proposition 2.1 pour trouver la structure du groupe $\text{Mult}_i G$ dans certains cas où on connaît la structure de $\text{End } G$, par exemple quand G est une somme directe — complète ou pas — de groupes cycliques finis du même ordre ou infinis (on obtient ainsi des résultats qui généralisent ceux de L. FUCHS [7] et R. J. CLAY [3]).

Il y a beaucoup de propriétés qui sont également vraies pour $G, \text{Mult}_g G$ (voir [3]) et $\text{Mult}_i G$. On a, par exemple, en utilisant les conséquences de la Proposition 2.2: 1. Si G est borné par n (naturel), c'e.-à-d. $nx = 0$, $\forall x \in G$, alors $\text{Mult}_i G$ est borné par n et réciproquement. 2. Si $G[n] = \{x/x \in G, nx = 0\} = \{0\}$, alors $(\text{Mult}_i G)[n] = \{0\}$. 3. Si G est sans torsion, alors $\text{Mult}_i G$ est sans torsion. 4. Si $nG = G$ et $G[n] = \{0\}$, alors on a la même chose pour $\text{Mult}_i G$.

§.3. Équivalence des multiplications infra-distributives

La Proposition 2.2 nous permet d'introduire une relation d'équivalence sur $\text{Mult}_i G$:

$$(3.1) \quad \mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow (G, +, \mu_1) \cong (G, +, \mu_2)$$

(comme infra-presque anneaux), où $\mu_1, \mu_2 \in \text{Mult}_i G$ sont associatives.

Soit μ de $\text{Mult}_i G$. La fonction $f_x, x \in G$, définie par:

$$(3.2) \quad f_x(y) = \mu(x, y), \quad \forall y \in G,$$

est un élément de $A(G)$. Si μ est associative, alors on a:

$$(3.3) \quad f_x \circ f_y = f_{f_x(y)}, \quad \forall x, y \in G.$$

Réciproquement, si $f \in \text{Map}(G, A(G))$, $f(x) = f_x, \forall x \in G$, avec la propriété (3.3), alors $\mu: G \times G \rightarrow G$, définie par $\mu(x, y) = f_x(y), \forall x, y \in G$, est une m.i.-d.g. associative sur G .

On a donc la:

Proposition 3.1. *L'ensemble des multiplications i.-d.g. associatives sur G et l'ensemble des fonctions $f \in \text{Map}(G, A(G))$ qui satisfont (3.3) se correspondent bijectivement.*

En utilisant cette proposition, nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux m.i.-d.g. associatives sur G soient équivalentes.

Proposition 3.2. *Soit $\mu, \mu' \in \text{Mult}_i G$, associatives, et f, f' les fonctions de $\text{Map}(G, A(G))$ associées à μ, μ' par (3.2). La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi \in \text{Aut } G$ soit un isomorphisme des infra-presque anneaux $(G, +, \mu), (G, +, \mu')$, donc $\mu \sim \mu'$, est que f, φ et f' vérifient l'égalité:*

$$(3.4) \quad f_x = \varphi^{-1} \circ f'_{\varphi(x)} \circ \varphi, \quad \forall x \in G.$$

En vérité, $\varphi \in \text{Aut } G$ est un isomorphisme d'infra-presque anneaux si et seulement si $\varphi(\mu(x, y)) = \mu'(\varphi(x), \varphi(y)), \forall x, y \in G$, c'est-à-dire $\varphi(f_x(y)) = f'_{\varphi(x)}(\varphi(y)) = (f'_{\varphi(x)} \circ \varphi)(y), \forall x, y \in G$, donc l'égalité (3.4).

Quand G est abélien et $A(G)$ est remplacé par $\text{End } G$, on obtient le théorème utilisé par J. R. CLAY [4] pour déterminer l'ensemble des presque-anneaux à gauche nonisomorphes sur un groupe fini d'ordre inférieur à 9.

Quand G est un espace vectoriel à gauche sur un corps noncommutatif D , en ajoutant une condition supplémentaire concernant la multiplication avec les scalaires de D , on obtient les résultats de Williams [10].

§.4. D'autres propriétés de transfert

Maintenant nous étudions les conditions du transfert des propriétés de $\mu \in \text{Mult}_i G$ à $\bar{\mu} \in \text{Mult}_g G$, associée à μ par (2.5) (l'associativité et la distributivité à droite).

Proposition 4.1. *Si $\mu \in \text{Mult}_i G$ est associative et distributive à droite, alors $\bar{\mu}$, donnée par (2.5), est m.d.g. associative. Elle est aussi distributive à droite, si et seulement si on a:*

$$(4.1) \quad \bar{\mu}(y, z) + \mu(x, 0) = \mu(x, 0) + \bar{\mu}(y, z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

On vérifie immédiatement l'associativité de $\bar{\mu}$:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\bar{\mu}(x, y), z) &= \mu(\mu(x, y) - \mu(x, 0), z) - \mu(\mu(x, y) - \mu(x, 0), 0) = \\ &= \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, 0), z) + \mu(\mu(x, 0), 0) - \mu(\mu(x, y), 0) = \\ &= \mu(x, \mu(y, z)) - \mu(x, 0) + [\mu(x, 0) - \mu(x, \mu(y, 0)) + \mu(x, 0)] - \\ &- \mu(x, 0) = \mu(x, \mu(y, z) - \mu(y, 0)) - \mu(x, 0) = \bar{\mu}(x, \bar{\mu}(y, z)),\end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in G$. $\bar{\mu}$ est distributive à droite, si et seulement si on a, successivement: $\bar{\mu}(x+y, z) = \bar{\mu}(x, z) + \bar{\mu}(y, z)$, $\mu(x+y, z) - \mu(x+y, 0) = \mu(x, z) - \mu(x, 0) + \mu(y, z) - \mu(y, 0)$, donc (4.1).

Si G est abélien, la condition (4.1) est toujours remplie et, dans les hypothèses de la Proposition 4.1, $(G, +, \bar{\mu})$ est un anneau.

Quand on fait cette construction pour $A(V)$, où V est un espace vectoriel à dimension finie, on obtient la représentation donnée par D. W. BLACKETT [2]. Si $f = l_f + c_f$, $g = l_g + c_g$ sont des éléments arbitraires de $A(V)$, où $l_f, l_g \in \text{Hom}_K(V, V)$ et $c_f, c_g \in T_c(V)$, on a: $\bar{\mu}(f, g) = l_f \circ l_g + l_f \circ c_g$.

On a le résultat plus général:

Proposition 4.2. (i) Si $(G, +, \mu)$ est un infra-presque anneau à gauche, alors $\bar{\mu}$, donnée par (2.5), est associative si et seulement si on a la relation:

$$(4.2) \quad \bar{\mu}(\bar{\mu}(x, y), z) = \bar{\mu}(\mu(x, y), z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

(ii) Si $(G, +, \mu)$ est un infra-presque anneau bilatère et $\mu(0, 0) = 0$ alors (4.2) est équivalente à la condition:

$$(4.3) \quad \mu(x, \mu(0, y)) = \mu(0, y) + \mu(x, 0), \quad \forall x, y \in G.$$

De plus, $\bar{\mu}$ est infra-distributive à droite, si et seulement si on a:

$$(4.4) \quad \begin{aligned}\mu(x, 0) + [-\mu(0, z) + \mu(y, z) - \mu(y, 0)] + \mu(0, 0) = \\ = \mu(0, 0) + [-\mu(0, z) + \mu(y, z) - \mu(y, 0)] + \mu(x, 0), \quad \forall x, y, z \in G.\end{aligned}$$

On fait la preuve, en vérifiant toutes les affirmations. En général, les conditions de ce théorème ne sont pas satisfaites par les m.i.-d.g. Ainsi, $\mu_4(x, y) = x + a + y$, $\forall x, y \in G$, est une multiplication bilatéralement infra-distributive, mais elle satisfait à (4.3) seulement quand G est abélien. Dans ce cas, $\bar{\mu}_4(x, y) = y$, $\forall x, y \in G$, donc $\bar{\mu}_4$ est la multiplication triviale de Z -anneau à gauche (voir [1]).

Proposition 4.3. Soit $(G, +, \bar{\mu})$ un presque anneau distributif, η une fonction sur G , μ une multiplication donnée par $\mu(x, y) = \bar{\mu}(x, y) + \eta(x)$, $\forall x, y \in G$. Si η satisfait à (2.9) et (2.10), μ et $\bar{\mu}$ satisfont à (4.1), alors μ est une m.i.-d.g., distributive à droite et associative.

On peut vérifier directement toutes les affirmations de la proposition précédente.

Nous voyons ainsi que l'étude des m.i.-d.g. associatives ne se réduit pas à l'étude des m.d.g. associatives que dans des cas spéciaux.

Tandis que $\bar{\mu}$ a les mêmes identités à gauche que μ , l'affirmation réciproque n'est pas vraie que pour les identités distributives à gauche par rapport à μ . Une autre remarque: dans $\text{Mult}_i G$ il y a beaucoup de multiplications associatives tout

à fait banales. Un exemple: si $G = G_1 \cup G_2$, où G_1, G_2 sont des parties disjointes nonvides de G , alors la multiplication donnée par:

$$(4.5) \quad \mu(x, y) = \begin{cases} x, & \forall x \in G_1, \quad \forall y \in G, \\ y, & \forall x \in G_2, \quad \forall y \in G, \end{cases}$$

est i.-d.g. et associative, les éléments de G_2 sont distributifs à gauche. Mais la multiplication associée:

$$(4.6) \quad \bar{\mu}(x, y) = \begin{cases} 0, & \forall x \in G_1, \quad \forall y \in G, \\ y, & \forall x \in G_2, \quad \forall y \in G, \end{cases}$$

n'est pas associative.

Bibliographie

- [1] G. BERMAN, SILVERMAN, R. J., Near rings, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 23—34.
- [2] D. W. BLACKETT, The near-ring of affine transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 517—519.
- [3] J. R. CLAY, The group of left distributive multiplications on an abelian group, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **19** (1968), 221—227.
- [4] J. R. CLAY, The near-rings on groups of low order, *Math. Z.* **104** (1968), 364—371.
- [5] AL. CLIMESCU, Anneaux faibles, *Bul. Inst. Politehn. Iași*, **7** (11), (1961), 1—6.
- [6] AL. CLIMESCU, A new class of weak rings (Romanian), *idem*, **10** (14) (1964), 1—4.
- [7] L. FUCHS, Abelian groups, *Budapest*, 1958 (Chap. XII).
- [8] MIRELA ȘTEFĂNESCU, Infra-near rings of affine type, *An. Șt. Univ. Iași*, **24** (1978), 5—14.
- [9] MIRELA ȘTEFĂNESCU, Infra-near rings, *An. Șt. Univ. Iași*, **25** (1979), 45—56.
- [10] R. E. WILLIAMS, A note on near rings over vector spaces, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 173—1975.
- [11] H. ZASSENHAUS, Lehrbuch der Gruppentheorie, *Leipzig*, 1937 (Chap. II).

DR. MIRELA ȘTEFĂNESCU
FACULTY OF MATHEMATICS
UNIVERSITY "AL. I. CUZA"
IAȘI, 6000 (ROMANIA)

(Reçu le 26 juin 1977.)